

GDR GDM – La Rochelle, 24-27 Juin 2025

# CINÉMATIQUE DES MILIEUX GÉNÉRALISÉS ET REPÈRES MOBILES

**Clément ECKER, Boris KOLEV, Rodrigue DESMORAT**

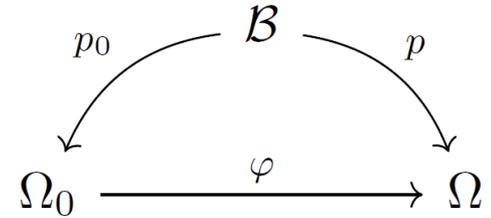
*Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay,  
91190, Gif-sur-Yvette, France. [clement.ecker@ens-paris-saclay.fr](mailto:clement.ecker@ens-paris-saclay.fr)*

# Qu'est-ce qu'un milieu généralisé ?

## ■ Mécanique (de Cauchy) non linéaire en grandes déformations [Truesdell, 1965] :

- Le **body**  $\mathcal{B}$  abstrait (labels des particules) ;
- Une **configuration**  $\Omega$  est l'image du body par un **plongement**  $p$  dans l'espace euclidien  $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$  ;
- Pour deux configurations  $\Omega_0$  (référence) et  $\Omega$  (déformée) on définit  $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  la **transformation** ;
- Son application linéaire tangente  $\mathbf{F}$  est le **gradient de la transformation** ;
- On suppose qu'il existe une **énergie libre**  $\mathcal{W}$  avec une densité spécifique  $\psi$  du **premier gradient** en  $\varphi$  :

$$\mathcal{W}[\varphi] = \int_{\Omega_0} \rho_0 \psi(\varphi, T\varphi = \mathbf{F}) \text{vol}_{\mathbf{q}}$$



## ■ Un milieu généralisé a une densité d'énergie libre dépendant d'autres quantités [Forest, 2006] :

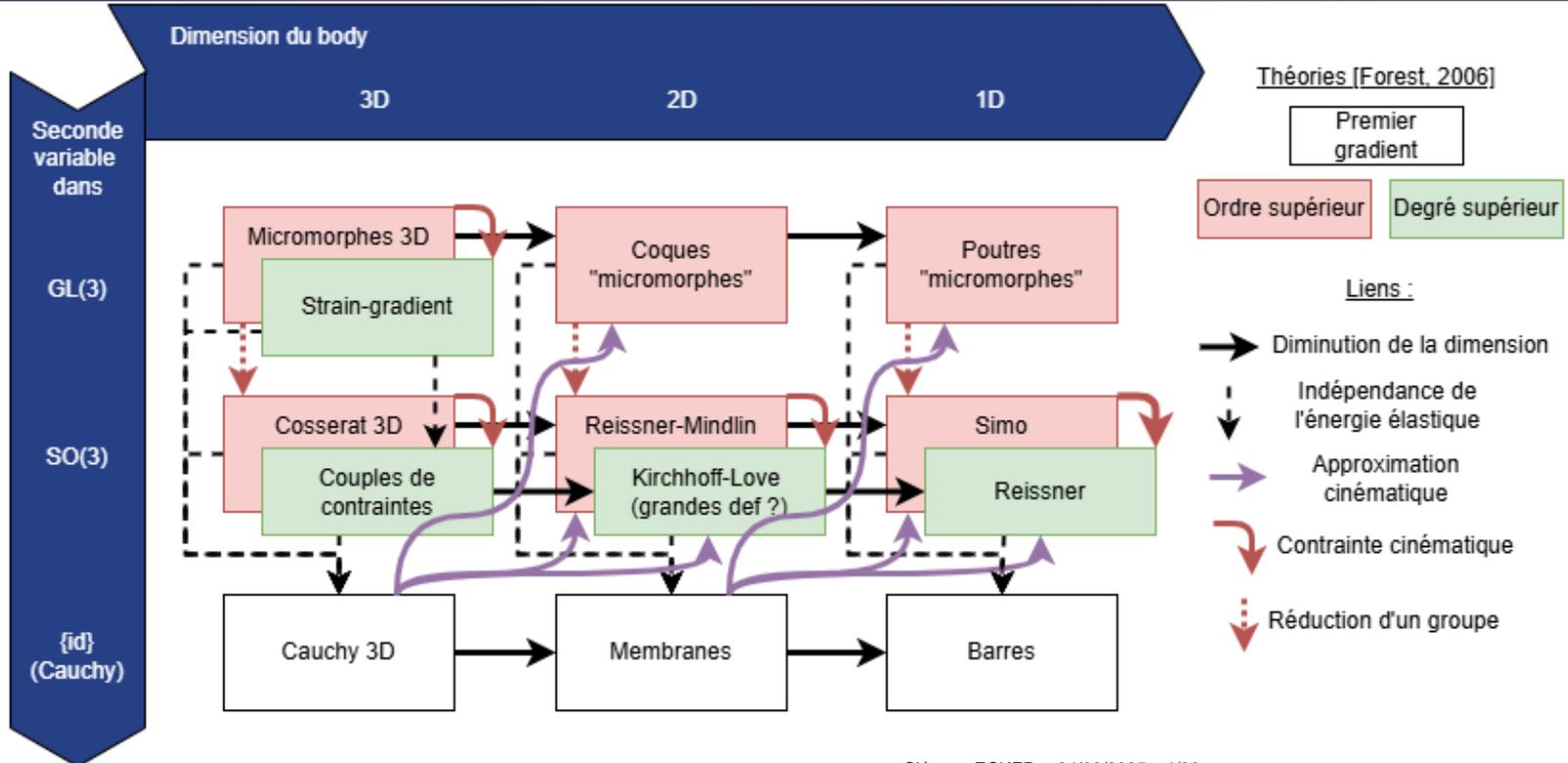
- D'un champ matriciel  $\chi$ , la **micro-déformation**, et son gradient  $\rightarrow$  **Milieux micromorphes** ou milieux *d'ordre supérieurs* ;
- Du second gradient de  $\varphi$ ,  $\nabla \mathbf{F} \rightarrow$  **Milieux du second gradient** ou milieux de *degrés supérieurs* ;
- Ses familles regroupent de très nombreux sous modèles (ex : Cosserat  $\rightarrow \chi$  est une rotation) ;
- Les milieux du second gradient peuvent être déduit de milieux micromorphes (ex : Strain-gradient  $\chi = \mathbf{F}$  alors  $\nabla \chi = \nabla \mathbf{F}$ ).

# Problématique

## ■ Approche géométrique intrinsèque et systématique de la cinématique des milieux généralisés :

- Définition des configurations généralisées par des repères (mobiles) au sens de [Cosserat, 1909] ;
- Pas de prise en compte de défaut [Epstein, 2007] [Yavari, 2012] [Crespo, 2024] ;
- Définition intrinsèque et géométrique de la micro-déformation  $\chi$  [Eringen, 1999] ;
- Décrire géométriquement les liens entre les théories d'ordre supérieur (micromorphes) [Eringen, 1999] ;
- Doit se décliner **de la même manière entre les milieux 1D, 2D et 3D** [Boyer, 2017].

# Liens entre les théories



# Sommaire

- **Introduction**
- **Configurations généralisées**
  - Repères mobiles
  - Configurations généralisées
- **Transformation généralisée**
  - Transformation généralisée
  - Définition géométrique de la micro-déformation
- **Classification**
  - Milieux 3D
  - Poutres et Coques
- **Conclusion**

# Configuration généralisées

## - Repères mobiles [Cartan, 1935]

■ Un **repère ponctuel**  $R_X$  en un **point**  $X$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  est soit :

- Une base non-orthonormale  $(v_i)$  de l'espace tangent  $T_X\mathcal{E}$  en  $X$  ;
- Un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $T_X\mathcal{E}$  ;

$$v_1 := R_X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := R_X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := R_X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ **Fibré des repères**  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$  :

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcup_{X \in \mathcal{E}} \{R_X \text{ repère ponctuel en } X \in \mathcal{E}\}$$

■ La **projection canonique**  $\pi$  associe à un repère  $R_X$  son origine  $X$  ;

$\pi^{-1}(X)$  est l'ensemble des **repères ponctuels**  $R_X$  au **point**  $X$  (*fibres au dessus de*  $X$ )

■ Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_X$  (*section* du fibré des repères)

- $R^{\text{can}}$  le **repère (mobile) canonique** de  $\mathcal{E} \approx \mathbb{R}^3$ ,  $R^{\text{can}}: X \rightarrow (e_1, e_2, e_3)$

■ **Action à droite** du **groupe structural** des transformations inversibles  $A \in GL_3(\mathbb{R})$  :

$$R_X A := R_X \circ A \in \pi^{-1}(X)$$

# Configuration généralisées

## - Repères mobiles [Cartan, 1935]

- Un **repère ponctuel**  $R_X$  en un **point**  $X$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  ;
- **Fibré des repères**  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ ;
- La **projection canonique**  $\pi$  associe à un repère  $R_X$  son origine  $X$  ;
- **Action à droite** du **groupe structural** des transformations inversibles  $\mathbf{A} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  :  $R_X \mathbf{A} := R_X \circ \mathbf{A} \in \pi^{-1}(X)$
- Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{E})$  (section du fibré des repères)

- **Trivialisation** du fibré des repères  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$  :

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

$$R_X \rightarrow (X, \mathbf{G})$$

- **L'action à droite** s'écrit alors :

$$R_X \mathbf{A} \rightarrow (X, \mathbf{G}\mathbf{A})$$

$\mathbf{G}$  est la **matrice de changement de base** entre  $R_X$  et  $R^{\text{can}}$

# Configuration généralisées

■ Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_x$

■ Une **configuration généralisée**  $\mathcal{K}$  est un **repère mobile** sur la **configuration**  $\Omega$  (classique) de la **fibre neutre** [Cosserat, 1909]

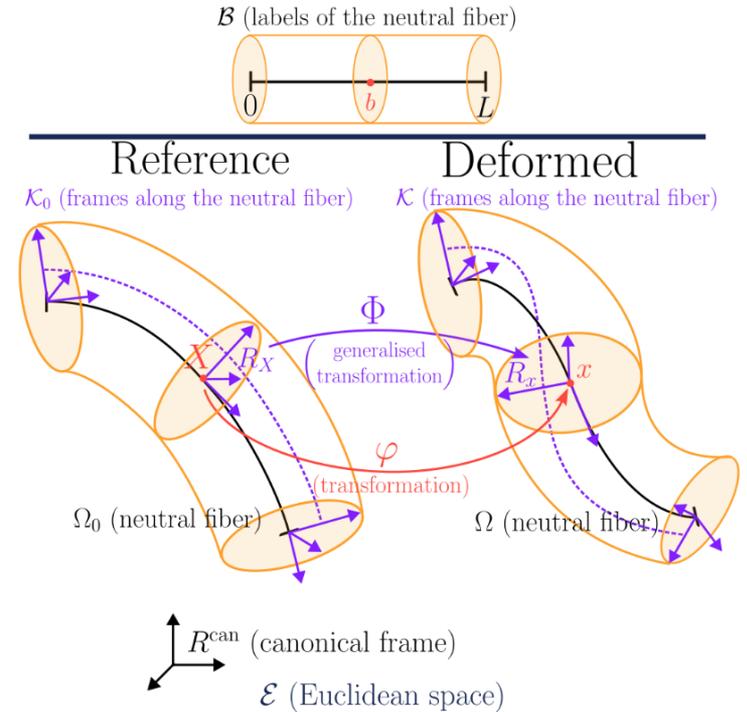
- $\mathcal{B} = [0, L]$  est le **body** (label des particules) ;
- $p: \mathcal{B} \rightarrow \Omega$  est le **plongement (classique)** des **origines des repères** ;
- $P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{K}$  est le « **plongement** » **généralisé**.

■ Configurations de **référence** :

- Généralisée  $\mathcal{K}_0$  / classique  $\Omega_0$

■ Configurations **déformées** :

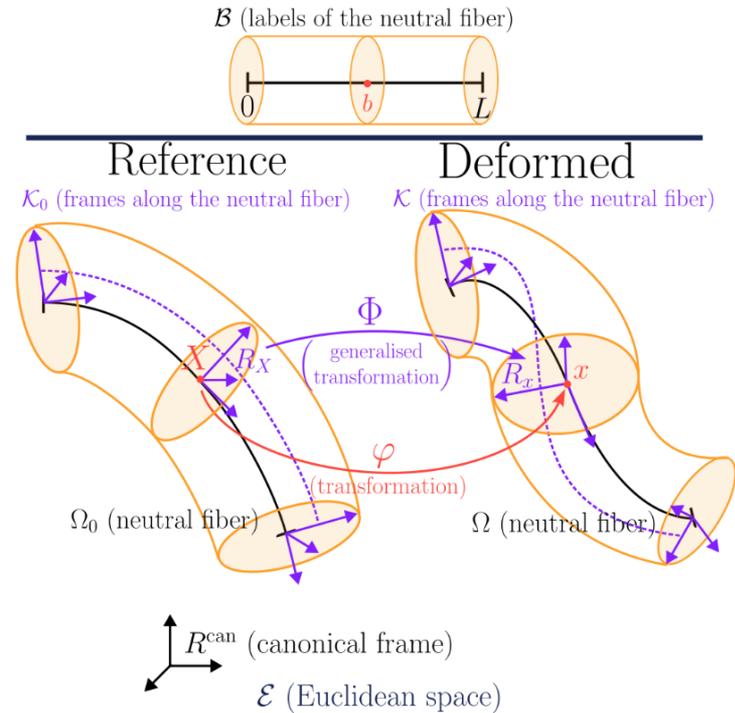
- Généralisée  $\mathcal{K}$  / classique  $\Omega$



# Configuration généralisées

## - Définition par le « plongement » généralisé

- Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_X$
  - Une **configuration généralisée**  $\mathcal{K}$  est un **repère mobile** sur la **configuration**  $\Omega$  (classique) de la **fibre neutre**
- 
- Le « **plongement** » **généralisé**  $P$  est un repère mobile le long d'un plongement  $p$  du body  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$  ;
  - Par conséquent, le « **plongement** » **généralisé** est une **immersion** injective et lisse de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ , i.e. ;
    - Lisse, injective et son application linéaire tangente est injective.
  - Un milieu généralisé est une description (plus fine) de la matière continue par des **configurations généralisées** :
    - Elle contient les **milieux de Cauchy** car elle décrit le plongement des **origines des repères**.



# Transformation généralisée

- Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_X$
- Une **configuration généralisée**  $\mathcal{K}$  est un **repère mobile** sur la **configuration**  $\Omega$  (classique) de la **fibres neutre**

- La **transformation généralisée**  $\Phi$  :

- Envoie les repères de  $\mathcal{K}_0$  sur les repères de  $\mathcal{K}$  ;
- L'image de tout repères sur la fibre neutre peut être déduit par :

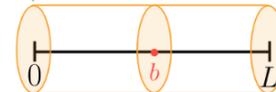
$$\Phi(R_X \mathbf{A}) = \Phi(R_X) \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in GL_3(\mathbb{R})$$

- $\Phi$  contient aussi la **transformation**  $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  de la fibre neutre

- Si  $R_X$  est un repère en  $X$  de  $\Omega_0$  ;
- Alors  $\Phi(R_X)$  est un repère en  $\varphi(X)$  de  $\Omega$ .

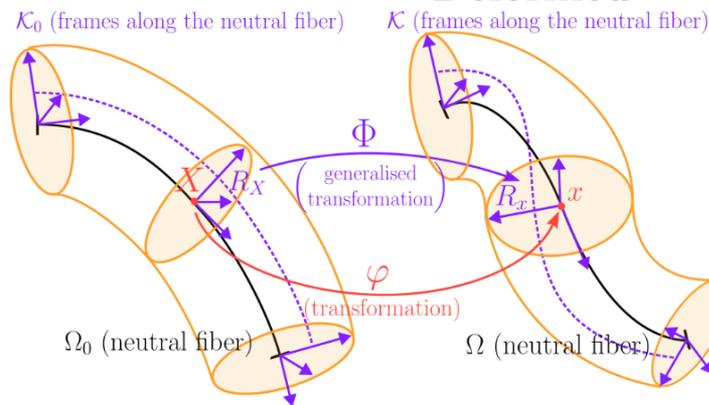
- Existe et est unique entre deux configurations généralisées.

$\mathcal{B}$  (labels of the neutral fiber)



Reference

Deformed



$R^{\text{can}}$  (canonical frame)

$\mathcal{E}$  (Euclidean space)

# Transformation généralisée

## - Définition géométrique de la micro-déformation

■ La **transformation généralisée**  $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$

■ La **transformation généralisée** induit une **transformation entre les espaces tangents** des configurations classiques **différente** de  $\mathbf{F} = T\varphi$  :

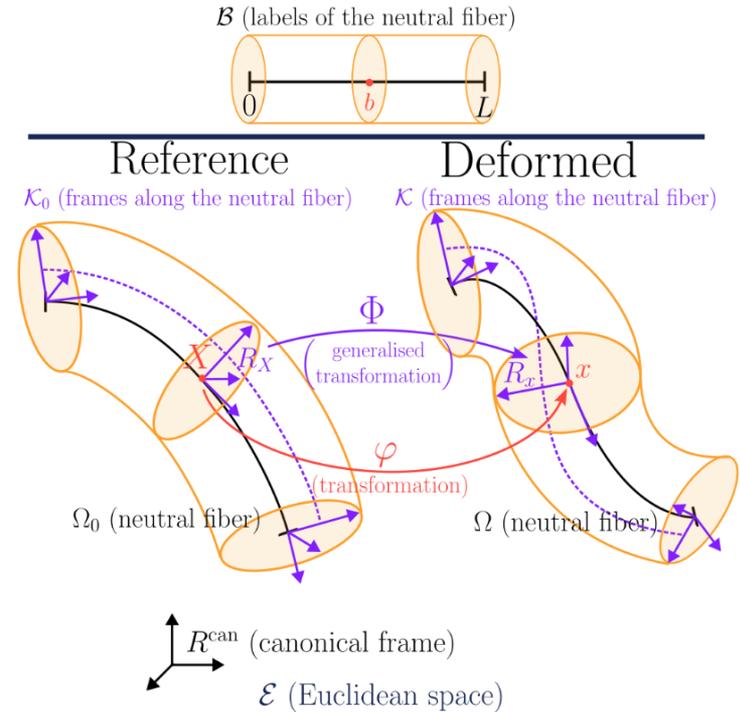
- La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X\mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$  [Eringen, 1999] ;
- Pour  $R_X$  un repère en  $X \in \Omega_0$  :  $\chi_X := \Phi(R_X)R_X^{-1}$

■ Sa **représentation matricielle**  $[\chi_X]$  dans le repère  $R^{\text{can}}$  :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} X \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} x = \varphi(X) \\ \mathbf{g} = [\chi_X]\mathbf{G} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[\chi_X] = R^{\text{can}}(x)^{-1} \chi_X R^{\text{can}}(X)$$

■  $[\chi_X]$  et  $\chi_X$  sont en général confondus.



# Synthèse

## ■ Un milieu généralisé est une description (plus fine) de la matière continue par des configurations généralisées :

- Par un « plongement » généralisé  $P$  : un repère mobile le long d'un plongement  $p$  du body  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$  ;
- Par la transformation généralisée  $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$  qui :
  - Envoie les repères de la configuration généralisée de référence  $\mathcal{K}_0 := P_0(\mathcal{B})$  sur ceux de la configuration généralisée déformée  $\mathcal{K} := P(\mathcal{B})$  ;
  - Envoie **tout** les repères sur la configuration de référence  $\Omega_0$  sur ceux de la configuration déformée  $\Omega$  par :  $\Phi(R_X \mathbf{A}) = \Phi(R_X) \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  ;
  - Contient la transformation (classique)  $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  car elle décrit la transformation des origines des repères.
- Par la définition géométrique de la micro-déformation  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  :
  - Induite par la transformation généralisée :  $\chi_X := \Phi(R_X) R_X^{-1}$ ,  $R_X \in \pi^{-1}(X)$  ;
  - Et sa représentation matricielle  $[\chi_X] := R^{\text{can}}(\varphi(X))^{-1} \chi_X R^{\text{can}}(X)$ .

# Classification des milieux généralisés

## - Des sous familles diverses : exemple des poutres

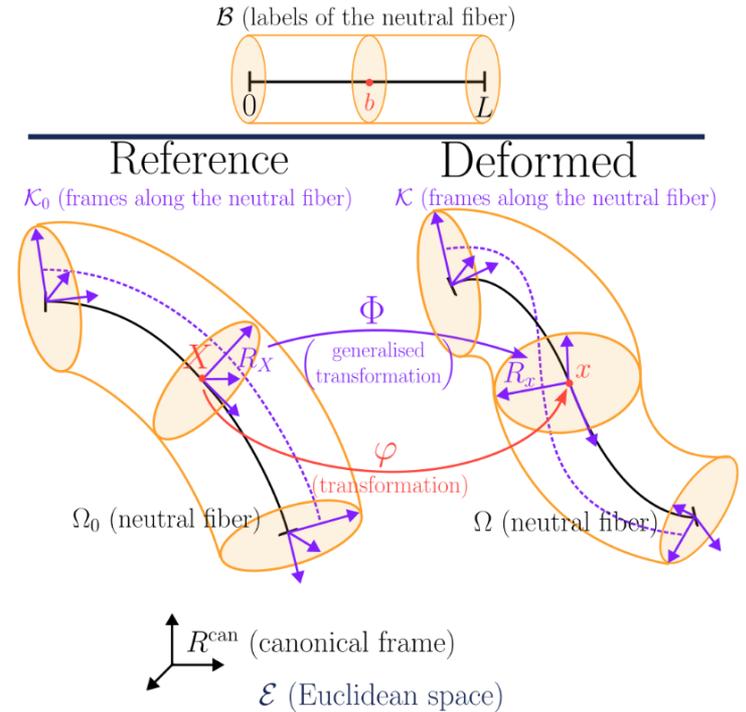
■ La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X\mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$  ;

■ Poutres de Reissner/Cosserat (Timoshenko) :

- Les sections (des poutres) restent **rigides** ->  $[\chi_X]$  est une rotation ( $SO(3)$ ) ;
- Les **configurations généralisées** sont les **repères mobiles orthonormés** ( $\mathcal{SO}(\mathcal{E})$ ).

■ Poutres de Simo (Euler-Bernouilli) :

- Les sections (des poutres) restent perpendiculaires à la fibre neutre ;
- Lien entre le **gradient de la transformation**  $\mathbf{F}$  et la **micro-déformation**  $\chi_X$ .



# Classification des milieux généralisés

## - Milieux 3D micromorphes

■ La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

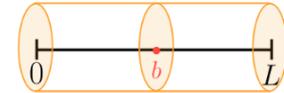
■ Pour  $H$  un sous groupe fermé de  $GL_3(\mathbb{R})$  :

- S'il existe un **ensemble de repères** sur lequel toute paire de repères mobiles est reliée par une unique **fonction de transition** lisse à valeurs dans  $H$  ;
- Alors les **configurations généralisées** sont données par ces repères et  $[\chi_X] \in H$  ;
- Possible si  $H$  est le groupe de symétrie d'un tenseur défini sur  $\mathcal{E}$  [Kobayashi, 1995].

■ La **réduction du groupe structural** donne une famille de théories micromorphes :

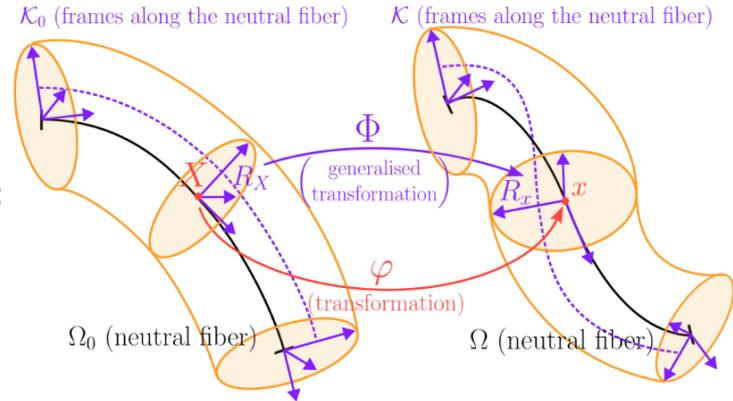
Milieu micromorphe	Groupe $H$
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$\mathbb{R} \times SO(3)$
Cosserat [Cosserat, 1909]	$SO(3)$
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}$
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$

$\mathcal{B}$  (labels of the neutral fiber)



Reference

Deformed



$R^{\text{can}}$  (canonical frame)

$\mathcal{E}$  (Euclidean space)

# Classification des milieux généralisés

## - Milieux 3D du second gradient

■ La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

■ Par **contraintes cinématiques** entre  $\chi_X$  et **F (gradient de la transformation)** :

●  $\chi_X = \mathbf{F}$  donne la théorie du « Strain-gradient ».

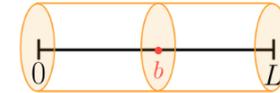
■ On obtient d'autres théories avec la **réduction du groupe structural** et la décomposition polaire (RU)

● Entre  $[\chi_X]$  et la représentation matricielle de **F** ;

$$\begin{aligned} O(3) \times S_3^+(\mathbb{R}) &\rightarrow GL_3(\mathbb{R}) \\ (\mathbf{R}, \mathbf{U}) &\mapsto \mathbf{RU} \end{aligned}$$

Milieu micromorphe	Groupe $H$	Milieu du second gradient contraint
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$	"Strain-gradient"
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$\mathbb{R} \times SO(3)$	-
Cosserat [Cosserat, 1909]	$SO(3)$	Couples de contraintes
Micro-dilatations	$\mathbb{R}$	-
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$	-

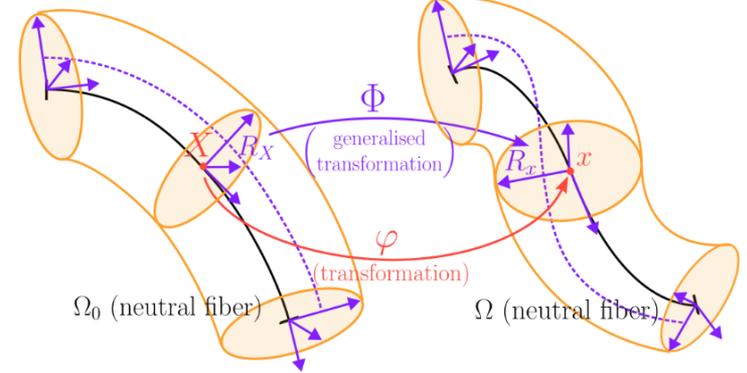
$\mathcal{B}$  (labels of the neutral fiber)



Reference

Deformed

$\mathcal{K}_0$  (frames along the neutral fiber)     $\mathcal{K}$  (frames along the neutral fiber)



$R^{\text{can}}$  (canonical frame)

$\mathcal{E}$  (Euclidean space)

# Classification des milieux généralisés

## - Poutres

- La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X\mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$  ;

- Une **configuration 3D**  $\tilde{\Omega}$  d'une **poutre** est donnée par :

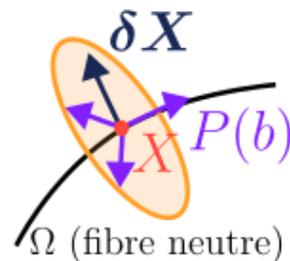
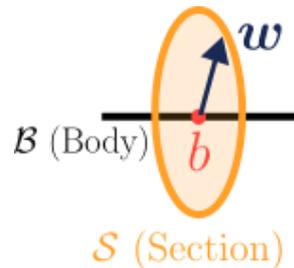
$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (b, w) &\rightarrow p(b) + P(b) \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = X + \delta X \end{aligned}$$

- La **section de la poutre**  $\mathcal{S}$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ) ;
- $P, p$  les « plongements » **généralisé** et **classique** ;
- $P(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  doit être tangent à la fibre neutre  $\Omega$ .

- La **transformation 3D**  $\tilde{\varphi}$  s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \quad \tilde{\Omega}_0 &\rightarrow \tilde{\Omega} \\ X + \delta X &\rightarrow \varphi(X) + \chi_X \delta X \end{aligned}$$

- $\delta X$  est l'**unique vecteur** positionnant un point de l'espace relativement au barycentre de la section en  $X = p_0(b)$ .



# Classification des milieux généralisés

## - Coques

- La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

- Une **configuration 3D**  $\tilde{\Omega}$  d'une **coque** est donnée par :

$$\mathcal{B} \times \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E}$$

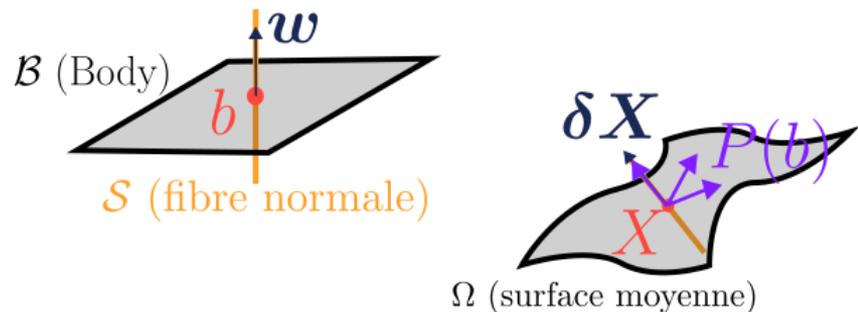
$$(b, w) \rightarrow p(b) + P(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X + \delta X$$

- La **fibre normale**  $\mathcal{S}$  de la plaque (dans  $\mathbb{R}^3$ ) ;  $\mathcal{W}$
- $P, p$  les plongements « généralisé » et classique ;
- $P(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $P(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  doivent être tangents à la surface moyenne  $\Omega$ .

- La **transformation 3D**  $\tilde{\varphi}$  s'exprime alors :

$$\tilde{\varphi}: \begin{matrix} \tilde{\Omega}_0 & \rightarrow & \tilde{\Omega} \\ X + \delta X & \rightarrow & \varphi(X) + \chi_X \delta X \end{matrix}$$

- $\delta X$  est l'**unique vecteur** positionnant un point de l'espace relativement au centre de la fibre normale en  $X = p_0(b)$ .



# Classification des milieux généralisés

## - Poutres et Coques

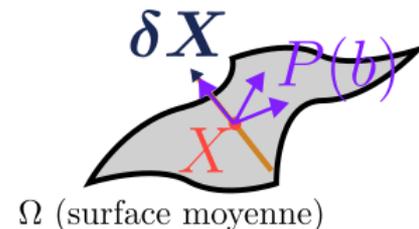
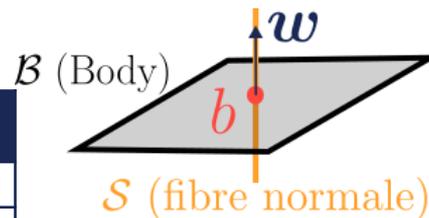
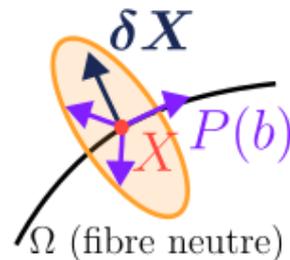
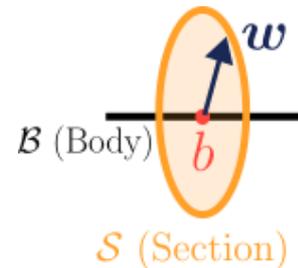
■ La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

■ Une **configuration 3D**  $\tilde{\Omega}$  donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (b, w) &\rightarrow p(b) + P(b)(\tilde{w}) = X + \delta X \end{aligned}$$

■ La taille et la forme de  $\mathcal{S}$  imposent des restrictions sur les **configurations 3D** possible pour éviter l'**auto-intersection** ;

■ En utilisant les résultats de **réduction structurale** et de **contraintes cinématique** on obtient les théories suivantes :



Milieu 3D	Coque	Poutre	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe [Eringen, 1999]	-	-	Uniformément déformées
Cosserat [Cosserat, 1909]	Reissner-Mindlin	Simo	Rigides
Couples de contraintes	Kirchhoff-Love	Reissner	Orthogonale à la fibre neutre
Cauchy	Membranes	Barres	Pas de résistance en flexion

# Conclusion

- Un milieu généralisé est une description (plus fine) de la matière continue par des **configurations généralisés** :
  - Par un « **plongement** » généralisé  $P$  : un **repère mobile** le long d'un plongement  $p$  du body  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$  ;
  - Par la **transformation généralisé**  $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$  ;
  - Par la définition géométrique de la **micro-déformation**  $\chi_x: T_x \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathcal{E}$  ;
- Les (sous) modèles **micromorphes** et du **second gradient** sont obtenus :
  - Pour les milieux du **second gradient** : par contraintes sur  $\chi_x$  avec **F (gradient de la transformation)** ;
  - Pour les milieux **micromorphes** : par une réduction du groupe structural ;
    - ▮ Exemple pour les milieux de Cosserat : repères orthonormés,  $[\chi_x] \in SO(3)$
- Pour les **coques** et **poutres** on peut construire un **plongement 3D** à partir des « **plongements** » généralisés.

# Références

- [Truesdell, 1965] : Truesdell and Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Springer
- [Forest, 2006] : Forest, *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*, Mines de Paris
- [Eringen, 1999] : Eringen, *Microcontinuum Field Theories*, Springer
- [Boyer, 2017] : Boyer and Renda, *Poincaré's Equations for Cosserat Media: Application to Shells*, Journal of Nonlinear Science
- [Kröner, 1968] : Kröner, *Mechanics of Generalized Continua : [...]*, IUTAM Symposium
- [Cosserat, 1909] : Cosserat et Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et fils
- [Epstein, 2007] : Epstein and Elzanowski, *Material inhomogeneities and their evolution: a geometric approach*, Springer
- [Yavari, 2012] : Yavari and Gorieli, *Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- [Cartan, 1935] : Cartan, *La méthode du repère mobile*, Actualités scientifiques et industrielles
- [Kobayashi, 1995] : Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer