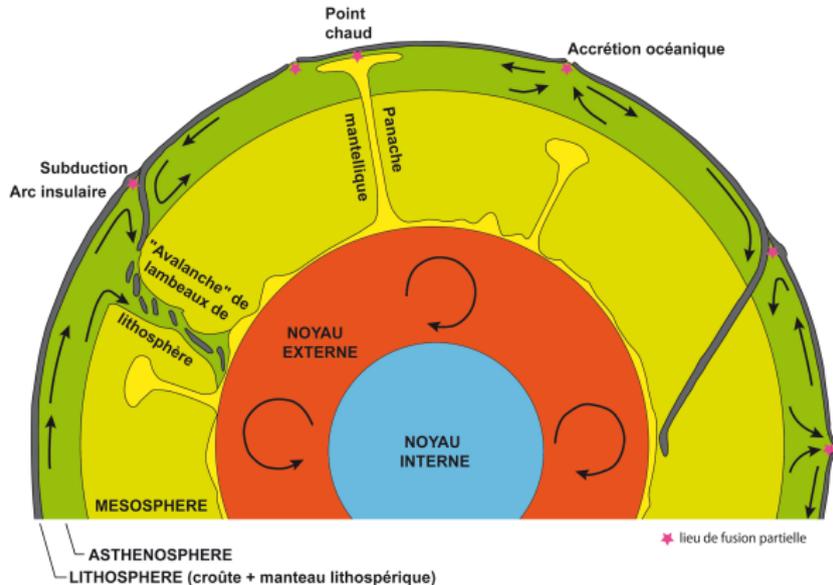


Le spectre des oscillations gravito-élastiques de la Terre : Une invitation à l'étude d'une classe de problèmes spectraux

Bernard Valette

ISTerre, Universités Savoie-Mont-Blanc et Grenoble-Alpes

21 Novembre 2024 et 26 Juin 2025
IRCAM Paris et Université de La Rochelle



rayon moyen 6371.23 km, densité moyenne $\simeq 5.51$
rayon de la graine (ICB) $\simeq 1215$ km, rayon du noyau (CMB) 3481 km
densité 3.3 \rightarrow 5.6 (CMB) 10.0 \rightarrow 12.1 (ICB) 12.7 \rightarrow 13.1
vitesse-P 8.0 \rightarrow 13.6 (CMB) 8.1 \rightarrow 10.4 (ICB) 11.0 \rightarrow 11.2 (km/s)

Configuration de référence en équilibre dans le repère tournant (Ω) :

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_0 + \rho \mathbf{g} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{g} = -\operatorname{grad} \phi \quad \text{et} \quad \Delta \phi = 4 \pi G \rho - 2 |\Omega|^2$$

Evolution adiabatique :

$$\rho (\partial_{tt} \mathbf{u} + 2 \Omega \times \mathbf{u}) = \operatorname{div} \delta_E \mathbf{T} + \delta_E (\rho \mathbf{g}) = \operatorname{div} \pi_{(1)}^t + \rho \delta_L \mathbf{g} \quad (\operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla_i \mathbf{T}^{ij})$$

δ_E, δ_L : perturbation eulérienne et particulaire au premier ordre

$\pi_{(1)}$: incrément du tenseur de Piola-Kirchoff 1

$$\delta_L \rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \delta_E \rho = -\operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \quad \delta_L \mathbf{g} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad} \psi$$

$$\psi = -\delta_E \phi \quad \text{vérifie :} \quad \Delta \psi = 4 \pi G \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$$

Dans le noyau externe (liquide) :

$$\mathbf{T}_0 = -p_0 \mathbf{I}_d, \quad \nabla p_0 = \rho \mathbf{g} = -\rho \nabla \phi, \quad \delta_L \mathbf{T} = -\kappa \mathbf{I}_d \nabla \cdot \mathbf{u}$$

A une interface Σ solide-liquide : $[u \cdot n] = 0$ et $[\delta_L n] = W[u]$

W : opérateur de Weingarten sur l'espace tangent à Σ

$$[\delta_L(T(n))] = \nabla_{[u]} T_0(n)$$

$$[\pi_{(1)}(n)] = -\operatorname{div}_{\Sigma}(\rho_0[u]) \cdot n - \rho_0 W[u]$$

A une interface Σ solide-solide : $[u] = 0$ et $[\delta_L n] = 0$

$$[\delta_L(T(n))] = [\pi_{(1)}(n)] = 0$$

A toute surface de discontinuité de ρ :

$$[\psi] = 0 \quad \text{et} \quad [\operatorname{grad} \psi] \cdot n = -4 \pi G \rho u \cdot n$$

Les oscillations libres : un problème spectral quadratique

L'évolution dynamique dans la configuration en rotation associée à une source $S(t)$ est décrite par :

$$\partial_{tt}\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \partial_t\mathbf{u} + A\mathbf{u} = S(t)$$

où A est l'opérateur intégral-différentiel défini formellement par :

$$A\mathbf{u} = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} (\delta_L T(\mathbf{u}) - \nabla T_0 \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \mathbf{g} - \rho \nabla \psi(\mathbf{u}) \right) \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \pi_{(1)}^t - \nabla \mathbf{g} \mathbf{u} - \nabla \psi(\mathbf{u}) \end{cases} + \text{C. L.}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \delta_L T = \mathbf{c} :: \nabla \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u} T_0 + \nabla \mathbf{u} T_0 + T_0 \nabla^t \mathbf{u} \\ \pi_{(1)}^{ij} = \mathbf{c} :: \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} T_0 \quad (\mathbf{c}^{ijkl} = \mathbf{c}^{jikl} = \mathbf{c}^{klij}) \end{cases}$$

Fourier en temps conduit au problème spectral dans $\mathbb{L}^2 \equiv (\mathbb{L}^2)^3$:

$$L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda \boldsymbol{\Omega} \times \cdot + A, \quad A \text{ non borné} \quad (\lambda = i\omega \in \mathbb{C})$$

\mathcal{X} espace de Banach (réel ou complexe)

- $D \subseteq \mathcal{X}$ est parafermé $\iff D : \text{Banach}$ et $D \hookrightarrow \mathcal{X}$ est continue

La topologie parafermée est alors unique (graphe fermé + \mathcal{X} séparé)

- $L : D \rightarrow \mathcal{X}$ fermé $\iff \mathcal{G}(L) = \{(x, Lx), x \in D\}$ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$

L fermé $\implies D$ parafermé et $L \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X}) : \|x\|_D = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Lx\|_{\mathcal{X}}$

Famille analytique d'opérateurs à domaine D parafermé fixe :

$U \ni \lambda \mapsto L(\lambda) \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ est holomorphe

Un cas particulier important :

$L(\lambda) = A + B(\lambda)$ avec A fermé, et $U \ni \lambda \mapsto B(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ holomorphe

Opérateurs Fredholm et semi-Fredholm

Etant donnés D et \mathcal{X} Banach, $T \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$, on pose :

$$\alpha(T) = \dim(\ker T), \quad \beta(T) = \operatorname{codim}(\operatorname{Im} T) = \dim(\mathcal{X}/\operatorname{Im} T)$$
$$\operatorname{ind}(T) = \alpha(T) - \beta(T) \in \overline{\mathbb{R}} \quad (\alpha \text{ ou } \beta < +\infty)$$

Définitions

- T semi-Fredholm : $\operatorname{Im} T$ est fermé dans \mathcal{X} et $\alpha(T)$ ou $\beta(T) < +\infty$
- T Fredholm : $\operatorname{Im} T$ est fermé dans \mathcal{X} et $\alpha(T)$ et $\beta(T) < +\infty$

Stabilité par perturbation (Gohberg-Krein, Kato)

Soit T semi-Fredholm alors :

- tout $S \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ dans un voisinage de T est semi-Fredholm avec $\alpha(S) \leq \alpha(T)$, $\beta(S) \leq \beta(T)$ et $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T)$
- $T+K$ est semi-Fredholm avec $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$ si $K \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ est compact

Deux résultats clefs

Soient $T \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ un opérateur fermé de \mathcal{X} et $\mathcal{F}_+(\mathcal{X})$ l'ensemble des opérateurs dans \mathcal{X} , semi-Fredholm d'indice $< +\infty$ (i.e. $\alpha < +\infty$).

Critère de non appartenance à \mathcal{F}_+ (Kato, Wolf)

$$T \notin \mathcal{F}_+(\mathcal{X}) \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \exists F \subseteq D \text{ fermé dans } \mathcal{X} : \\ \dim F = +\infty \text{ et } \|Tx\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon \quad \forall x \in F \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \text{ sans valeur d'adhérence :} \\ \forall n \in \mathbb{N} \|x_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0 \end{cases}$$

Soit $T \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ et supposons que $D = D_1 \oplus D_2$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$:

Décomposition de Schur ($T_{11} \in \text{Isom}(D_1, \mathcal{X}_1)$) :

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{\mathcal{X}_1} & 0 \\ T_{21}T_{11}^{-1} & I_{\mathcal{X}_2} \end{pmatrix}}_{\in \text{Isom}(\mathcal{X})} \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{D_1} & T_{11}^{-1}T_{12} \\ 0 & I_{D_2} \end{pmatrix}}_{\in \text{Isom}(D)}$$

Dans le cas hilbertien (Gohberg, suite)

Soit $U \ni \lambda \mapsto L(\lambda) \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ analytique (D parafermé dans \mathcal{X})

Si $L(\lambda_0)$ est semi-Fredholm alors :

$\exists \delta > 0 : \lambda \in U$ et $0 < |\lambda - \lambda_0| \leq \delta \implies \alpha(\lambda)$ and $\beta(\lambda)$ sont constants

$$D = D_1 \oplus D_2 \quad D_2 = \ker L(\lambda_0), \quad D_1 = D_2^\perp$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \quad \mathcal{X}_1 = \operatorname{Im} L(\lambda_0), \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1^\perp$$

$\lambda \in \operatorname{disc}(\lambda_0, \eta) \implies$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{X}_1} & 0 \\ L(\lambda)_{21} L(\lambda)_{11}^{-1} & I_{\mathcal{X}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda)_{11} & 0 \\ 0 & R(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{D_1} & L(\lambda)_{11}^{-1} L(\lambda)_{12} \\ 0 & I_{D_2} \end{pmatrix}$$

$U \ni \lambda \mapsto R(\lambda) = L(\lambda)_{22} - L(\lambda)_{21} L(\lambda)_{11}^{-1} L(\lambda)_{12} \in \mathcal{L}(D_2, \mathcal{X}_2)$ analytique

($r = \operatorname{rg}(R(\lambda_1))$) : rang maximum de $R(\lambda)$ pour $\lambda \in \operatorname{disc}(\lambda_0, \eta)$

Spectre d'une famille analytique d'opérateurs (Hilbert)

$U \ni \lambda \mapsto L(\lambda) \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ famille analytique d'opérateurs (D parafermé)

Spectre de la famille L : $\sigma(L) = U \setminus \rho(L)$

$\rho(L) = \{\lambda \in U : L(\lambda) \text{ continuellement inversible dans } \mathcal{L}(\mathcal{X}) \text{ ou } \mathcal{L}(D, \mathcal{X})\}$

Les spectres essentiels de L : $\sigma_k(L) = U \setminus \Delta_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$

$\Delta_1(L) = \{\lambda \in U : L(\lambda) \text{ semi-Fredholm } \alpha(\lambda) \text{ ou } \beta(\lambda) < +\infty\}$ (Kato)

$\Delta_2(L) = \{\lambda \in U : L(\lambda) \text{ semi-Fredholm } \alpha(\lambda) < +\infty\}$ (Weyl)

$\Delta_3(L) = \{\lambda \in U : L(\lambda) \text{ Fredholm} : \alpha(\lambda) \text{ et } \beta(\lambda) < +\infty\}$ (Wolf)

$\Delta_4(L) = \{\lambda \in U : L(\lambda) \text{ Fredholm, } \alpha(\lambda) = \beta(\lambda) < +\infty\}$ (Schechter)

$\Delta_5(L) = \{\lambda \in \Delta_4(L) : \lambda \in \overline{\rho(L)}\}$ (Browder)

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq \Delta_4 \supseteq \Delta_5 \supseteq \rho$$

$\Delta_a(L) = \{\lambda \in \Delta_2(L) : \alpha(\lambda) = 0\}$, $\sigma_a = U \setminus \Delta_a = \sigma_1 \cup \sigma_p = \sigma_2 \cup \sigma_p$

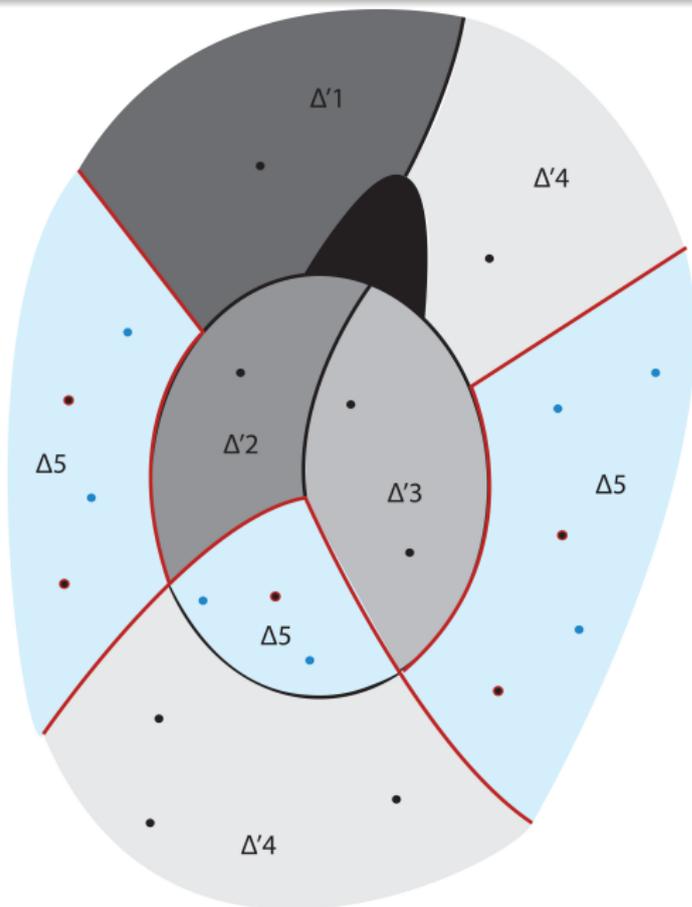
Structures des spectres (Hilbert)

- Sur chaque composante connexe de Δ_1 $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ prennent des valeurs constantes (éventuellement ∞), à l'exception d'un nombre dénombrable de points où les valeurs de α et β sont augmentés d'un nombre fini. Ces points ne peuvent s'accumuler que sur σ_1 .
- $\Delta_5 = \rho \cup \sigma_d$ et $\sigma_5 = \sigma \setminus \sigma_d$, where σ_d est l'ensemble des valeurs propres de multiplicité géométrique finie qui sont isolés dans le spectre.
- Spectre isolé $\sigma_I : \sigma_I \setminus \sigma_d \subseteq \sigma_1$
- $\partial\sigma = \partial\sigma_5 \cup \sigma_d = \partial\sigma_a$, $\partial\sigma_5 \subseteq \partial\sigma_4 \subseteq \partial\sigma_3 \subseteq \partial\sigma_2 \subseteq \partial\sigma_1$

Critères d'appartenance à σ_2 et σ_a dans le cas où $L(\lambda)$ est fermé dans \mathcal{X}

$$\lambda \in \sigma_2 \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \exists F \subseteq D \text{ fermé dans } \mathcal{X} : \\ \dim F = +\infty \text{ et } \|L(\lambda)x\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon \|x\|_{\mathcal{X}} \quad \forall x \in F \end{cases}$$
$$\iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D : \forall n \|x_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \text{ et } x_n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n = 0$$
$$\lambda \in \sigma_a \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D : \forall n \|x_n\|_{\mathcal{X}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n = 0$$

Illustration des spectres (Hilbert)



$$\Delta_5 = \rho \cup \sigma_d \quad \alpha = \beta = 0$$

$$\Delta'_4 = \Delta_4 \setminus \Delta_5 \quad 0 \neq \alpha = \beta < \infty$$

$$\Delta'_3 = \Delta_3 \setminus \Delta_4 \quad \alpha \neq \beta < \infty$$

$$\Delta'_2 = \Delta_2 \setminus \Delta_3 \quad \alpha < \infty \beta = \infty$$

$$\Delta'_1 = \Delta_1 \setminus \Delta_2 \quad \alpha = \infty \beta < \infty$$

σ_1 en noir (Kato)

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cup \Delta'_1 \cdots \sigma_e = \sigma_4 \cup \Delta'_4$$

σ_d : points bleus dans Δ_5

$\sigma_1 \cap \sigma_1$: points noirs

$\partial\sigma_e$: lignes rouges

Une caractérisation des opérateurs compacts entre Hilbert

Un opérateur agissant d'un Hilbert dans un autre est compact si et seulement si son image ne contient pas de sous-espace fermé de dimension infinie.

Soient $D \hookrightarrow \mathcal{X}$ compact, U un ouvert connexe de \mathbb{C}
 $L : U \rightarrow \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ une famille analytique d'opérateurs fermés

$L(\lambda)$ est semi-Fredholm pour tout $\lambda \in U$ et :

- soit $\sigma(L) = U$ et α est constant ($< \infty$) dans U à l'exception éventuelle de points isolés (ne pouvant s'accumuler que sur ∂U) où α prend une valeur plus grande
- ou bien $\sigma(L) = \sigma_d(L)$

D : parafermé dans \mathcal{X} , $L : U \rightarrow \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ famille analytique d'opérateurs fermés
 $F \subseteq D$ fermé dans $\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X} = F \oplus F^\perp$, $D = F \oplus D \cap F^\perp$, $L(\lambda)|_F \in \mathcal{L}(F, \mathcal{X})$

Caractérisation des classes maximales

$[F]$ maximale $\left\{ \begin{array}{l} \iff D \cap F^\perp \hookrightarrow F^\perp \text{ compact (Dixmier)} \\ \implies L(\lambda)|_{F^\perp} \text{ semi-Fredholm : } \Delta_2(L(\lambda)|_{F^\perp}) = U \end{array} \right.$

décomposition de familles d'opérateurs (Hilbert)

Soient D dense et parafermé dans \mathcal{X} , $A \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ fermé et :

$U \ni \lambda \mapsto B(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ une famille d'opérateurs bornés

$\forall \lambda \in U$ l'opérateur $L(\lambda) = B(\lambda) + A \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ est fermé dans \mathcal{X}

Si $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ avec $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2^\perp$ et $\mathcal{X}_2 \subseteq D \cap D(A^*)$ fermé dans \mathcal{X}

$D = D \cap \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ et $D((L(\lambda))^*) = (D(A^*) \cap \mathcal{X}_1) \oplus \mathcal{X}_2$:

Décomposition matricielle de $L(\lambda)$ et $L(\lambda)^*$

- Les opérateurs $L(\lambda)$ et $L(\lambda)^*$ se décomposent sur $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$:

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} L(\lambda)_{11} & L(\lambda)_{12} \\ L(\lambda)_{21} & L(\lambda)_{22} \end{pmatrix} \quad L(\lambda)^* = \begin{pmatrix} (L(\lambda)^*)_{11} & (L(\lambda)^*)_{12} \\ (L(\lambda)^*)_{21} & (L(\lambda)^*)_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} (L(\lambda)^*)_{11} = L(\lambda)_{11}^* & (L(\lambda)^*)_{12} = L(\lambda)_{21}^* \\ \overline{(L(\lambda)^*)_{21}} = L(\lambda)_{12}^* & (L(\lambda)^*)_{22} = L(\lambda)_{22}^* \end{cases}$$

- $\begin{cases} L(\lambda)_{11} = (L(\lambda)^*)_{11}^* = L(\lambda)_{11}^{**} \text{ est fermé dans } \mathcal{X}_1 \\ L(\lambda)_{22} \text{ et } L(\lambda)_{12} \text{ sont fermés bornés} \\ L(\lambda)_{21} \text{ est borné et fermable par } (L(\lambda)^*)_{12}^* = L(\lambda)_{21}^{**} \end{cases}$

champ numérique d'une famille d'opérateurs (Markus)

Soient $A \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ et $L : U \rightarrow \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$ une famille d'opérateurs

- $W(A) = \{(Ax \mid x)_{\mathcal{X}} \mid x \in D(A), \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}$
- $W_L = \begin{cases} \{\lambda \in U : \exists x \in D \text{ avec } \|x\|_{\mathcal{X}} = 1 \text{ et } (L(\lambda)x \mid x)_{\mathcal{X}} = 0\} \\ \{\lambda \in U : 0 \in W(L(\lambda))\} \end{cases}$
- $\Gamma_L = \begin{cases} \{\lambda \in U : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D, \|x_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (L(\lambda)x_n \mid x_n) = 0\} \\ \{\lambda \in U : 0 \in \overline{W(L(\lambda))}\} \end{cases}$
- $W(A)$ convexe de \mathbb{C} , $\sigma_p(L) \subseteq W_L \subseteq \Gamma_L$, $\sigma_a(L) \subseteq \Gamma_L$

A fermé, $L(\lambda) = A + B(\lambda)$ avec $B : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ analytique

- $\overline{W_L} \subseteq \Gamma_L = \overline{\Gamma_L}$ et si $\Gamma_L \neq U$ alors $\overline{W_L} = \Gamma_L$

- Si $\overline{D} = \mathcal{X}$ et $D \cap D(A^*)$ dense dans $D(A^*)$ alors $\sigma(L) \subseteq \Gamma_L$

- Si en outre $B = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k B_k$: $\|L(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \Gamma_L)^n}$ ($\lambda \notin \Gamma_L$)

Spectre d'une classe de familles analytiques

$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto L(\lambda) = A + B(\lambda)$ avec $A \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X})$, $B(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ analytique :

Supposons que :

$\bar{D} = \mathcal{X}$, A fermé dans \mathcal{X} et $D \cap D(A^*)$ dense dans $D(A^*)$

et que $\begin{cases} \exists \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1^\perp \subseteq D \cap D(A^*) \text{ fermé dans } \mathcal{X} \\ D \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1 \text{ compact et } W(A_{11}) \neq \mathbb{C} \end{cases}$

alors :

- $\sigma(L) \setminus \sigma(L_{22}) = \sigma(S)$ avec $S(\lambda) = L_{11}(\lambda) - L_{12}(\lambda)L_{22}^{-1}(\lambda)L_{21}(\lambda)$
- $\sigma_k(L) = \sigma_k(L_{22})$, $k = 1, 2, 3, 4$ $\Delta_4(S) = \mathbb{C} \setminus \sigma(L_{22}) \subseteq \Delta_4(L)$
- $\begin{cases} \sigma(L) \cap \mathbb{C} \subseteq \sigma_d(L), \mathbb{C} \subseteq \Delta_5(L) \cap \Delta_5(S) \\ \mathbb{C} : \text{composante non bornée de } \mathbb{C} \setminus \sigma(L_{22}) \end{cases}$

En outre, si $B(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k B_k$:

- $\sigma(L_{22})$ est borné

Spectre d'une famille quadratique auto-adjointe

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A \in \mathcal{L}(D, \mathcal{X}) \quad \overline{D} = \mathcal{X}$$

- A auto-adjoint $\gamma_i = \inf W(A)$, $\gamma_s = \sup W(A)$ ($W(A) \subseteq \mathbb{R}$)
- $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ anti-adjoint ($W(B) \subseteq i\mathbb{R}$)
- $L(\lambda)^* = L(-\bar{\lambda})$: symétrie de $\sigma(L)$ / l'axe imaginaire

Localisation du spectre :

- $D = D(A^*)$ et $W(A) \subseteq \mathbb{R} \implies \sigma(L) \subseteq \Gamma_L = \overline{W_L}$
- $\|x\| = 1$ et $(L(\lambda)x | x) = 0 \implies$
$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}(\lambda) = 0 \text{ et } |\text{Im}(\lambda)| \leq \|B\| + \{\|B\|^2 + \max(0, \gamma_s)\}^{1/2} \\ \text{ou} \\ |\text{Im}(\lambda)| \leq \|B\| \text{ et } |\lambda| \leq \max(0, -\gamma_i)^{1/2} \end{array} \right\} \supseteq \sigma(L)$$

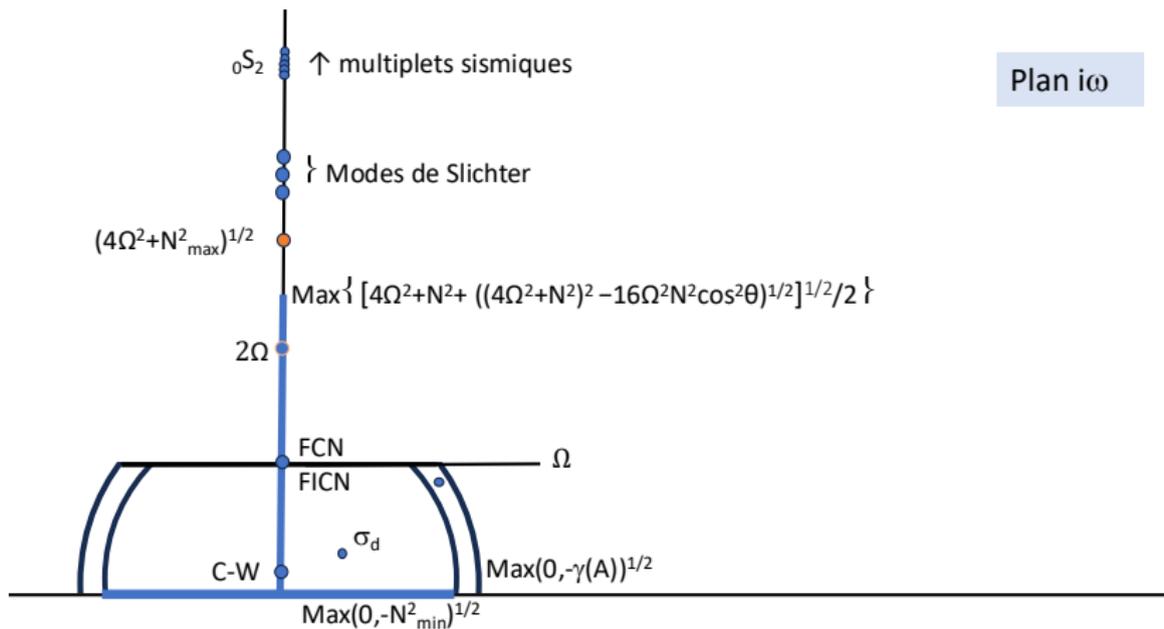
Spectre d'une famille quadratique auto-adjointe

- $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_2 \subseteq D$ fermé dans \mathcal{X} , $(D \cap \mathcal{X}_1) \oplus \mathcal{X}_2$
- $D \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1$ compact
- $-\infty < \gamma_i \leq \gamma'_i = \inf W(A_{22}) \leq \gamma'_s = \sup W(A_{22}) < \gamma_s = +\infty$

$$\sigma_e(L) \subseteq \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ et } |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \|B_{22}\| + \{\|B_{22}\|^2 + \max(0, \gamma'_s)\}^{1/2} \\ \text{ou} \\ |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \|B_{22}\| \text{ et } |\lambda| \leq \max(0, -\gamma'_i)^{1/2} \end{cases}$$
$$\sigma_d(L) \subseteq \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \\ \text{ou} \\ |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \|B\| \text{ et } |\lambda| \leq \max(0, -\gamma_i)^{1/2} \end{cases}$$

Encadrement du spectre

Plan $i\omega$



Retour sur Terre : la configuration de référence

$V = V_S \cup V_L = \bigcup_{i=1}^{\ell} V_i$, ouverts de \mathbb{R}^3 connexes, bornés de bords réguliers.

$$\rho|_{V_i} \in W^{1,\infty}(V_i) \equiv C^{0,1}(V_i) \text{ et } \inf_{V_i} \rho > 0 \quad (i = 1, \dots, \ell)$$

Le potentiel de pesanteur : $\Delta\phi = 4\pi G\rho - 2|\Omega|^2$, $g = -\text{grad } \phi$

- $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ et ses restrictions sont dans les $C^2(\overline{V_i})$ et $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus V)$
- $\phi = (|\Omega|^2|x|^2 - (\Omega \cdot x)^2)/2 - GM/|x| + o(1/|x|^2)$ ($|x| \rightarrow \infty$)
- $[\nabla g]_\Sigma = -[H(\phi)]_\Sigma = -4\pi G[\rho]_\Sigma n \otimes n$

Dans V_S : $c \in (L^\infty(V_S))^{81}$, $T_0 \in (L^\infty(V_S))^9$

Dans V_L : $\nabla p_0 = -\rho \nabla \phi$, $p_0 \in C^1(V_L)$, les surfaces d'équi-potentiel et d'équi-pression coïncident et sont de densité constante, $\kappa \in L^\infty(V_L)$

L'opérateur de redistribution des masses

- Le potentiel Newtonien de redistributions des masses ($\psi(u) = -\delta_E \phi(u)$) :

$$\psi(u)(x) = -G \int_V \frac{x' - x}{|x' - x|^3} \cdot u(x') \rho(x') dV' \quad (u \in \mathbb{L}^2(V))$$

vérifie : $\Delta \psi = 4\pi G \nabla \cdot (\rho u)$ au sens des distributions de \mathbb{R}^3

- Analyse de Fourier : $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(V), \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^3))$

L'espace : $\mathcal{B} = \{ \psi : (1 + |x|^2)^{-1/2} \psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla \psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \}$

est un espace de Hilbert dont un p. s. est : $(\nabla \cdot u | \nabla \cdot v)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)}$

- $\psi(u)$ est l'unique solution dans \mathcal{B} du problème variationnel :

$$\forall \phi \in \mathcal{B} : (\nabla \psi | \nabla \phi)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)} = 4\pi G (\rho u | \nabla \phi)_{\mathbb{L}^2(V)}$$

- L'opérateur $\nabla \psi : \mathbb{H}(\text{div}, \cup V_i) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ est compact

Définition de l'opérateur de l'élasto-gravité (principe)

- $D(a)$: sous-espace hilbertien parafermé et dense dans \mathcal{X}
- a : forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) symétrique définie et continue dans $D(a)$ avec $\gamma(a) = \sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid a(u, u) \geq \mu \|u\|_{\mathcal{X}}^2 \forall u \in \mathcal{X}\} > -\infty$

Théorème de représentation (Kato)

$$\text{Si : } \mu < \gamma \implies a(u, u) - \mu \|u\|_{\mathcal{X}}^2 \geq \|u\|_{D(a)}^2 \quad \forall u \in D(a)$$

il existe alors un seul opérateur A de domaine $D(A)$ défini dans \mathcal{X} par :

$$a(u, v) = (w|v)_{\mathcal{X}} \iff u \in D(A) \text{ et } w = Au$$

- A est auto-adjoint borné inférieurement par $\gamma(a)$
- $D(A)$ est dense dans $D(a)$ (pour sa topologie parafermée)
- $D(a) = D((A - \mu I)^{1/2}) \quad (\mu < \gamma)$

A partir de l'opérateur formel on construit la forme $a(\dots)$ et :

- soit on la complexifie et l'on utilise le théorème
- soit on utilise le théorème dans sa forme réelle et on complexifie A

Construction de la forme $a(\dots)$

$$A u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\pi_1^t(u)) - \partial_L g, \quad \pi_1^t(u) = c :: \nabla u + \nabla u T_0, \quad \partial_L g = \nabla g u + \nabla \psi(u)$$

$$(A u | v) = \int_V \left\{ \pi_1^t(u) : (\nabla v)^t - \rho \partial_L g \cdot v \right\} dV + \int_{\Sigma} [\pi_{(1)}(u)(n) \cdot v] d\Sigma$$

$$[\pi_{(1)}(u)(n) \cdot v] = \begin{cases} -p_0[W(u_\Sigma, v_\Sigma)] - \operatorname{div}_\Sigma(p_0[u]) v \cdot n + p_0[v] \nabla_\Sigma(u \cdot n) \\ \rho_0 n \cdot [\nabla u(v) - v \nabla \cdot u] - n \cdot [\rho v(u \cdot g)] + [\rho] u_\Sigma \cdot g v \cdot n \end{cases}$$

Soit π_0 une fonction qui prolonge continument p_0 dans V_S et s'annule sur ∂V et :

$$b^{ijkl} := c^{ijkl} + T_0^{ik} \delta^{jl} + \pi_0 (\delta^{ij} \delta^{kl} - \delta^{jk} \delta^{il})$$

$$(A u | v) = \int_V b : (\nabla u)^t : (\nabla v)^t + \mathcal{S} \left\{ \nabla u(v) \cdot (\rho g - \nabla \pi_0) + \nabla \cdot u (\rho g + \nabla \pi_0) \cdot v + \nabla \rho \cdot u g \cdot v \right\} dV + \int_{\Sigma} [\rho] u_\Sigma \cdot g v \cdot n d\Sigma - \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi(u) \cdot \nabla \psi(v) dV$$

Définition de $a(\cdot, \cdot)$ et de $D(a)$

$$D(a) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(V) \mid u|_S \in \mathbb{H}^1(V_S), u|_L \in \mathbb{H}(\operatorname{div}, V_L), [u \cdot n] = 0 (\partial V_L) \right\}$$

est parafermé et dense dans $\mathbb{L}^2(V, \rho dV)$, muni du produit scalaire :

$$(u|v)_{D(a)} = \int_V u \cdot \bar{v} dV + \int_{V_S} \operatorname{tr}((\nabla u (\nabla \bar{v})^*)) dV + \int_{V_L} \nabla \cdot u \nabla \cdot \bar{v} dV$$

$$a(u, v) = \int_{V_S} b^{ijkl} \nabla_i u_j \nabla_k \bar{v}_l + \mathcal{S} \left\{ (\rho g - \nabla \pi_0) \cdot \nabla \bar{v}(u) + \nabla \cdot \bar{v} (\rho g + \nabla \pi_0) \cdot u \right. \\ \left. + (g \cdot u)(\bar{v} \cdot \nabla \rho) \right\} dV + \int_{\Sigma} \mathcal{S} \{ (g \cdot u_S)(\bar{v} \cdot n) \} [\rho] d\Sigma - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \psi(u) \cdot \nabla \psi(\bar{v})}{4\pi G} dV$$

$$\int_{V_L} \kappa \left(\nabla \cdot u + \frac{u \cdot g}{c^2} \right) \left(\nabla \cdot \bar{v} + \frac{\bar{v} \cdot g}{c^2} \right) + \rho N^2 \frac{(u \cdot g)(\bar{v} \cdot g)}{|g|^2} dV$$

où : $\mathcal{S} \{ a(u, v) \} = (a(u, v) + \overline{a(v, u)})/2$

dans V_S : $b^{ijkl} = c^{ijkl} + T_0^{ik} \delta^{jl} + \pi_0 (\delta^{ij} \delta^{kl} - \delta^{jk} \delta^{il})$

dans V_L : $\pi_0 = p_0$, $c^2 = \kappa/\rho$, $N^2 = s \cdot g$ avec $s = \nabla \rho / \rho - g/c^2$

$$a(u, u) + c_1 \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \geq c_2 \|u\|_{D(a)}^2 \implies \text{définition de } A$$

$|\text{dev}(T_0)|_\infty$ suffisamment petit \implies

$$a(u, u) \geq c_1 \{ \|u|_S\|_{\mathbb{H}^1(V_S)}^2 + \|u|_L\|_{\mathbb{H}(\text{div}, V_L)}^2 \} - c_2 \|u\|_{\mathbb{L}^2(V)}^2$$

- L'opérateur A auto-adjoint est bien défini dans $\mathbb{L}^2(V, \rho dV)$
- $D(A)$ est parafermé et dense dans $D(a)$
- L'opérateur $D(A) \ni u \mapsto \nabla \psi(u) \in \mathbb{L}^2(V)$ est compact

$$\psi : D(A) \hookrightarrow D(a) \hookrightarrow H(\text{div}, \cup V_i) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{L}^2(V)$$

Décomposition de $\mathbb{L}^2(V, \rho dV)$, le sous-espace \mathcal{X}_2

$$a(u, v) = \int_{V_L} \left\{ c^2 \left(\nabla \cdot u + \frac{u \cdot g}{c^2} \right) \left(\nabla \cdot \bar{v} + \frac{\bar{v} \cdot g}{c^2} \right) + N^2 \frac{(u \cdot g)(\bar{v} \cdot g)}{|g|^2} \right\} \rho dV$$

$$+ \int_{\partial V_L} \mathcal{S}\{(g \cdot u_S)(\bar{v} \cdot n)\} [\rho] d\Sigma + \dots - \int_V \nabla \psi(u) \cdot \bar{v} \rho dV$$

- $\mathcal{X}_2 := \left\{ u \in D(a) \mid \nabla \cdot u|_L + u|_L \cdot g/c^2 = 0, u|_S = 0, u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial V_L \right\}$

- $\mathcal{X}_2 \subset D(A)$ et $\forall u \in \mathcal{X}_2 \quad Au = \begin{cases} -\nabla \psi(u) & \text{dans } V_S \\ u \cdot g s - \nabla \psi(u) & \text{dans } V_L \end{cases}$

$$\forall u \in \mathcal{X}_2, \forall v \in D(a) : a(u, v) = \int_V (g N^2 g \cdot u|_L / \rho |g|^2 - \nabla \psi(u)) \cdot \bar{v} \rho dV$$

$$N^2 = s \cdot g, \quad s = \nabla \rho / \rho - g / c^2 \propto g, \quad c^2 = \kappa / \rho$$

Soit $T : \mathbb{H}_0(\text{div}, V_L) \ni u \mapsto Tu = \nabla \cdot u + u \cdot g / c^2 \in L^2(V_L)$

$\mathbb{H}_0(\text{div}, V_L)$ est parafermé et dense dans $\mathbb{L}^2(V_L)$ et T est fermé dans $\mathbb{L}^2(V_L)$

- $\mathcal{X}_2 = \{ u \in \mathbb{L}^2(V) \mid u|_S = 0 \text{ et } u|_L \in \ker T \}$ est fermé dans $\mathbb{L}^2(V)$

Le sous-espace $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2^\perp$

- $T^* : D(T^*) = H^1(V_L), \quad p \mapsto T^*p = -(\nabla p + sp)$

$$H^1(V_L) \hookrightarrow L^2(V_L) \implies$$

- $\dim \ker T^* < \infty$ et $\text{Im } T^*$ est fermé dans $\mathbb{L}^2(V_L, dm) = \ker T \oplus \text{Im } T^*$
 $\mathcal{X}_1 = \{u \in \mathbb{L}^2(V) \mid u|_L \in \text{Im } T^*\} = \mathcal{X}_2^\perp$ est fermé dans $\mathbb{L}^2(V, dm)$

Soient :

$P_{1,2}$ les projecteurs orthogonaux (dm) sur $\mathcal{X}_{1,2}$

$R : \mathbb{L}^2(V) \rightarrow \mathbb{L}^2(V_L)$ l'opérateur de restriction à V_L

$Q_{1,2} = R P_{1,2} R^*$ les projecteurs sur $R \mathcal{X}_{1,2}$ dans $\mathbb{L}^2(V_L)$

- Pour tout $u \in \mathbb{L}^2(V_L) : Q_1 u = T^*p$ avec p unique solution de :
 $(T^*p \mid T^*q)_{\mathbb{L}^2(V_L, dm)} = (u \mid T^*q)_{\mathbb{L}^2(V_L, dm)} \quad (q \in (\ker T^*)^\perp \cap H^1(V_L))$
- L'opérateur $\mathbb{L}^2(V_L) \ni u \mapsto p \in H = (\ker T^*)^\perp \cap H^1(V_L)$ est borné

$D(A) \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1$ est compacte

$$\mathcal{X}_2 \subset D(A) \subset D(a) \subset \mathbb{L}^2(V, dm) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2^\perp$$

$$D(a) = D(a) \cap \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

$$D(A) = D(A) \cap \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

- L'injection $D(a) \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1$ est compacte
- $D(A) \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1 \equiv \{D(A) \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow D(a) \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1\}$ est compacte

$$L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda\Omega \times \cdot + A \quad (\lambda = i\omega)$$

- Le spectre est symétrique par rapport aux deux axes :

$$L(\lambda)^* = L(-\bar{\lambda}) \implies \begin{cases} \text{Im } L(-\bar{\lambda}) \text{ fermée s.s. si } \text{Im } L(\lambda) \text{ fermée} \\ \alpha(-\bar{\lambda}) = -\beta(\lambda) \end{cases}$$

$$A \text{ et } \Omega \times \cdot \text{ réels} \implies \begin{cases} \text{Im } L(\bar{\lambda}) = \overline{\text{Im } L(\lambda)} \\ \alpha(\bar{\lambda}) = \alpha(\lambda) \text{ et } \beta(\bar{\lambda}) = \beta(\lambda) \end{cases}$$

- $\sigma_k(L) = \sigma_k(L_{22}) = \sigma_k(Q_2 M Q_2)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) avec :

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto M(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda\Omega \times \cdot + N^2 \nu \otimes \nu \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(V_L)) \quad (\nu = g/|g|)$$

$$\sigma_e(L) \subseteq \begin{cases} \text{Re}(\lambda) = 0 \text{ et } |\text{Im}(\lambda)| \leq |\Omega| + \{|\Omega|^2 + \max(0, N_{max}^2)\}^{1/2} \\ \text{ou} \\ |\text{Im}(\lambda)| \leq |\Omega| \text{ et } |\lambda| \leq \max(0, -N_{min}^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$\sigma_d(L) \begin{cases} \subseteq i\mathbb{R} \cup \{\lambda \mid |\text{Im}(\lambda)| \leq |\Omega| \text{ et } |\lambda| \leq \max(0, -\gamma_i)^{1/2}\} \\ \supseteq i \left[-|\Omega| - \{|\Omega|^2 + \max(0, N_{max}^2)\}^{1/2}, |\Omega| + \{|\Omega|^2 + \max(0, N_{max}^2)\}^{1/2} \right] \end{cases}$$

$\sigma_2(Q_2 M Q_2)$ et suites singulières

- $x_0 \in V_L$ et $\chi \in C_0^\infty(V_L)$: $x_0 + \text{supp}(\chi) \subset V_L$ et $\|\chi\| = 1$
- $\chi_n(x) = \xi_n^{-3/2} \chi((x - x_0)/\xi_n)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$
 $\implies \|\chi_n\|_{L^2} = 1$, $\|\nabla \chi_n\|_{L^2} \propto 1/\xi_n$
- $v_n(x) = v \chi_n(x) e^{i d \cdot x / \xi_n^2}$, $|v| = |d| = 1$, $v \cdot d = 0$, $d \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{C}^3$

alors en supposant que $\rho \in C^1(V_L)$ et $c \in C^0(V_L)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q_2 v_n\| = 1, \quad Q_2 v_n \rightarrow 0 \quad (\mathbb{L}^2(V_L)) \quad \text{et} :$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q_2 M(\lambda) Q_2 v_n\| = 0$$

$$\iff$$

$$\int_{V_L} \left| \left\{ \lambda^2 v + 2\lambda \Omega \times v + N^2 v \cdot \nu \nu - d \cdot (2\lambda \Omega \times v + N^2 v \cdot \nu \nu) \right\} \psi_n(x) \right|^2 dV \rightarrow 0$$

$$\iff$$

$$\left\{ \lambda^2 + 2\lambda \Omega \times \cdot + N_0^2 \nu_0 \otimes \nu_0 - d \cdot (2\lambda \Omega \times \cdot + N_0^2 \nu_0 \otimes \nu_0) \right\} v = 0$$

$$\iff$$

$$\lambda^2 + N_0^2 (1 - (\nu_0 \cdot d)^2) + 4(\Omega \cdot d)^2 = 0$$

$\sigma_2(Q_2 M Q_2)$ (suite)

Pour chaque $x \in V_L$, soit :

$$\{d \in \mathbb{R}^3 \mid \|d\| = 1\} \ni d \mapsto N(x)^2 (1 - (\nu(x) \cdot d)^2) + 4(\Omega \cdot d)^2$$
$$\omega^2 \in \text{Im } f_x \implies \pm i\omega \in \sigma_2(L_{22})$$

$$(e_1, e_2, e_3) \text{ orthonormé direct, } \Omega \equiv \Omega e_3, \nu = (0, \sin \theta, \cos \theta), \theta = (\Omega, \nu)$$
$$\Delta = (4\Omega^2 + N^2)^2 - 16\Omega^2 N^2 \cos^2 \theta = (4\Omega^2 - N^2)^2 + 16\Omega^2 N^2 \sin^2 \theta \geq 0$$

Pour chaque $x \in V_L$ on a :

$$\bullet \begin{cases} \omega^2 \in [\omega_-^2(x), \omega_+^2(x)] \implies i\omega \in \sigma_2 & \text{si } N^2(x) \geq 0 \\ \omega^2 \in [N^2(x), \omega_+^2(x)] \implies i\omega \in \sigma_2 & \text{si } N^2(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec : } \omega_{\pm}^2(x) = (4\Omega^2 + N^2 \pm \Delta^{1/2})(x)/2, \omega_+^2(x) \geq 0, \omega_-^2 N^2(x) \geq 0$$

$$\bullet \omega^2 \in [\min(0, N_{min}^2), \max \omega_+^2(x)] \implies i\omega \in \sigma_2$$

$$\bullet \begin{cases} \max(4\Omega^2, N_{max}^2) \leq \max \omega_+^2 \leq 4\Omega^2 + N_{max}^2 & \text{si } N_{max}^2 \geq 0 \\ \max(0, 4\Omega^2 + N_{max}^2) \leq \max \omega_+^2 \leq 4\Omega^2 & \text{si } N_{max}^2 \leq 0 \end{cases}$$

$\sigma_2(Q_2 M Q_2)$ (suite)

$$[-(\max(0, -N_{min}^2))^{1/2}, ((\max(0, -N_{min}^2))^{1/2})] \cup i[-\max \omega_+, \max \omega_+] \subseteq \sigma_2$$

$$\omega \in \mathbb{R} \implies M(i\omega) \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(V_L)) \text{ auto-adjoint}$$

$$|\omega| > \max_{x \in V_L} \{ (4\Omega^2 + N^2 + \Delta^{1/2})(x)/2 \}^{1/2} \implies \begin{cases} M(i\omega) \text{ strictement n\u00e9gatif} \\ i\omega \in \rho(Q_2 M Q_2) \end{cases}$$

Soient $v \in R\mathcal{X}_2$, et $|\omega| > \max \omega_+(x)$

$$Q_2 M(i\omega) u = v \text{ et } u \in R\mathcal{X}_2$$

$$\iff$$

$$\exists p \in H : u = M(i\omega)^{-1}(v + T^*p) \in \mathbb{H}_0(\text{div}0, V_L)$$

$$\iff$$

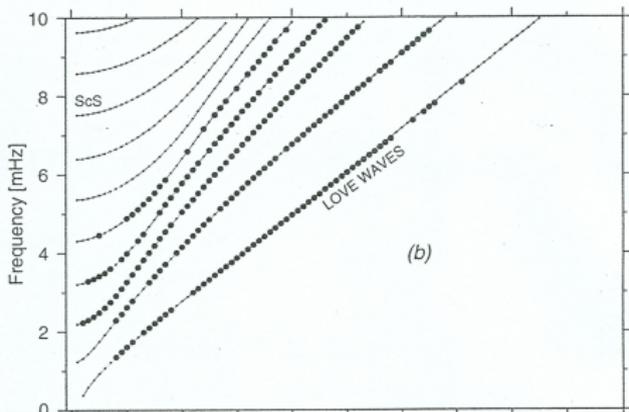
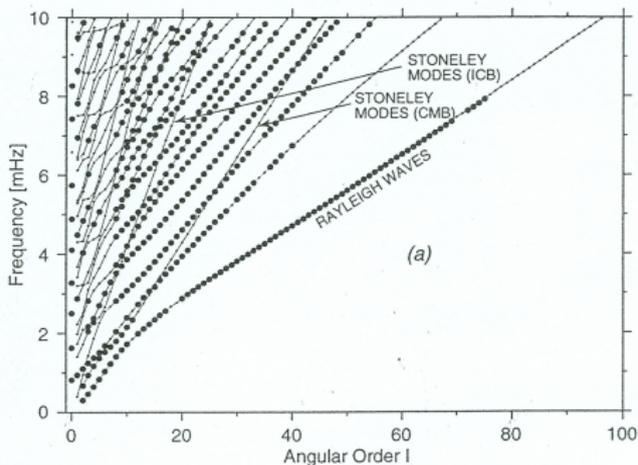
$$\exists p \in H : -(M(i\omega)^{-1}T^*p|T^*q)_{\mathbb{L}^2} = (M(i\omega))^{-1}v|T^*q)_{\mathbb{L}^2} \quad \forall q \in H$$

$$|\omega| > \omega_+ \implies i\omega \in \rho(L_{22}) \subseteq \Delta_4(L_{22}) = \Delta_4(L)$$

$$|\omega| > \max(\omega_+, |\Omega|) \quad (= \omega_+ \text{ si } N_{max}^2 \geq -3\Omega^2) \implies i\omega \in \Delta_5(L)$$

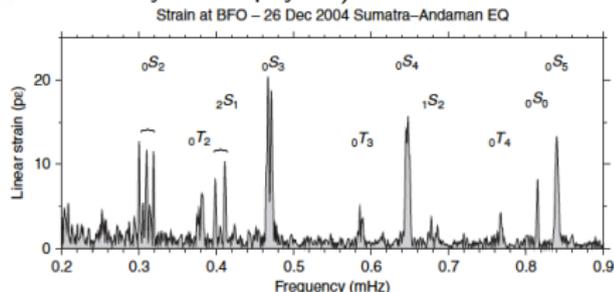
$$|0 \leq |\text{Im}(\lambda)| \leq |\Omega| \text{ et } \max^{1/2}(-N_{min}^2, 0) < |\lambda| \leq \max(0, -\gamma_i)^{1/2} \implies \lambda \in \Delta_5(L)$$

The discrete seismic Earth's spectrum



On the left, mean frequency of the seismic multiplets as function of the harmonic angular order ℓ (from G. Master and R. Widmer). Top, for spheroidal modes (${}_nS_\ell$, P-SV waves), bottom for toroidal modes of the mantle (${}_nT_\ell$ SH waves). Each of those multiplet consists of $(2\ell+1)$ modes, the frequency of which would coincide if the spherical symmetry was perfect, and without rotation. Bifurcations (of avoided crossing type) of different harmonic branches related to CMB and ICB and to inner core modes, can be discerned in the spheroidal pattern.

Below, Fourier transform of the strain-meter record at Black Forest observatory of the Sumatra 2004 Event. (R. Widmer and G. Laske, in Treaty of Geophysics)



Relations d'orthogonalité, modes quasi-rigides

$$u : \lambda^2 u + 2\lambda B u + A u = 0, \quad v : \mu^2 u + 2\mu B u + A u = 0$$

$$\implies \begin{cases} \lambda^2 (u|v) + 2\lambda (B u|v) + a(u, v) = 0 \\ \bar{\mu}^2 (u|v) - 2\bar{\mu} (B u|v) + a(u, v) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \lambda \bar{\mu} (u|v) + a(u, v) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda - \bar{\mu}) (u|v) + 2(B u|v) = 0 \quad (\lambda \neq -\bar{\mu})$$

$$\text{Repère au centre des masses} \implies \int_V u \, dm = 0$$

$$\int_V L(\lambda) u \, dm = B(\lambda) \int_V u \, dm + \int_V A u \, dm = B(\lambda) \int_V u \, dm + \Omega \times \left\{ \Omega \times \int_V u \, dm \right\}$$

L'espace admissible est l'orthogonal dans $\mathbb{L}^2(V, dm)$ des translations

- $t \cdot \Omega = 0 \implies A t = -|\Omega|^2 t$ et $L(\pm |\Omega|) t = \pm 2\Omega \times t$
- $t \times \Omega = 0 \implies A t = L(0) t = 0$

Quasi-rotation : $k \times x$, $k \in \mathbb{C}^3$

- $\Omega \times k = 0 \implies A(k \times x) = L(0) u = 0$
- $\begin{cases} k \cdot \Omega \implies A(u) = (\Omega, k, x) \Omega - (\Omega \cdot x) k \times \Omega \\ L(\pm i |\Omega|) (e_1 \pm i e_2) = 0 \quad ((e_1, e_2, \Omega/|\Omega|) \text{ repère orthormé direct dans } \mathbb{R}^3) \\ r(t) = (\cos(|\Omega| t) e_1 - \sin(|\Omega| t) e_2) \times x \end{cases}$

Spectre discret et Min-Max

- A auto-adjoint, $\gamma_i > -\infty$ et $D(a) \hookrightarrow \mathcal{X}$ compacte

Soient :

- $\mathbb{C} \ni \lambda \rightarrow B(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ analytique
- $\lambda \in F \subseteq \mathbb{C} \implies L(\lambda) = B(\lambda) + A$ auto-adjoint

$$\lambda \in \sigma(L) \cap F = \sigma_d(L) \cap F \iff$$

$$\exists k \geq 1 : \inf_{S_k \subseteq D(a)} \max_{u \in S_k, |u|=1} \{ (B(\lambda)u|u) + a(u, u) \} = 0 \quad (\dim S_k = k)$$

et le infimum est atteint

$$C = (A - \mu)^{-1/2} (B(\lambda) + \mu) (A - \mu)^{-1/2} \text{ compact et } C = C^* \text{ dans } \mathcal{X} \quad (\mu < 0, \gamma_i)$$

$$-1 \in \sigma(C) \iff \exists u \in \mathcal{X} : (I_{\mathcal{X}} + C)u = 0$$

$$\iff \forall v \in \mathcal{X} : (u|v) + ((B(\lambda) + \mu)(A - \mu)^{-1/2}u|(A - \mu)^{-1/2}v) = 0$$

$$\iff \forall v' \in D(a) : ((A - \mu)^{1/2}u'|(A - \mu)^{1/2}v') + ((B(\lambda) + \mu)u'|v') = 0$$

$$\iff \forall v' \in D(a) : a(u', v') + (B(\lambda)u'|v') = 0 \iff u' \in D(A) \text{ et } L(\lambda)u' = 0$$

$$\iff \exists k \geq 1 : \min_{S_k \subseteq \mathcal{X}} \max_{u \in S_k, |u|=1} \{ 1 + (B(\lambda) + \mu)(A - \mu)^{-1/2}u|(A - \mu)^{-1/2}u \} = 0$$

$$\iff \forall \mu' \leq \mu \quad \min_{S_k \subseteq D(a)} \max_{u \in S_k} \left\{ \frac{(B(\lambda)u|u) + a(u, u)}{(u|u) - a(u, u)/\mu'} \right\} = 0$$

$$\iff \min_{S_k \subseteq D(a)} \max_{u \in S_k, |u|=1} \{ (B(\lambda)u|u) + a(u, u) \} = 0$$

$\sigma_d(L)$ et Min-Max ($\lambda^2 + 2\lambda B + A$, $A = A^*$, $B = -B^*$)

$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2$, $N^2 = 0$, $\mathcal{X}_2 \subseteq \ker A$, $D(L) \cap \mathcal{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{X}_1$ compacte

$$\sigma_e = i[-2\Omega, 2\Omega] \quad \sigma_d \subseteq i(-\infty, -2\Omega) \cup i(2\Omega, +\infty)$$

$$i\omega \in \sigma_d(L) \iff i\omega \in \sigma_d\{T(\omega)\}$$

$$\text{avec : } T(\omega) = -\omega^2 + 2\omega i B_{11} - 4\omega B_{12}(\omega - 2i B_{22})^{-1} B_{21} + A_{11}$$

$$b(\omega, u) = -\omega^2 + 2\omega (i B_{11} u | u) + 4\omega ((\omega - 2i B_{22})^{-1} B_{21} u | B_{21} u)$$

$$\max_{u \in \mathcal{X}_1} b(\omega, u) \leq -\omega^2 \frac{\omega - 4\Omega}{\omega - 2\Omega}, \quad \max_{u \in \mathcal{X}_1} \partial_\omega b(\omega, u) < 0 \text{ si } \omega \geq \omega_0 \quad (3\Omega < \omega_0 < 4\Omega)$$

$$\implies \begin{cases} D := \{u \in D(a) : \|u\| = 1 \text{ et } b(\omega_0, u) + a(u, u) \geq 0\} \\ \forall u \in D \exists ! r_+(u) \geq \omega_0 : b(r_+(u), u) + a(u, u) = 0 \\ \exists m_0 : S \subseteq D(a) \cap \mathcal{X}_1 \text{ et } \dim S \geq m_0 \implies S \cap D \neq \emptyset \end{cases}$$

$$i\omega \in \sigma(L) \text{ et } \omega \geq \omega_0 \iff \exists k \geq m_0 : \omega = \min_{S_k \subseteq D(a_1)} \max_{u \in S_k \cap D} r(u)$$

Mode de Chandler

Planète solide stable, Ω vecteur propre du tenseur d'inertie $\mathcal{J} \in \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^3)$:

$$k \mapsto - \int_V x \times (x \times k) \, dm$$

Soit : $u = (k + k') \times \cdot$ avec $k \cdot \Omega = 0$ et $k' \times \Omega$ (quasi-rotation)

$$\|u\|^2 = \|k \times \cdot\|^2 = (\mathcal{J}k|k)_{\mathbb{C}^3} \text{ et } \begin{cases} a(u, u) = (\mathcal{J}k|k)_{\mathbb{C}^3} - (\mathcal{J}(k \times \Omega)|k \times \Omega)_{\mathbb{C}^3} \\ (B u|u) = (B(k \times \cdot)|k \times \cdot)_{\mathbb{C}^3} \end{cases}$$

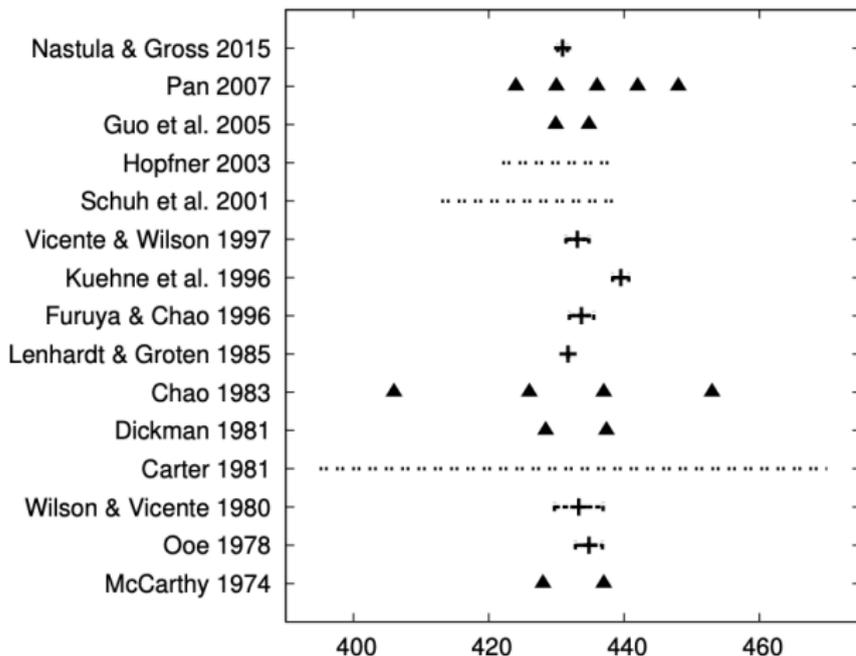
S_3 : l'espace des quasi-rotations, $S_2 = \{k \times \cdot \text{ avec } k = e_1 + (\alpha + i\beta)e_2\}$

$$\omega_1 = 0 \quad (u = \Omega \times \cdot) \quad \omega_2 \leq \min_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} r(\alpha, \beta) \quad \text{et} \quad \omega_3 \leq \max_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} r(\alpha, \beta)$$

$$r(\alpha, \beta) = b + (a^2 + b)^{1/2} \begin{cases} b = \frac{(i B u|u)}{(u|u)} = \beta |\Omega| \frac{l_1 + l_2 - l_3}{l_1 + (\alpha^2 + \beta^2) l_2} \\ a = \frac{a(u, u)}{(u|u)} = |\Omega|^2 \frac{l_3 - l_2 + (\alpha^2 + \beta^2)(l_3 - l_1)}{l_1 + (\alpha^2 + \beta^2) l_2} \end{cases}$$

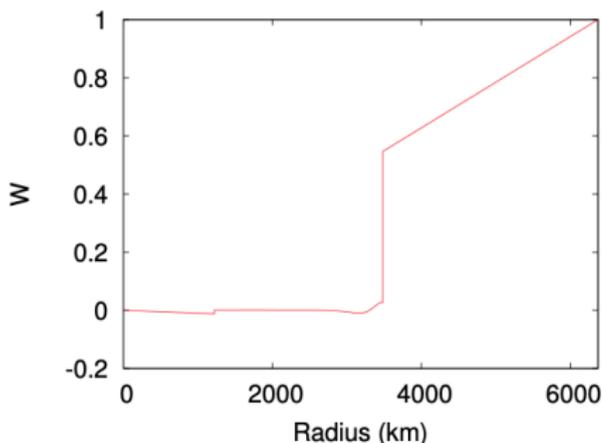
$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_3 \leq |\Omega| \quad (\alpha = 0, \beta = 1, u = (e_1 + i e_1) \times \cdot) \\ \omega_2 \leq \omega_e = |\Omega| \left(\frac{(l_3 - l_1)(l_3 - l_2)}{l_1 l_2} \right)^{1/2} \quad \left(\alpha = 0, \beta = - \left(\frac{l_1 (l_3 - l_2)}{l_2 (l_3 - l_1)} \right)^{1/2} \right) \\ v(t) = (l_1(l_3 - l_2))^{1/2} \cos(\omega_e t) + (l_2(l_3 - l_1))^{1/2} \sin(\omega_e t) \end{cases}$$

Observed period of Chandler wobble (solar days)



Chandler Wobble

$$s = \tau_1^{-1} + \sigma_2^{-1} + \tau_3^{-1}$$



$$T_{CW} = 404.7 \text{ solar days}$$

$$T_{\text{obs}} = 434 \text{ solar days}$$

$$\sigma_e(L) = \sigma_1(L) = i[-2\Omega, 2\Omega]$$

$$\bullet \quad L_{22}(i\omega) u = 0 \iff \begin{cases} -\omega^2 u + 2i\omega\Omega \times u = \nabla p & \text{dans } V_L \\ \nabla \cdot (\rho \cdot u) = 0 & \text{dans } V_L \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial V_L \end{cases}$$

- p solution de l'équation de Poincaré (1910, ρ supposé constant)

$$\Delta p - 4 \frac{|\Omega|^2}{\omega^2} \partial_{33}^2 p = 0$$

- Equivalent to studying the spectrum of the projected geostrophic operator onto \mathbb{X}_2 : $u \in \mathbb{X}_2$, $u \rightarrow 2P_2\Omega \times u \in \mathbb{X}_2$, where P_2 is the Leray Projector.
- Greenspan (1968) showed that in spherical or cylindrical configuration with constant density, σ_p is everywhere dense in the interval $i[-2\Omega, 2\Omega]$ and Backus for an ellipsoidal configuration in the 1990s.
- Ralston (1973) proved that $\sigma_e = i[-2\Omega, 2\Omega]$ for any configuration (with regular boundaries).

Inertial modes with viscosity (Rieutord and Valdettaro, 1997)



From Rieutord, Geogteot, and Valdettaro, J. Fluid Mech (2001) : Kinetic energy in a meridional section of a shell for 4 axisymmetric modes with different viscosity. The authors suggest that in the limit of 0 viscosity, the point spectrum is not everywhere dense in $[-2\Omega, 2\Omega]$

Lien de $L(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda B + A$ avec des problèmes linéaires

$$\bullet \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{X}} \\ -A & -2B \end{pmatrix} \quad D(\mathcal{A}) = D(A) \times \mathcal{X}$$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(L), \quad \sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma_p(L) \quad \text{et} \quad \ker((\lambda - \mathcal{A})) = \{(u, \lambda u), u \in \ker(L(\lambda))\}$$

$$\bullet \begin{cases} T := \begin{pmatrix} 0 & A_+^{1/2} - A_-^{1/2} \\ -A_+^{1/2} - A_-^{1/2} & -2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_+^{1/2} \\ -A_+^{1/2} & -2B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_-^{1/2} \\ A_-^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \\ T' := \begin{pmatrix} 0 & A_+^{1/2} + A_-^{1/2} \\ -A_+^{1/2} + A_-^{1/2} & -2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_+^{1/2} \\ -A_+^{1/2} & -2B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_-^{1/2} \\ A_-^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A = A_+ - A_- = (A_+^{1/2} + A_-^{1/2})(A_+^{1/2} - A_-^{1/2}) \quad A_+ A_- = A_- A_+ = 0 \\ D(T) = D(T') = D(a) \times D(a) \quad \text{avec} \quad D(a) = D(A_+^{1/2} \pm A_-^{1/2}) = D(A_+^{1/2}) \\ (\lambda - T)^* = -(\bar{\lambda} + T')$$

$$\sigma(T) = \sigma(T') = \sigma(L), \quad \sigma_p(T) = \sigma_p(T') = \sigma_p(L)$$

Dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ les σ_k ($k \leq 5$) de T , T' et L coïncident avec égalité des α et β

$$\ker L(0) \times \{0\} = \ker A \times \{0\} \subseteq \ker T = \{(u, v) \mid |A|^{1/2} u = -2Bv\}$$

Le problème dynamique lié à L

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$, $v_0 \in D(a)$ et $v_1 \in \mathcal{X}$; le problème :

$$\begin{aligned} v &\in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(a)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{X}) \quad v(0) = v_0, v(1) = v_1 \\ \forall w \in D(a), \quad t &\mapsto (v(t)|w)_{\mathcal{X}}^{(1)} \text{ est différentiable et :} & (\mathcal{P}_1) \\ (v(t)|w)_{\mathcal{X}}^{(2)} &+ 2(Bv(t)|w)_{\mathcal{X}}^{(1)} + a(v(t), w) = (f(t)|w)_{\mathcal{X}} \quad (t \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

admet une solution unique reliée, d'une manière équivalente, à la solution du problème :

$$V^{(1)} = TV + (0, h) \text{ avec } h(t) = \int_0^t f(s) ds + v_1 + 2Bv_0 \text{ et } V(0) = (0, v_0) \quad (\mathcal{P}_2)$$

$$V \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(T)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{X} \times \mathcal{X}) \text{ et } V(t) = \left((A_+^{1/2} - A_-^{1/2}) \int_0^t v(s) ds, v(t) \right)$$

(Stone + pert. bornée + $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{X}) \implies$ solution unique de \mathcal{P}_2)

Le problème dynamique lié à L (suite)

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$, $v_0 \in D(A)$ et $v_1 \in D(a)$ le problème :

$$v^{(2)} + 2Bv^{(1)} + Av = f \quad v(0) = v_0, v^{(1)} = v_1 \quad (\mathcal{P})$$

admet une solution unique dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, D(a)) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ et

$$V(t) = \left((A_+^{1/2} - A_-^{1/2}) \int_0^t v(s) ds, v(t) \right) \text{ est solution de } \mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{A}' := \begin{pmatrix} 0 & I_{D(a)} \\ -A & -2B \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & I_{D(a)} \\ -A & 0 \end{pmatrix} \quad D(\mathcal{A}') = D(\mathcal{B}) = D(A) \times D(a)$$

dans $D(a) \times \mathcal{X}$ muni du p.s. $a(u, u') - \gamma(u|u') + (v|v')$, ($\gamma < \gamma_i$). Le problème :

$$U^{(1)} = \mathcal{A}' U + (0, f), \quad U(0) = (v_0, v_1) \quad \text{dans } D(a) \times \mathcal{X} \quad (\mathcal{P}_3)$$

\mathcal{B} est anti-adjoint et $\mathcal{A}' - \mathcal{B}$ est borné dans $D(a) \times \mathcal{X}$

$\implies \mathcal{A}'$ génère un \mathcal{C}^0 semi-groupe (Stone + perturbation borné)

$U(0) = (v_0, v_1) \in D(A) \times D(a) = D(\mathcal{A}')$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$

$\implies \mathcal{P}_3$ admet une unique solution dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, D(a) \times \mathcal{X})$

Posant $U = (v, u)$ v est la solution forte de \mathcal{P}

Quelques références

- En Géophysique et Astrophysique :

Backus, G. & M. Rieutord, 2017, Completeness of inertial modes of an incompressible inviscid fluid in a corotating ellipsoid, Phys. Rev. E 95, 053116

Chaljub, E. & Valette, B., 2004, Spectral element modelling of three-dimensional wave propagation in a self-gravitating Earth with an arbitrarily stratified outer core, Geophys. J. Int., 158, 131–141

Chandrasekhar, S. & Lebovitz, N. R., 1962. On the oscillations and the stability of rotating gaseous masses, Astrophys. J., 135, 248-260.

Cowling, T. G. & Newing, R. A., 1949. The oscillations of a rotating star, Astrophys J., 109, 149-158.

Dahlen, F. A., 1968, The normal modes of a rotating, elliptical Earth, Geophys. J. R. astr. Soc. 16, 329-367

Dahlen, F.A. et J. Tromp, 1998, Theoretical Global Seismology, Princeton University Press

Dyson J. & Schutz, B.F., 1979, Perturbations and Stability of Rotating Stars. I. Completeness of Normal Modes, Proc. Royal Soc. London. Series A, 368, 1734, 389-410.

Gilbert, J. F. & Backus, G. E., 1965. The rotational splitting of the free oscillations of the Earth-2, Rev. Geophys., 3, 1-9.

Quelques références

Hough, S.S., 1895, The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell Containing Fluid, Phil. Trans. R. Soc. London, A Vol. 186, p. 469-506.

Ledoux, P., 1951. The non-radial oscillations of gaseous stars and the problem of Beta Canis Majoris, Astrophys. J., 114, 373-384

Love, A. E. H., 1889. On the oscillations of a rotating liquid spheroid and the genesis of the Moon, Phil. Mag., 27,254264.

Poincaré, M. H., 1910, Sur la précession des corps déformables, Bul. Astron., 27

Rieutord, M., Georgeot, B., Valdettaro, L., 2001, Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum, J. Fluid Mech., 435, pp. 103-144

Register, Y. et B. Valette, 2009, Influence of liquid core dynamics on rotationnal modes, Geophys. J. Int, doi :10.1111/j.1365-246X.2008.03996.x

Smith, M. L., 1977, Wobble and nutation of the Earth, Geophys. J. R. astr., 50, 103-140.

Valette, B., 1986, About the influence of pre-stress upon adiabatic perturbation of the Earth, Geophys. J.R. astr. Soc., 85, 179-208.

Valette, B., 1987, Thèse d'Etat ès Sciences, Univ. Paris VI, Spectre des Oscillations libres de la Terre, aspects mathématiques et géophysiques.

Quelques références

Valette, B., 1989, Spectre des Oscillations propres d'un corps élastique auto-gravitant, en rotation uniforme et contenant une partie fluide, C.R.A.S., 1, 109, 419-422.

- En Mathématiques :

Dixmier, J., 1949, Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications, Bull. S. M. F., 77, 11-101

Edmunds, D.E. et W.D. Evans, 1987, Spectral Theory and differential Operators, Oxford Math. Mon.

Gohberg I.C. et M.G. Krein, 1960, The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, 1957 (Russe), J. Am. Math. Soc. Transl. : Series 2 2 (13), 185-264, A.M.S.

Gohberg, I.C., A.S. Markus et A. Fel'dman, 1967, Normally solvable operators and Ideal associated to them, traduit du Russe in Fourteen Papers on Functional Analysis and Differential Equations, p. 63-84, A.M.S.Trans., Series 2, 10.1090/trans2/061/03.

Gohberg I.C. et M.G. Krein, 1971, Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien, Dunod ; 1965 (Russe).

Gohberg, I., Leiterer, J., 2009, Holomorphic Operator Functions of one variable and applications, Birkhauser.

Kato, 1958, Perturbation Theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, J. Anal. Math., 261-321.

Kato, 1966, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer

Markus, A.S., 1988, Introduction to the spectral Theory of Polynomial Operator Pencils, Trans. Math. Mon., Vol. 71, A.M.S.

Menicken R. et Möller, 1984, Root functions, eigenvectors, associated vectors and the inverse of a holomorphic operator function, Arch. Math., Vol.42, 455-463.

Menicken R. et Möller, 2003, Non-self-adjoint Boundary Eigenvalue Problems, North-Holland

Ralston, J. V., 1973, On Stationary Modes in Inviscid Rotating Fluids, J. Math. anal. app., 44, 366-383.

Tretter C., 2008, Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications, Imperial College Press

Valette, B., 1989, Etude d'une classe de problèmes spectraux, C.R.A.S., 1, 309, 785-788.