

De l'équation de Boltzmann à l'hydrodynamique

Tristan Millet

Réunion thématique du GDR-GDM 2025, La Rochelle

Université de La Rochelle, CNRS LaSIE UMR7356

`tristan.millet@univ-lr.fr`



27 juin 2025

Introduction

Description macroscopique :

- ◀ L'état macroscopique d'un fluide est décrit par quelques grandeurs :
 - densité de masse $\rho(\mathbf{x}, t)$, vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, température $T(\mathbf{x}, t)$.
- ◀ Leur évolution est gouvernée par les équations de l'hydrodynamique.

Problème fondamental (Hilbert, 1900) :

- ◀ Peut-on dériver rigoureusement les équations de l'hydrodynamique à partir de la dynamique moléculaire ?
- ◀ Hilbert propose une approche en deux étapes :
 - passer par un modèle intermédiaire : **l'équation de Boltzmann**, pour un gaz parfait.

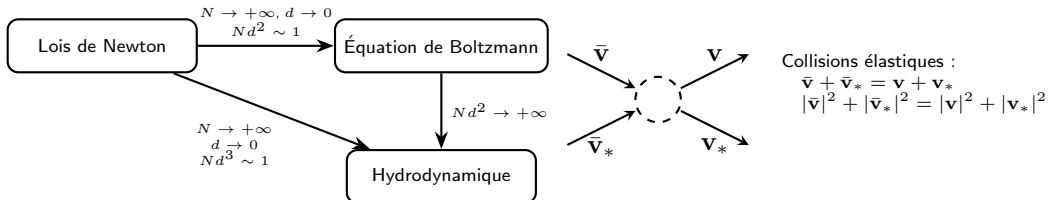
Equation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = Q(f, f), \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \text{ est la densité de probabilité } (\mathbf{x}, \mathbf{v}, t).$$

Où $Q(f, f)$ est l'opérateur de collision :

$$Q(f, f) = \frac{1}{m} \int (\bar{f} \bar{f}_* - f f_*) B(\theta, V) d\theta d\epsilon d\mathbf{v}_*, \quad V = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_*|, \quad B(\theta, V) \text{ est le } \mathbf{noyau \ de \ collision}.$$



Propriétés de l'opérateur de collision

L'opérateur de collision $Q(f, f)$ vérifie les équations de conservation suivantes :

$$\int Q(f, f) d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{conservation de la masse}) \quad (1)$$

$$\int Q(f, f) \mathbf{v} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{conservation de la quantité de mouvement}) \quad (2)$$

$$\int Q(f, f) |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{conservation de l'énergie}) \quad (3)$$

Plus généralement $\varphi(\mathbf{v}) = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + c|\mathbf{v}|^2$ vérifie $\int Q(f, f) \varphi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0$. C'est un **invariant collisionnels**, c'est-à-dire que dans le processus de collision $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \rightarrow (\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}_*)$:

$$\varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}_*) = \varphi(\bar{\mathbf{v}}) + \varphi(\bar{\mathbf{v}}_*). \quad (4)$$

Théorème H

On définit la fonction H de Boltzmann :

$$H(t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \log(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x}d\mathbf{v} \quad (5)$$

Theorem (Théorème H)

Si f vérifie l'équation de Boltzmann alors $\frac{dH}{dt} \leq 0$.

Le théorème H traduit la "perte" de réversibilité, et ainsi l'apparition d'une **flèche du temps**.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶ $Q(f, f) = 0$
- ▶ f **minimise** la fonction H
- ▶ f est une distribution **maxwellienne locale**:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = A(\mathbf{x}, t) \exp(-B(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v} - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2),$$

avec $A(\mathbf{x}, t), B(\mathbf{x}, t) > 0$ et $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$.

Moments de la fonction de distribution

Ordre	Expression	Interprétation
0	$\rho = \int f d\mathbf{v}$	Densité de masse
1	$\rho \mathbf{u} = \int f \mathbf{v} d\mathbf{v}$	Densité de quantité de mouvement
2	$\rho e = \frac{1}{2} \int f \mathbf{c} ^2 d\mathbf{v}$	Énergie interne ($\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$)
2	$\mathbf{P} = \int f \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} d\mathbf{v}$	Tenseur des pressions
3	$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \int f \mathbf{c} ^2 \mathbf{c} d\mathbf{v}$	Flux de chaleur

Gaz parfait monoatomique

$$p = \frac{2}{3} \rho e \quad (p = \frac{1}{3} \text{Tr}(P)), \quad e = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{m}, \quad T(\mathbf{x}, t) = \text{température locale du gaz,}$$

k_B = constante de Boltzmann

Équations de conservation

Si f satisfait l'équation de Boltzmann alors, en intégrant par rapport à $\mathbf{v}$:

$$\partial_t \int f d\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{conservation de la masse})$$

$$\partial_t \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{quantité de mouvement})$$

$$\partial_t \int f \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int f \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{énergie})$$

Équations de conservation

On peut réécrire les équations de conservations à l'aide des quantités définies, ce qui conduit aux **équations de conservation locales** :

Forme intégrale locale :

$$\partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{conservation de la masse})$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}) = 0 \quad (\text{quantité de mouvement})$$

$$\partial_t \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \right) = 0 \quad (\text{énergie})$$

Remarque : Ces équations ne sont pas encore fermées. À ce stade, les quantités $\mathbf{P}$ et $\mathbf{q}$ dépendent encore de la distribution f complète. Le passage au régime hydrodynamique (changement d'échelle) permettra de relier ces quantités aux variables $(\rho, \mathbf{u}, e)$.

Équation de Boltzmann adimensionnée

On introduit les grandeurs caractéristiques suivantes :

- ◀ Une **longueur macroscopique** L et un **temps macroscopique** $\mathcal{T}$ caractéristiques du système,
- ◀ Une **vitesse thermique** de référence (microscopique), donnée par :

$$v_{\mathcal{T}} = \sqrt{\frac{2k_B \mathcal{T}}{m}};$$

On définit alors les variables adimensionnées :

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\mathcal{T}}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_{\mathcal{T}}}, \quad \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{t}) = \frac{Nm}{L^3 v_{\mathcal{T}}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad \hat{B}(\theta, \hat{V}) = d^2 v_{\mathcal{T}} B(\theta, V).$$

Équation de Boltzmann (forme adimensionnée)

$$St \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{f} = \frac{1}{Kn} \hat{Q}(\hat{f}, \hat{f}), \quad \text{où } St = \frac{L}{\mathcal{T} v_{\mathcal{T}}} \text{ (Strouhal)}, \quad Kn = \frac{\ell}{L} \text{ (Knudsen)}.$$

Développement de Hilbert

Le régime hydrodynamique pour un écoulement compressible correspond à la limite :

$$Kn \ll 1, \quad St \sim 1$$

On introduit alors un petit paramètre $\varepsilon \sim Kn$. Quand $\varepsilon \ll 1$, les collisions deviennent dominantes dans l'équation de Boltzmann et pour que celle-ci reste valide

$$Q \sim \varepsilon \Rightarrow f \approx \text{Maxwellienne locale}$$

Solution *normale* de l'équation de Boltzmann

On se propose un développement en puissance de ε :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad \Lambda_i(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Lambda_i^{(n)}(\mathbf{x}, t), \quad \Lambda_i^{(n)} = \int f^{(n)} \psi_i d\mathbf{v}$$

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = v_x, \quad \psi_3 = v_y, \quad \psi_4 = v_z, \quad \psi_5 = |\mathbf{v}|^2$$

Opérateur de collision linéarisé

Il est utile d'introduire l'opérateur de collision linéarisé $\mathcal{L}$, défini par :

$$\mathcal{L}h = 2(f^{(0)})^{-1} Q(f^{(0)}, f^{(0)}h) \quad (6)$$

Propriétés de $\mathcal{L}$

- ◀ $\ker \mathcal{L} = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5\}$ où les fonctions ψ_i sont les **invariants collisionnels**
- ◀ L'équation $\mathcal{L}h = g$ admet une solution unique si $g \in (\ker \mathcal{L})^\perp$, c'est-à-dire si g est orthogonal au noyau de $\mathcal{L}$ (**condition de compatibilité**).
- ◀ Dans ce cas, la solution générale s'écrit :

$$h = \bar{h} + \sum_{i=1}^5 \alpha_i \psi_i, \quad \text{où } \bar{h} \in (\ker \mathcal{L})^\perp \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Développement de Hilbert

On injecte le développement de f dans l'équation de Boltzmann et en regroupant les termes par ordre en ε , on obtient :

Hiérarchie des ordres en ε

$$\mathcal{O}(1) \quad 0 = Q(f^{(0)}, f^{(0)})$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon) \quad \dot{f}^{(0)} = f^{(0)} \mathcal{L} h^{(1)}, \quad h^{(1)} = f^{(1)} / f^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^n) \quad \dot{f}^{(n-1)} - \sum_{m=1}^{n-1} Q(f^{(m)}, f^{(n-m)}) = f^{(0)} \mathcal{L} h^{(n)}, \quad h^{(n)} = f^{(n)} / f^{(0)}$$

Remarque : On peut montrer que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t; \varepsilon)$ est uniquement déterminée par $\rho_i(\mathbf{x}, t = 0; \varepsilon)$: la dérivée partielle de f par rapport au temps est uniquement fonction de $(\rho, \mathbf{u}, T)(\mathbf{x}, t)$.

Ordre 0 : Euler

À l'ordre 0, $Q(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$ implique que $f^{(0)}$ est une maxwellienne locale :

$$f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\rho^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{(2\pi RT^{(0)}(\mathbf{x}, t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)|^2}{2RT^{(0)}(\mathbf{x}, t)}\right)$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}^{(0)} = p \mathbf{I}, \quad \mathbf{q}^{(0)} = 0$$

Et la condition de solubilité $\dot{f}^{(0)} \in \ker \mathcal{L}^\perp$ nous redonne les équations de conservation locale, dans le cas d'un fluide parfait :

Hydrodynamique non dissipative

$$\partial_t \rho^{(0)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) = 0$$

$$\partial_t (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \otimes \mathbf{u}^{(0)}) = -\nabla p^{(0)}$$

$$\partial_t \left(\rho^{(0)} \left(e^{(0)} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}^{(0)}|^2 \right) \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(p^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} + \rho^{(0)} \mathbf{u}^{(0)} \left(e^{(0)} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}^{(0)}|^2 \right) \right) = 0$$

Bilan : A l'ordre 0, $(\rho^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, e^{(0)})$ vérifient les équations d'Euler.

Ordre 1 : Navier-Stokes

On peut prendre à l'instant $t = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda_i^{(0)}(\mathbf{x}, 0) = \Lambda_i(\mathbf{x}, 0; \varepsilon) \\ \Lambda_i^{(n)}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Afin de déterminer $\bar{f}^{(1)}$ on doit évaluer $\dot{f}^{(0)}$ et comme $f^{(0)}$ est fonction de t et $\mathbf{x}$ qu'à travers $\Lambda_i(\mathbf{x}, t)$ on a :

$$\dot{f}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \Lambda_i^{(0)}} \left(\partial_t \rho_i^{(0)} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Lambda_i^{(0)} \right)$$

En évaluant l'expression au temps $t = 0$ on obtient, en utilisant les équations d'Euler :

$$\dot{f}^{(0)} \Big|_{t=0} = f^{(0)} \left\{ \frac{1}{2T} \nabla T \cdot \underbrace{\left[\mathbf{c} \left(\frac{|\mathbf{c}|^2}{RT} - 5 \right) \right]}_{=\mathbf{A}(\mathbf{c})} + \frac{1}{RT} \nabla \mathbf{u} : \underbrace{\left[\mathbf{c} \otimes \mathbf{c} - \frac{1}{3} |\mathbf{c}|^2 \mathbf{I} \right]}_{=\mathbf{B}(\mathbf{c})} \right\}$$

L'expression pour $\bar{f}^{(1)}$ s'en suit :

$$\bar{f}^{(1)} = f^{(0)} \left\{ \frac{a(|\mathbf{c}|, T)}{2T} \nabla T \cdot \mathbf{A}(\mathbf{v}) + \frac{b(|\mathbf{c}|, T)}{RT} D(\mathbf{u}) : \mathbf{B}(\mathbf{c}) \right\}, \quad D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (7)$$

On peut alors calculer les corrections au tenseur des contraintes et au flux thermique :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(1)} &= -\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \mu D(\mathbf{u}), & \Lambda + \frac{2}{3}\mu &= 0, \quad \lambda, \mu > 0 \\ \mathbf{q}^{(1)} &= -\kappa \nabla T, & \kappa &> 0 \end{aligned}$$

Les coefficients de transport sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{4\pi}{15RT} \int_0^{+\infty} f^{(0)}(r) b(r, T) r^6 dr \\ \kappa &= -\frac{2\pi}{3T} \int_0^{+\infty} f^{(0)}(r) a(r, T) r^6 \left(\frac{r^2}{RT} - 5 \right) dr. \end{aligned}$$

Equations de Navier-Stokes

L'expression générale pour $f^{(1)}$ est $f^{(1)} = \bar{f}^{(1)} + \sum_{i=1}^5 a_i \psi_i f^{(0)}$, où $\bar{f}^{(1)} \in \ker \mathcal{L}^\perp$ et $a_i \in \mathbb{R}$ est fonction du temps. La condition de solubilité impose que $\dot{f}^{(1)} = 0$, c'est à dire :

$$\partial_t \Lambda_i^{(1)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ \int \bar{f}^{(1)} \mathbf{v} \psi_i d\mathbf{v} + \sum_j a_j \int \mathbf{v} \psi_i \otimes \psi_j f^{(0)} d\mathbf{v} \right\} = 0$$

D'autre part, la condition de solubilité $\dot{f}^{(0)} = 0$ donnait :

$$\partial_t \Lambda_i^{(0)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\int f^{(0)} \psi_i \mathbf{v} d\mathbf{v} \right) = 0$$

Ainsi, sommant les deux contributions on obtient :

$$\partial_t (\Lambda_i^{(0)} + \varepsilon \Lambda_i^{(1)}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ \int f^{(0)} \psi_i \mathbf{v} d\mathbf{v} + \varepsilon \int \bar{f}^{(1)} \mathbf{v} \psi_i d\mathbf{v} + \varepsilon \sum_j a_j \int \mathbf{v} \psi_i \otimes \psi_j f^{(0)} d\mathbf{v} \right\} = 0$$

Prenant $t = 0$, on a que $\Lambda_i = \Lambda^{(0)}$ et $\Lambda_i^{(1)} = 0$ (donc $a_j = 0$) on a :

$$\partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\underbrace{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}}_{\substack{+ \varepsilon \\ = \int f^{(0)} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v}}} + \varepsilon \underbrace{\mathbf{P}^{(1)}}_{= \int \bar{f}^{(1)} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v}} \right) &= 0 \\ &= \int f^{(0)} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad = \int \bar{f}^{(1)} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\underbrace{\rho \mathbf{u} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + p \mathbf{u}}_{\substack{+ \varepsilon \\ = \int f^{(0)} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} d\mathbf{v}}} + \varepsilon \underbrace{\mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{u}}_{= \int \bar{f}^{(1)} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} d\mathbf{v}} \right) &= 0 \\ &= \int f^{(0)} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad = \int \bar{f}^{(1)} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} d\mathbf{v} \end{aligned}$$

Les termes correctifs en ε proviennent de la contribution de $\bar{f}^{(1)}$ agissant que sur les moments d'ordre 2 : tenseur des pressions et flux de chaleur.

En tenant compte de l'expression de $\mathbf{P}^{(1)}$ et $\mathbf{q}^{(1)}$ on obtient:

Hydrodynamique dissipative : Navier-Stokes-Fourier

$$\partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$\partial_t \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \right) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\rho \mathbf{u} \left(e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + p \mathbf{u} + \mathbf{q} \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u})$$

avec :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right), \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

Bilan : Ces équations décrivent un fluide visqueux compressible avec conduction thermique.

Approches alternatives

Au-delà de la méthode d'Hilbert, d'autres approches permettent de relier l'équation de Boltzmann aux équations de Navier–Stokes :

- ◀ Le **développement de Chapman–Enskog**, également basé sur une expansion en nombre de Knudsen.
- ◀ La **méthode des moments de Grad**, reposant sur une fermeture hiérarchique du système des moments.
- ◀ Des modèles simplifiés de collisions, comme le **modèle BGK** (Bhatnagar-Gross-Krook) :

$$Q(f, f) = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}$$

qui approxime le retour vers l'équilibre local, utilisé notamment en **méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)**.

Perspectives

- Passage de Boltzmann à Navier-Stokes sur des variétés : depuis la relativité générale, et également dans le cas non relativiste.
- Applications à la LBM.

References

-  C. Villani, A review of mathematical topics in collisional kinetic theory, Handbook of Mathematical Fluid Dynamics (Vol. 1), edited by S. Friedlander and D. Serre, published by Elsevier Science (2002).
-  C. Cercignani, The Mathematical Theory of Dilute Gases, Springer (1994).
-  C. Cercignani, The Boltzmann Equation and Its Applications, Springer (1988).
-  F. Golse, The Boltzmann Equation and Its Hydrodynamic Limits, version pdf en ligne (2005)
-  N. Pottier, Physique statistique hors d'équilibre (2005)
-  H. Grad, Principle of kinetic theory