Des connexions linéaires aux dérivations covariantes. Et *vice versa*

Patrick Verovic

LAMA – UMR 5127 (CNRS) – Université Savoie Mont Blanc (France)

GDR « Géométrie différentielle et mécanique » (n° 2043)
La Rochelle, 24 – 27 juin 2025

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Soient (E, M, π, F) un fibré et (TE, E, τ_E) le fibré tangent de E.

Proposition

L'ensemble $V(E) \coloneqq (T\pi)^{-1}(0_{\tau_M}(M))$ *est une sous-variété lisse de* TE *de dimension* $\dim(E)$ *et* $(V(E), E, (\tau_E)_{|V(E)})$ *est un sous-fibré vectoriel de* (TE, E, τ_E) *dont le rang est égal à* $\dim(F)$ *et qu'on appelle* le fibré vertical *de* (E, M, π, F).

Pour tout $x \in E$, on a donc $V_x(E) = \mathrm{Ker}(T_x\pi) = T_x E_{\pi(x)} \subseteq T_x E$.

Définition

On dit qu'un sous-fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *de* (TE, E, τ_E) *est un* fibré horizontal *de* (E, M, π, F) *lorsqu'il vérifie* $H_x \oplus V_x(E) = T_x E$ *pour tout* $x \in E$.

Le rang de $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ est donc égal à $\dim(M)$.

Soit $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ un fibré horizontal de (E, M, π, F).

Définition

L'application $C : TE \longrightarrow TE$ qui à chaque $\xi \in TE$ associe la projection de ξ sur $V_{\tau_E(\xi)}(E)$ parallèlement à $H_{\tau_E(\xi)}$ s'appelle la connexion d'Ehresmann *sur (E, M, π, F) associée à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.*

Caractérisation des connexions d'Ehresmann.

Proposition

Pour toute application $C : TE \longrightarrow TE$ *et tout sous-fibré vectoriel* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *de* (TE, E, τ_E), *les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *est un fibré horizontal de* (E, M, π, F) *et* C *est la connexion d'Ehresmann sur* (E, M, π, F) *associée à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.
- *On a* $V(E) = C(TE)$, $H = C^{-1}(0_{\tau_E}(E))$ *et* C *est un endomorphisme du fibré vectoriel* (TE, E, τ_E) *au-dessus de* E *qui vérifie* $C \circ C = C$.

Lorsque ces assertions sont satisfaites, on dit que C et $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ sont associés.

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné un point $p \in M$ ainsi que des vecteurs x et y de l'espace vectoriel E_p, on a $x + ty \in E_p \subseteq E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(x + ty) \in T_x E$.

Il en résulte que pour chaque $x \in E$ on peut considérer l'application

$\iota_x : E_{\pi(x)} \longrightarrow T_x E$ définie par $\boxed{\iota_x(y) \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(x + ty)}$.

On vérifie que ι_x est linéaire et injective d'image égale à $V_x(E)$.
Elle permet d'identifier $T_x E_{\pi(x)} = \mathrm{Ker}(T_x\pi) = V_x(E) \subseteq T_x E$ avec l'espace vectoriel $E_{\pi(x)}$.

On l'appelle *le relèvement vertical* de (E, M, π) *en* x.

Considérons la sous-variété $E \times_M E \coloneqq \{(x, y) \in E \times E \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ (appelée le pullback de (E, M, π) par π) de la variété lisse $E \times E$.

Définition

L'application $\Phi : E \times_M E \longrightarrow V(E)$ *définie par* $\Phi(x, y) \coloneqq \iota_x(y)$ *s'appelle* le relèvement vertical *de* (E, M, π).

On vérifie que Φ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(E \times_M E, E, \mathrm{proj}_1)$ sur le fibré vertical de (E, M, π) au-dessus de E.

Définition

Le champ de vecteurs Z *sur* E *défini par* $Z(x) \coloneqq \Phi(x, x)$ *s'appelle* le champ de vecteur canonique *de* (E, M, π).

On vérifie que Z est le champ de vecteurs fondamental sur E associé à $1 \in \mathbb{R}$ pour l'action lisse de $\mathbb{R}^*$ sur E définie par $\lambda * x \coloneqq \lambda x$ (dans $E_{\pi(x)}$).

Définition

Un morphisme $K : TE \longrightarrow E$ *du fibré vectoriel* (TE, E, τ_E) *dans le fibré vectoriel* (E, M, π) *au-dessus de* π *qui vérifie* $K(\Phi(x, y)) = y$ *pour tout* $(x, y) \in E \times_M E$ *s'appelle un* connecteur *sur* (E, M, π).

On en déduit que K est surjectif car on a $K(Z(x)) = x$ pour tout $x \in E$.

Proposition

Étant donné des applications $C : TE \longrightarrow TE$ *et* $K : TE \longrightarrow E$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- C *est une connexion d'Ehresmann sur* (E, M, π) *et on a* $K(\xi) = \mathrm{proj}_2(\Phi^{-1}(C(\xi)))$ *pour tout* $\xi \in TE$.
- K *est un connecteur sur* (E, M, π) *et on a* $C(\xi) = \Phi(\tau_E(\xi)\,, K(\xi))$ *pour tout* $\xi \in TE$.

Lorsque ces assertions sont satisfaites, on dit que C *et* K *sont* *associés*.

Lorsque ces assertions sont satisfaites, le fibré horizontal $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ de (E, M, π) associé à C vérifie

$$H = K^{-1}(0_\pi(M)) = \{\xi \in TE \mid K(\xi) = 0_\pi(\pi(\tau_E(\xi)))\}$$

sachant que K est morphisme du fibré vectoriel (TE, E, τ_E) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de π.

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné une variété lisse N et une application lisse $h : N \longrightarrow M$, on note $\Gamma_h(N, E)$ le sous-module sur $\mathrm{C}^\infty(N, \mathbb{R})$ de $\mathrm{C}^\infty(N, E)$ constitué des *sections lisses* de (E, M, π) *le long* de h (applications lisses $\sigma : N \longrightarrow E$ qui vérifient $\boxed{\pi \circ \sigma = h}$).

Pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$, on a donc $(\sigma_1, \sigma_2) \in (E \times_M E)^N$.

Lorsqu'on a $N \coloneqq M$ et $h \coloneqq \mathrm{I}_M$, l'ensemble $\Gamma_h(N, E)$ se réduit à celui des sections lisses $\Gamma(E)$ de (E, M, π) parmi lesquelles figure *la section nulle* $0_\pi : M \longrightarrow E$ définie par $0_\pi(p) \coloneqq$ le vecteur nul de l'espace vectoriel E_p.

Lorsqu'on a $E \coloneqq TM$ et $\pi \coloneqq \tau_M$, l'ensemble $\Gamma(E)$ n'est autre que celui $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs lisses sur M.

Lorsqu'on a $(E, M, \pi) \coloneqq (\mathbb{R}, \{0\}, 0)$ et $h \coloneqq 0$, l'ensemble $\Gamma_h(N, E)$ est égal à $\mathrm{C}^\infty(N, \mathbb{R})$.

Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel

Définition (Koszul)

On dit qu'une application $\nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) \longrightarrow E$ *est une* **dérivation covariante** *sur* (E, M, π) *le long de* h *lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Pour chaque* $\sigma \in \Gamma_h(N, E)$, *l'application partielle* $\nabla_{(\cdot)}(\sigma) : TN \longrightarrow E$ *est un morphisme du fibré vectoriel* (TN, N, τ_N) *dans le fibré vectoriel* (E, M, π) *au-dessus de* h.
- $\nabla_v(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_v(\sigma_1) + \nabla_v(\sigma_2)$ *pour tous* $v \in TN$ *et* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$.
- $\nabla_v(f\sigma) = f(q)\nabla_v(\sigma) + (T_q f \cdot v)\sigma(q)$ *(règle de Leibniz)* *pour tous* $q \in N$, $v \in T_q N$, $f \in \mathrm{C}^\infty(N, \mathbb{R})$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N, E)$.

Il est à noter qu'en vertu du premier point les égalités dans les deuxième et troisième points ont lieu dans l'espace vectoriel $E_{h(q)}$.

Lorsqu'on a $N \coloneqq M$ et $h \coloneqq \mathrm{I}_M$, on dit tout simplement que ∇ est une dérivation covariante sur (E, M, π).

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Application covariante associée à une connexion

Soient (E, M, π) un fibré vectoriel et C une connexion d'Ehresmann sur (E, M, π) pour laquelle on note K le connecteur associé.

Étant donné une variété lisse N, on a alors le résultat suivant.

Proposition

Pour chaque $\sigma \in \mathrm{C}^{\infty}(N, E)$, l'application $\nabla_{(.)}(\sigma) : TN \longrightarrow E$ définie par $\nabla_v(\sigma) \coloneqq K(T\sigma(v))$ est un morphisme du fibré vectoriel (TN, N, τ_N) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de $\pi \circ \sigma$.

Application covariante associée à une connexion

Soit à présent une application lisse $h : N \longrightarrow M$.

Définition

L'application $\begin{array}{rcl} \nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) & \longrightarrow & E \\ (v, \sigma) & \longmapsto & \nabla_v(\sigma) \end{array}$ *s'appelle* l'application covariante *sur* (E, M, π) *le long de* h *associée à* C.

Pour chaque $\sigma \in \Gamma_h(N, E)$, l'application partielle $\nabla_{(\cdot)}(\sigma) : TN \longrightarrow E$ est donc un morphisme du fibré vectoriel (TN, N, τ_N) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de h.

Est-ce que ∇ est une dérivation covariante sur (E, M, π) le long de h ?

Réponse : non, la raison étant que pour $q \in N$, $v \in T_q N$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$ on a $T(\sigma_1)(v) = T_q(\sigma_1) \cdot v \in T_{\sigma_1(q)} E$ et $T(\sigma_2)(v) = T_q(\sigma_2) \cdot v \in T_{\sigma_2(q)} E$, ce qui ne permet pas d'additionner $T(\sigma_1)(v)$ et $T(\sigma_2)(v)$ dans TE en tant qu'espace total du fibré vectoriel (TE, E, τ_E) afin d'avoir l'égalité $T(\sigma_1 + \sigma_2)(v) = T(\sigma_1)(v) + T(\sigma_2)(v)$, à laquelle il suffirait d'appliquer K pour obtenir $\nabla_v(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_v(\sigma_1) + \nabla_v(\sigma_2)$, sachant que $K : TE \longrightarrow E$ est un morphisme du fibré vectoriel (TE, E, τ_E) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de π...

Comment remédier à ce problème ?

Réponse : en considérant un fibré vectoriel d'espace total TE qui soit différent de (TE, E, τ_E) et tel que pour tous $v \in TN$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$ les éléments $T(\sigma_1)(v)$ et $T(\sigma_2)(v)$ de TE appartiennent à une même fibre (espace vectoriel) pour pouvoir être additionnés.

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

On se donne un fibré vectoriel (E, M, π).

Soient $S : E \times_M E \longrightarrow E$ (somme) et $c : E \longrightarrow E$ (symétrie centrale) les applications lisses définies par $S(x, y) \coloneqq x + y$ et $c(x) \coloneqq -x$.

Pour tous $(x, y) \in E \times_M E$, on a évidemment $\pi(x + y) = \pi(x) = \pi(y)$ et $\pi(-x) = \pi(x)$, ce qui s'écrit

$$\pi \circ S = \pi \circ \mathrm{proj}_1 = \pi \circ \mathrm{proj}_2 \qquad \text{et} \qquad \pi \circ c = \pi \, .$$

Considérons la sous-variété $TE \times_{TM} TE \coloneqq \{(\xi, \eta) \in TE \times TE \mid T\pi(\xi) = T\pi(\eta)\}$ (appelée le pullback de $(TE, TM, T\pi)$ par $T\pi$) de la variété lisse $TE \times TE$.

Proposition

On a $T(E \times_M E) = TE \times_{TM} TE$ *dans* $T(E \times E) = TE \times TE$.

En désignant par $k \geqslant 0$ le rang du fibré vectoriel (E, M, π), on remarque que $(TE, TM, T\pi, \mathbb{R}^{2k})$ est un fibré (*a priori* non vectoriel), ce qui conduit à munir TE de la loi interne $\boxplus : TE \times_{TM} TE \longrightarrow TE$ (somme) définie par

$$\xi \boxplus \eta \coloneqq TS(\xi, \eta) \, .$$

Pour chaque $u \in TM$, on note $(TE)_u \coloneqq (T\pi)^{-1}(u) = \bigcup_{x \in E_{\tau_M(u)}} \{\xi \in T_x E \mid T_x\pi \cdot \xi = u\}$ la fibre de $T\pi$ au-dessus de u.

Proposition

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- *Pour tous $u \in TM$ et $\xi, \eta \in (TE)_u$, on a* $\xi \boxplus \eta = \eta \boxplus \xi \in (TE)_u$.
- *L'application* $0_{T\pi} \coloneqq T0_\pi : TM \longrightarrow TE$ *vérifie* $T\pi \circ 0_{T\pi} = \mathrm{I}_{TM}$.
- *Pour tous $u \in TM$ et $\xi \in (TE)_u$, on a* $0_{T\pi}(u) \in (TE)_u$ *et* $\xi \boxplus 0_{T\pi}(u) = \xi$. ($0_{T\pi}(u)$ *est* le neutre *pour* $\boxplus$ *dans* $(TE)_u$)
- *Pour tous $u \in TM$ et $\xi \in (TE)_u$, on a* $Tc(\xi) \in (TE)_u$ *et* $\xi \boxplus Tc(\xi) = 0_{T\pi}(u)$. ($Tc(\xi)$ *est* l'opposé *de* ξ *pour* $\boxplus$ *dans* $(TE)_u$)

Soit $P : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ (produit externe) l'application lisse définie par $P(\lambda, x) \coloneqq \lambda x$.

Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a évidemment $\pi(\lambda x) = \pi(x)$, ce qui s'écrit

$$\pi \circ [P(\lambda, \cdot)] \;=\; \pi \;.$$

On munit TE de la loi externe $\boxdot : \mathbb{R} \times TE \longrightarrow TE$ (produit externe) définie par

$$\lambda \boxdot \xi \coloneqq T[P(\lambda, \cdot)](\xi) \;.$$

Proposition

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- *Pour tous $u \in TM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\xi \in (TE)_u$, on a $\lambda \boxdot \xi \in (TE)_u$.*
- *Pour chaque $u \in TM$, l'ensemble $(TE)_u$ est un espace vectoriel réel lorsqu'il est muni des lois $\boxplus$ et $\boxdot$.*

Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel

Tout ce qui précède permet finalement d'obtenir le résultat suivant.

Théorème

On a les propriétés suivantes :

- *Lorsqu'on munit TE des lois $\boxplus$ et $\boxdot$, le fibré $(TE, TM, T\pi, \mathbb{R}^{2k})$ devient un fibré vectoriel $(TE, TM, T\pi)$ qu'on appelle le fibré vectoriel dérivé de (E, M, π).*
- *En désignant par $\mathcal{A}$ un atlas vectoriel qui définit (E, M, π), l'ensemble $\{(TU, T\varphi) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ est un atlas vectoriel qui définit le fibré vectoriel dérivé $(TE, TM, T\pi)$ de (E, M, π).*

Bien que $T\pi : TE \longrightarrow TM$ soit un morphisme du fibré vectoriel (TE, E, τ_E) dans le fibré vectoriel (TM, M, τ_M) au-dessus de π, il est à noter que $\tau_E : TE \longrightarrow E$ n'est pas un morphisme du fibré vectoriel dérivé $(TE, TM, T\pi)$ de (E, M, π) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de τ_M.

On suppose ici qu'on a $(E, M, \pi) \coloneqq (TM, M, \tau_M)$ et on note $n \coloneqq \dim(M) \geqslant 1$.

Il y a alors un lien entre le fibré vectoriel dérivé $(T(TM), TM, T\tau_M)$ de (TM, M, τ_M) et le fibré tangent $(T(TM), TM, \tau_{TM})$ de TM qui est donné par le résultat suivant.

Théorème

Il existe une unique *application* $\kappa : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ *qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

- κ *est un isomorphisme du fibré tangent* $(T(TM), TM, \tau_{TM})$ *de* TM *sur le fibré vectoriel dérivé* $(T(TM), TM, T\tau_M)$ *de* (TM, M, τ_M) *au-dessus de* TM.
- $\kappa \circ \kappa = \mathrm{I}_{T(TM)}$. *($\kappa$ est involutive)*
- *Pour toute fonction lisse* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *on a* $[T(Tf)] \circ \kappa = T(Tf)$.

On l'appelle l'involution canonique du deuxième espace tangent $T(TM)$ *à* M.

Pour chaque carte (U, φ) sur M, on a $\kappa(T(TU)) = T(TU)$, et pour tout (x, y, a, b) dans $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a $[T(T\varphi)](\kappa([T(T\varphi)]^{-1}(x, y, a, b))) = (x, a, y, b)$.

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Soient (E, M, π) un fibré vectoriel et C une connexion d'Ehresmann sur (E, M, π) pour laquelle on note K le connecteur associé et $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ le fibré horizontal de (E, M, π) associé.

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- *Pour tout* $(\xi, \eta) \in TE \times_{TM} TE$, *on a* $\xi, \eta \in H \implies \xi \boxplus \eta \in H$.
- *Pour tout* $(\xi, \eta) \in TE \times_{TM} TE$, *on a* $C(\xi \boxplus \eta) = C(\xi) \boxplus C(\eta)$.
- *Pour tout* $(\xi, \eta) \in TE \times_{TM} TE$, *on a* $K(\xi \boxplus \eta) = K(\xi) + K(\eta)$.
- *Pour chaque variété lisse* N *et pour chaque application lisse* $h : N \longrightarrow M$, *l'application covariante* $\nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) \longrightarrow E$ *sur* (E, M, π) *le long de* h *associée à* C *vérifie* $\nabla_v(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_v(\sigma_1) + \nabla_v(\sigma_2)$ *pour tous* $v \in TN$ *et* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$.
- *Idem qu'au point précédent avec* $N \coloneqq M$ *et* $h \coloneqq \mathrm{I}_M$ *seulement.*

Lemme

Soient X, Y et Z des variétés lisses et $F : X \times Y \longrightarrow Z$ une application lisse. Pour tous $(x, y) \in X \times Y$ et $(u, v) \in T_xX \times T_yY$, on a

$$T_{(x,y)}F \cdot (u, v) \;=\; T_xF(\cdot\,, y) \cdot u \;+\; T_yF(x\,, \cdot) \cdot v \;.$$

Proposition

Pour tous $\lambda, t \in \mathbb{R}$, $x \in E$ et $\xi \in T_xE$, on a

$$T_{(\lambda,x)}P \cdot (t\,, \xi) \;=\; \Phi(\lambda x\,, t x) \;+\; \lambda \boxdot \xi \;.$$

Proposition

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- *Pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\xi \in H$, *on a* $\lambda \boxdot \xi \in H$.
- *Pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\xi \in TE$, *on a* $C(\lambda \boxdot \xi) = \lambda \boxdot C(\xi)$.
- *Pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\xi \in TE$, *on a* $K(\lambda \boxdot \xi) = \lambda K(\xi)$.
- *Pour chaque variété lisse* N *et pour chaque application lisse* $h : N \longrightarrow M$, *l'application covariante* $\nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) \longrightarrow E$ *sur* (E, M, π) *le long de* h *associée à* C *vérifie*
  $$\nabla_v(f\sigma) = f(q)\nabla_v(\sigma) + (T_q f \cdot v)\sigma(q) \qquad \textit{(règle de Leibniz)}$$
  pour tous $q \in N$, $v \in T_qN$, $f \in \mathrm{C}^\infty(N, \mathbb{R})$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N, E)$.
- *Idem qu'au point précédent avec* $N \coloneqq M$ *et* $h \coloneqq \mathrm{I}_M$ *seulement.*

Dérivation covariante associée à une connexion linéaire

Conséquence

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- *Pour chaque* $u \in TM$*, l'ensemble* $H \cap (TE)_u$ *est un sous-espace vectoriel de* $(TE)_u$ *pour les lois* $\boxplus$ *et* $\boxdot$*.*
- C *est un endomorphisme du fibré vectoriel dérivé* $(TE, TM, T\pi)$ *de* (E, M, π) *au-dessus de* TM *(on dit que* C *est* linéaire*).*
- K *est un morphisme du fibré vectoriel dérivé* $(TE, TM, T\pi)$ *de* (E, M, π) *dans le fibré vectoriel* (E, M, π) *au-dessus de* τ_M*.*
- *Pour chaque variété lisse* N *et pour chaque application lisse* $h : N \longrightarrow M$*, l'application covariante* $\nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) \longrightarrow E$ *sur* (E, M, π) *le long de* h *associée à* C *est une dérivation covariante sur* (E, M, π) *le long de* h*.*
- *Idem qu'au point précédent avec* $N \coloneqq M$ *et* $h \coloneqq \mathrm{I}_M$ *seulement.*

Plan de l'exposé

1. Connexions d'Ehresmann sur un fibré
2. Connexions d'Ehresmann sur un fibré vectoriel
3. Dérivations covariantes sur un fibré vectoriel
4. Application covariante associée à une connexion
5. Fibré vectoriel dérivé d'un fibré vectoriel
6. Dérivation covariante associée à une connexion linéaire
7. Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Soient (E, M, π) un fibré vectoriel et $\nabla : TM \times \Gamma(E) \longrightarrow E$ une dérivation covariante sur (E, M, π).

Supposons qu'il existe une connexion d'Ehresmann linéaire C sur (E, M, π) telle que ∇ soit associée à C.

En désignant par K le connecteur associé à C et par $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ le fibré horizontal de (E, M, π) associé à C, on a alors $H = \{\xi - C(\xi) \mid \xi \in TE\}$.

Or, étant donné $\xi \in TE$ et $\sigma \in \Gamma(E)$, le vecteur $v \coloneqq T\pi(\xi) \in TM$ vérifie $T\pi(T\sigma(v)) = v = T\pi(\xi)$ sachant qu'on a $\pi \circ \sigma = \mathrm{I}_M$, ce qui entraîne $T\pi(\xi - T\sigma(v)) = 0_\pi(\tau_M(v))$, c'est-à-dire $\eta \coloneqq \xi - T\sigma(v) \in V(E)$.

On a donc $\xi - C(\xi) = (\eta + T\sigma(v)) - C(\eta + T\sigma(v))$
$= (\eta + T\sigma(v)) - C(\eta) - C(T\sigma(v)) = \eta + T\sigma(v) - \eta - \Phi(\tau_E(T\sigma(v)), K(T\sigma(v)))$
$= T\sigma(v) - \Phi(\sigma(\tau_M(v)), \nabla_v(\sigma))$.

Il en résulte $H = \{T\sigma(v) - \Phi(\sigma(\tau_M(v)), \nabla_v(\sigma)) \mid v \in TM \text{ et } \sigma \in \Gamma(E)\}$.

Ceci nous amène à considérer l'ensemble

$$H \coloneqq \{T\sigma(v) - \Phi(\sigma(\tau_M(v)), \nabla_v(\sigma)) \mid v \in TM \text{ et } \sigma \in \Gamma(E)\} \subseteq TE$$

et à montrer que $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ est en fait un *fibré horizontal* de (E, M, π) avant d'étudier *le lien* entre ∇ et la connexion d'Ehresmann C sur (E, M, π) associée à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.

Pour chaque $x \in E$, posons $H_x \coloneqq H \cap T_x E$, ce qui donne

$$H_x = \{T_{\pi(x)}\sigma \cdot v - \Phi(x, \nabla_v(\sigma)) \mid$$
$$v \in T_{\pi(x)}M \text{ et } \sigma \in \Gamma(E) \text{ vérifiant } \sigma(\pi(x)) = x\} \subseteq T_x E.$$

Soient U un ouvert de M et $\theta \in \Gamma_{(\mathrm{I}_M)_{|U}}(U, E)$.

On se donne une partie compacte K de M et un ouvert V de M qui vérifient $V \subseteq K \subseteq U$ ainsi qu'une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle qu'on ait $f_{|V} = 1$ et $f_{|M \setminus K} = 0$.

Proposition

L'application $\sigma : M \longrightarrow E$ définie par $\sigma(q) \coloneqq f(q)\theta(q)$ pour $q \in U$ et $\sigma(q) \coloneqq 0_\pi(q)$ pour $q \in M \setminus U$ appartient à $\Gamma(E)$.

Ceci montre qu'il existe un *prolongement* σ de $\theta_{|V}$ à M qui est *dans* $\Gamma(E)$.

En désignant par $k \geqslant 1$ le rang du fibré vectoriel (E, M, π) et en posant $n := \dim(M) \geqslant 1$, on considère une *carte* $(U, \varphi = (t_1, \ldots, t_n))$ sur M et un *repère mobile* $\mathcal{F} = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ pour (E, M, π) au-dessus de U.

On note $\nabla^U : TU \times \Gamma(U, E) \longrightarrow E$ la dérivation covariante sur (E, M, π) *induite* par ∇ sur U.

Pour chaque $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, k]\!]$, les fonctions

$\Upsilon^1_{(i,j)}, \ldots, \Upsilon^k_{(i,j)} \in \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ définies par $\boxed{\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial t_i}(q)}(\omega_j) = \sum_{\ell=1}^{k} \Upsilon^\ell_{(i,j)}(q)\,\omega_\ell(q)}$

pour tout $q \in U$ s'appellent *les symboles de Christoffel* de ∇ sur U relatifs à (U, φ) et $\mathcal{F}$.

Étant donné $\sigma \in \Gamma(E)$, il existe une unique famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ d'éléments de $\mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ telle qu'on ait $\boxed{\sigma_{|U} = \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_k\omega_k}$.

D'autre part, étant donné $q \in U$ et $v \in T_qM$, il existe une unique famille $(b_1, \ldots, b_n)$ de nombres réels vérifiant $\boxed{v = b_1 \frac{\partial}{\partial t_1}(q) + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial t_n}(q)}$.

On obtient alors les expressions

$$\boxed{T_q\sigma \cdot v \; = \sum_{\ell=1}^{k} \Phi\Big(\alpha_\ell(q)\omega_\ell(q) \; , \; \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i\big(\tfrac{\partial}{\partial t_i} \cdot \alpha_\ell\big)(q)\Big]\omega_\ell(q)\Big) + \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell(q) \boxdot T_q\omega_\ell \cdot v}$$

et

$$\boxed{\nabla_v^U(\sigma_{|U}) \; = \sum_{\ell=1}^{k} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} b_i \Big[\big(\tfrac{\partial}{\partial t_i} \cdot \alpha_\ell\big) + \sum_{j=1}^{k} \Upsilon_{(i,j)}^{\ell} \alpha_j \Big](q) \Big\} \omega_\ell(q)}.$$

On en déduit un premier résultat.

Proposition (clé)

Pour tous $q \in U$, $v \in T_q M$ et $\sigma \in \Gamma(E)$, on a l'implication

$$\Big(\sigma(q) = 0_\pi(q) \text{ et } \nabla_v(\sigma) = 0_\pi(q)\Big) \implies T_q\sigma \cdot v = 0_{\tau_E}(\sigma(q)) .$$

Il en résulte que pour tous $q \in U$, $v \in T_q M$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ qui vérifient $\sigma_1(q) = \sigma_2(q)$ et $\nabla_v(\sigma_1) = \nabla_v(\sigma_2)$ on a $T_q(\sigma_1) \cdot v = T_q(\sigma_2) \cdot v$.

Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

On a en outre le résultat important qui suit.

Théorème (clé)

Il existe un ouvert V de M contenu dans U et une famille $(\sigma_x)_{x\in\pi^{-1}(V)}$ d'éléments de $\Gamma(E)$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- *Pour tout $x \in \pi^{-1}(V)$, on a $\sigma_x(\pi(x)) = x$.*
- *Pour tous $x \in \pi^{-1}(V)$ et $v \in T_{\pi(x)}M$, on a $\nabla_v(\sigma_x) = 0_\pi(\pi(x))$.*
- *L'application $\begin{array}{rcl} \pi^{-1}(V)\times M & \longrightarrow & E \\ (x,q) & \longmapsto & \sigma_x(q) \end{array}$ est lisse.*

D'après l'expression de ∇_v^U ci-dessus, les deux premiers points signifient que pour chaque $(i,\ell) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,k]\!]$ on a $\alpha_\ell^x(\pi(x)) = x_\ell$ et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\cdot\alpha_\ell^x\right)(\pi(x)) \;=\; -\sum_{j=1}^{k}\Upsilon_{(i,j)}^{\ell}(\pi(x))\,x_j \quad \text{pour tout } x\in\pi^{-1}(V)$$

en écrivant $x = x_1\omega_1 + \cdots + x_k\omega_k$ et $(\sigma_x)_{|U} = \alpha_1^x\omega_1 + \cdots + \alpha_k^x\omega_k$.

Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Fixons donc un ouvert V de M contenu dans U et une famille $(\sigma_x)_{x \in \pi^{-1}(V)}$ d'éléments de $\Gamma(E)$ qui vérifient les propriétés du théorème clé ci-dessus.

Pour chaque $x \in \pi^{-1}(V)$, on a alors $\boxed{H_x = T_{\pi(x)}(\sigma_x) \cdot (T_{\pi(x)} M)}$ d'après la proposition clé ci-dessus, ce qui prouve que H_x est un *sous-espace vectoriel* de $T_x E$.

De plus, comme on a $T\pi \circ T(\sigma_x) = T(\pi \circ \sigma_x) = T(\mathrm{I}_M) = \mathrm{I}_{TM}$, l'application tangente $T(\sigma_x) : TM \longrightarrow TE$ de $\sigma_x : M \longrightarrow E$ est injective, et par suite $T_{\pi(x)}(\sigma_x) : T_{\pi(x)} M \longrightarrow T_x E$ est *injective*, ce qui donne le résultat suivant.

Proposition

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- *La dimension de H_x est égale à $\dim(M)$.*
- *On a $H_x \cap V_x(E) = \{0_{T_E}(x)\}$.*
- *On a $H_x \oplus V_x(E) = T_x E$.*

Connexion linéaire associée à une dérivation covariante

Enfin, en notant $H_V \coloneqq H \cap T(\pi^{-1}(V))$ et en considérant l'application $\kappa : T(\pi^{-1}(V)) \longrightarrow \pi^{-1}(V)$ définie par $\kappa(\xi) \coloneqq \tau_E(\xi)$, on obtient le résultat suivant grâce au troisième point du théorème clé ci-dessus.

Proposition

Le triplet $(H_V\,,\,\pi^{-1}(V)\,,\,\kappa_{|H_V})$ est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent $(T(\pi^{-1}(V))\,,\,\pi^{-1}(V)\,,\,\kappa)$ de l'ouvert $\pi^{-1}(V)$ de E.

Conséquence

Le triplet $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ est un fibré horizontal de (E, M, π) qui est dit associé à ∇.

Définition

La connexion d'Ehresmann C sur (E, M, π) associée à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ est dite associée à ∇.

À présent, étant donné $(\xi, \eta) \in T(E \times_M E) = TE \times_{TM} TE$, posons $x \coloneqq \tau_E(\xi) \in E$, $y \coloneqq \tau_E(\eta) \in E$, $q \coloneqq \pi(x) = \pi(y) \in M$ et $v \coloneqq T_x\pi \cdot \xi = T_y\pi \cdot \eta \in T_qM$.

Si q appartient à V et si ξ et η appartiennent H, alors on a

$$\xi = T_q(\sigma_x)\cdot v \in H_x \qquad \text{et} \qquad \eta = T_q(\sigma_y)\cdot v \in H_y \ ,$$

ce qui entraîne $\xi \boxplus \eta = T_{(x,y)}S\cdot(\xi, \eta)$ $= T_{(\sigma_x(q)\,,\,\sigma_y(q))}S\cdot(T_q(\sigma_x)\cdot v \ ,\ T_q(\sigma_y)\cdot v)$ $= T_{(\sigma_x(q)\,,\,\sigma_y(q))}S\cdot[T_q(\sigma_x\,,\sigma_y)\cdot v] = T_q[S\circ(\sigma_x\,,\sigma_y)]\cdot v$ $= T_q(\sigma_x + \sigma_y)\cdot v$.

En outre, comme on a $\nabla_v(\sigma_x) = 0_\pi(q)$ et $\nabla_v(\sigma_y) = 0_\pi(q)$, il vient $\nabla_v(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla_v(\sigma_x) + \nabla_v(\sigma_y) = 0_\pi(q)$, ce qui donne $\xi \boxplus \eta \in H_{x+y}$.

Par ailleurs, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \boxdot \xi = T_x[P(\lambda,\cdot)]\cdot\xi$ $= T_{\sigma_x(q)}[P(\lambda,\cdot)]\cdot(T_q(\sigma_x)\cdot v) = T_q[P(\lambda,\cdot)\circ\sigma_x]\cdot v$ $= T_q(\lambda\sigma_x)\cdot v$ et $\nabla_v(\lambda\sigma_x) = \lambda\nabla_v(\sigma_x) = 0_\pi(q)$, ce qui donne $\lambda \boxdot \xi \in H_{\lambda x}$.

Proposition

La connexion d'Ehresmann C sur (E, M, π) associée à ∇ est linéaire.

Désignons par $\overline{\nabla} : TM \times \Gamma(E) \longrightarrow E$ la dérivation covariante sur (E, M, π) associée à C et par $(\underline{H}, E, (\tau_E)_{|\underline{H}})$ le fibré horizontal de (E, M, π) qui est associé à $\overline{\nabla}$.

On a alors $\underline{H} \coloneqq \{T\sigma(v) - \Phi(\sigma(\tau_M(v))\,,\,\overline{\nabla}_v(\sigma)) \mid v \in TM \text{ et } \sigma \in \Gamma(E)\}$.

Or, pour tous $\xi \in TE$ et $\sigma \in \Gamma(E)$, le vecteur $v \coloneqq T\pi(\xi) \in TM$ vérifie $\xi - C(\xi) = T\sigma(v) - \Phi(\sigma(\tau_M(v))\,,\,\overline{\nabla}_v(\sigma))$ d'après les calculs faits ci-dessus dans la sous-section « Condition nécessaire ».

Il en résulte qu'on a $\underline{H} = \{\xi - C(\xi) \mid \xi \in TE\} = H$.

Étant donné $x \in E$, l'égalité $\underline{H}_x = H_x$ entraîne alors que pour chaque $(v, \sigma) \in T_{\pi(x)}M \times \Gamma(E)$ vérifiant $\sigma(\pi(x)) = x$ il existe $(u, \theta) \in T_{\pi(x)}M \times \Gamma(E)$ tel qu'on ait $\theta(\pi(x)) = x$ et

$$T_{\pi(x)}\sigma \cdot v - \Phi(x\,,\,\nabla_v(\sigma)) = T_{\pi(x)}\theta \cdot u - \Phi(x\,,\,\overline{\nabla}_u(\theta)) \in T_x E\ .$$

En désignant par $K : TE \longrightarrow E$ le connecteur associé à C, on a $K(\Phi(x, y)) = y$ pour tout $y \in E_{\pi(x)}$, d'où il découle

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_v(\sigma) - \nabla_v(\sigma) &= K(T_{\pi(x)}\sigma \cdot v) - K(\Phi(x\,,\nabla_v(\sigma)))\\ &= K(T_{\pi(x)}\sigma \cdot v - \Phi(x\,,\nabla_v(\sigma))) = K(T_{\pi(x)}\theta \cdot u - \Phi(x\,,\overline{\nabla}_u(\theta)))\\ &= K(T_{\pi(x)}\theta \cdot u) - K(\Phi(x\,,\overline{\nabla}_u(\theta))) = \overline{\nabla}_u(\theta) - \overline{\nabla}_u(\theta) = 0_\pi(\pi(x))\end{aligned}$$

par définition de $\overline{\nabla}$ et sachant que K est un morphisme du fibré vectoriel (TE, E, τ_E) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de π.

Il en résulte qu'on a $\overline{\nabla} = \nabla$.

Quelques références

GODBILLON Claude
Géométrie différentielle et mécanique analytique
Hermann, 1969.

MICHOR Peter
Topics in differential geometry
https://www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.pdf, 2008.
American Mathematical Society, 2008.

WALSCHAP Gerard
Metric structures in differential geometry
Springer, 2004.