Dérivée de Lie temporelle en 3D et Dérivée de Lie en 4D

Emmanuelle Rouhaud, Richard Kerner et Benoît Panicaud
Université de technologie de Troyes Sorbonne-Université, Paris

,

Réunion annuelle GDR - GDM,
Faculté des Sciences et Technologies,
La Rochelle, France
26-28 juin 2024

Position du problème

- La dérivée de Lie est un outil précieux dans l'analyse des rapports entre champs de déformations, champs de vitesses et champs vectoriels décrivant les mouvements des solides ou des milieux continus.

Position du problème

- La dérivée de Lie est un outil précieux dans l'analyse des rapports entre champs de déformations, champs de vitesses et champs vectoriels décrivant les mouvements des solides ou des milieux continus.
- Notre but est d'élucider le rapport entre les dérivées de Lie des champs vectoriels en $3D$ dans le cas où ces champs dépendent du temps et les dérivées de Lie en $4D$, dans l'espace-temps.

- La définition mathématique de la dérivée de Lie d'un objet géométrique existant sur une variété différentielle $\mathcal{M}$ fait intervenir un groupe des transformations locales dépendant d'un paramètre t :

$$m \in \mathcal{M}, \quad \varphi_t(m) = m(t), \;\; m(0) = m.$$

- La définition mathématique de la dérivée de Lie d'un objet géométrique existant sur une variété différentielle $\mathcal{M}$ fait intervenir un groupe des transformations locales dépendant d'un paramètre t :

$$m \in \mathcal{M}, \quad \varphi_t(m) = m(t), \;\; m(0) = m.$$

- La famille des transformations locales φ_t engendre un champ vectoriel (un champ de dérivation de l'algèbre de fonctions $C^\infty(\mathcal{M})$ définies sur la variété, selon la formule

$$X_\varphi f = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(m))|_{t=0}. \tag{1}$$

En variant le point m on obtient un champ de vecteur $X(m)$ sur la variété toute entière.

- Considérons maintenant un champ tensoriel quelconque K défini sur la variété $\mathcal{M}$. La *dérivée de Lie* du champ tensoriel K par rapport au champ vectoriel X est définie alors comme suit :

$$\underset{X}{\mathcal{L}} K := \frac{d}{dt}\left(K \cdot \varphi_t - K\right)\Big|_{t=0} . \tag{2}$$

- Considérons maintenant un champ tensoriel quelconque K défini sur la variété $\mathcal{M}$. La *dérivée de Lie* du champ tensoriel K par rapport au champ vectoriel X est définie alors comme suit :

$$\underset{X}{\mathcal{L}} K := \frac{d}{dt}\left(K \cdot \varphi_t - K\right)\Big|_{t=0} . \tag{2}$$

- Un champ tensoriel K est invariant par rapport à $X(m)$ (plus strictement, par rapport aux transformations locales φ_t) si $\underset{X}{\mathcal{L}} K = 0$.

- Considérons maintenant un champ tensoriel quelconque K défini sur la variété $\mathcal{M}$. La *dérivée de Lie* du champ tensoriel K par rapport au champ vectoriel X est définie alors comme suit :

$$\underset{X}{\mathcal{L}} K := \frac{d}{dt} \left(K \cdot \varphi_t - K \right) \Big|_{t=0} . \tag{2}$$

- Un champ tensoriel K est invariant par rapport à $X(m)$ (plus strictement, par rapport aux transformations locales φ_t) si $\underset{X}{\mathcal{L}} K = 0$.
- Mais cette définition abstraite est de peu d'utilité pratique, quand il faut faire des calculs en coordonnées locales.

- Considérons un système des coordonnées curvilignes $x^i, \; i, k.. = 1, 2, 3$ donné. Dans chaque point de l'espace $3D$ on définit une base des 1-formes (différentielles) dx^i, ainsi que sa base duale des champs vectoriels, ∂_k, en postulant $dx^i(\partial_k) = \delta^i_k$.

- Considérons un système des coordonnées curvilignes $x^i, \ i, k.. = 1, 2, 3$ donné. Dans chaque point de l'espace $3D$ on définit une base des 1-formes (différentielles) dx^i, ainsi que sa base duale des champs vectoriels, ∂_k, en postulant $dx^i(\partial_k) = \delta^i_k$.
- On utilise aussi les symboles $\mathbf{e}_i$ pour les vecteurs de base, et $\overset{*}{\mathbf{e}}{}^k$ pour la base des 1-formes, avec la condition de dualité toujours vérifiée,

$$\overset{*}{\mathbf{e}}{}^i(\mathbf{e}_k) = \delta^i_k.$$

- Considérons un système des coordonnées curvilignes $x^i,\ i, k.. = 1, 2, 3$ donné. Dans chaque point de l'espace $3D$ on définit une base des 1-formes (différentielles) dx^i, ainsi que sa base duale des champs vectoriels, ∂_k, en postulant $dx^i(\partial_k) = \delta^i_k$.
- On utilise aussi les symboles $\mathbf{e}_i$ pour les vecteurs de base, et $\overset{*}{\mathbf{e}}{}^k$ pour la base des 1-formes, avec la condition de dualité toujours vérifiée,

$$\overset{*}{\mathbf{e}}{}^i(\mathbf{e}_k) = \delta^i_k.$$

- Ceci vaut aussi pour les bases *non-holonomes*, définies dans le cas général comme

$$\overset{*}{\mathbf{e}}{}^k = A^k_m dx^m, \quad \mathbf{e}_k = \overset{-1}{A}{}^i_k \partial_i, \tag{3}$$

Dans le cas d'un changement des coordonnées locales $x^i \to \tilde{x}^k(x^i)$ la matrice de passage est tout simplément la matrice Jacobienne suivant l'application de la formule de dérivation composée :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \to \quad \tilde{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \mathbf{e}_i. \tag{4}$$

Dans le cas d'une matrice de passage arbitraire (non-holonome) l'égalité des dérivées secondes n'est pas assurée : il se peut que $\partial_i A^j_k \neq \partial_k A^j_i$, ce qui est vérifié quand la matrice de passage A est une matrice Jacobienne des dérivées partielles.

Un champ vectoriel défini sur une variété engendre une transformation infiniésimale des coodonnées locales selon la formule

$$x^i \ \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \epsilon \, X^i(x^k). \tag{5}$$

avec paramètre infinitésimal ϵ. Notons que la matrice de passage entre deux systèmes de coordonnées est dans ce cas

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} = \delta^i_k + \epsilon \, \frac{\partial X^i}{\partial x^k}, \quad \mathrm{car} \ \ d\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \, dx^k. \tag{6}$$

La matrice inverse transforme la base de vecteurs $\tilde{\mathbf{e}}_k$. Trouver l'inverse de la matrice 6 n'est pas facile ; mais si nous ne gardons que la partie linéaire en petit paramètre ϵ, l'inverse de la matrice $\mathbf{1} + \epsilon M$ est donné par l'approximation linéaire :

$$(\mathbf{1} + \epsilon M)^{-1} \simeq \mathbf{1} - \epsilon M, \tag{7}$$

ce qui dans ce cas précis donnera

$$\left(\delta^i_k + \epsilon\, \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right)^{-1} \simeq \delta^i_k - \epsilon\, \frac{\partial X^i}{\partial x^k}, \tag{8}$$

conduisant au résultat (que l'on appelle parfois "pull-back") suivant :

$$\tilde{\mathbf{e}}_k \simeq (\delta^i_k - \epsilon\, \frac{\partial X^i}{\partial x^k})\mathbf{e}_i. \tag{9}$$

- Nous devons comparer les valeurs des composantes du champ vectoriel $Y^i(x^k)$ aux points $\tilde{x}^k = x^k + \epsilon\, X^k(x^m)$ avec ceux en point x^k ; mais il faudra tenir compte du fait que les composantes du champ vectoriel changent, mais sont également exprimées par rapport au nouveau repère local, lui aussi défini en $\tilde{x}^i$.

- Nous devons comparer les valeurs des composantes du champ vectoriel $Y^i(x^k)$ aux points $\tilde{x}^k = x^k + \epsilon\, X^k(x^m)$ avec ceux en point x^k ; mais il faudra tenir compte du fait que les composantes du champ vectoriel changent, mais sont également exprimées par rapport au nouveau repère local, lui aussi défini en $\tilde{x}^i$.
- Formellement, c'est assez simple : $\tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{x}) - \mathbf{Y}(x)$
  plus explicitement,

$$\tilde{Y}^i(x^k + \epsilon X^k(x^j))\, \tilde{\mathbf{e}}_i(x^j + \epsilon X^j(x^m)) - Y^i(x^k)\, \mathbf{e}_i(x^j), \quad (10)$$

Il ne reste qu'à appliquer le développement de Taylor par rapport au petit paramètre ϵ en exprimant le tout dans le même repère $\mathbf{e_k}$.

- En développant dans (10) les composantes Y^k en série de Taylor et en tenant compte de la transformation simultanés de la base locale $\mathbf{e}_i$ définie par la matrice inverse approchée (8) nous obtenons :

$$\tilde{Y}^i(x^k + \epsilon\, X^k(x))\, \tilde{\mathbf{e}}_i(x^j + \epsilon\, X^j(x)) - Y^i(x^k)\, \mathbf{e}_i(x^j)$$

$$\simeq \left[Y^i(x^k) + \epsilon\, \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\, X^k \right] \left[\delta_i^j - \epsilon\, \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right]\, \mathbf{e}_j - Y^i(x^k)\, \mathbf{e}_i \quad (11)$$

- En développant dans (10) les composantes Y^k en série de Taylor et en tenant compte de la transformation simultanés de la base locale $\mathbf{e}_i$ définie par la matrice inverse approchée (8) nous obtenons :

$$\tilde{Y}^i(x^k + \epsilon X^k(x))\,\tilde{\mathbf{e}}_i(x^j + \epsilon X^j(x)) - Y^i(x^k)\,\mathbf{e}_i(x^j)$$

$$\simeq \left[Y^i(x^k) + \epsilon \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} X^k\right] \left[\delta^j_i - \epsilon \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right] \mathbf{e}_j - Y^i(x^k)\,\mathbf{e}_i \quad (11)$$

- En gardant uniquement les termes linéaires en ϵ et en interchangeant les indices de sommation $i \to k$, $k \to i$ on trouve l'expression suivante :

$$\mathbf{Y}(x^k + \epsilon X^k(x)) - \mathbf{Y}(x) \simeq \epsilon \left[X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k\right] \mathbf{e}_i. \quad (12)$$

- En divisant l'expression (12) par ϵ et en passant à la limite $\epsilon \to 0$, nous obtenons la *dérivée de Lie* du champ vectoriel **Y** par rapport au champ de déformation **X**. Cette dérivée est notée par le symbole suivant :

$$\left[X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k\right] \mathbf{e}_i = \left[\mathcal{L}_X Y\right]^i \mathbf{e}_i \tag{13}$$

- En divisant l'expression (12) par ϵ et en passant à la limite $\epsilon \to 0$, nous obtenons la *dérivée de Lie* du champ vectoriel $\mathbf{Y}$ par rapport au champ de déformation $\mathbf{X}$. Cette dérivée est notée par le symbole suivant :

$$\left[X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k\right] \mathbf{e}_i = \left[\mathcal{L}_X Y\right]^i \mathbf{e}_i \tag{13}$$

- On constate immédiatement que

$$\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$$

La dérivée de Lie de Y par rapport à X est souvent notée à l'aide d'un *crochet de Lie* entre deux champs vectoriels :

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = -\left[Y, X\right]. \tag{14}$$

- La loi de composition imposée par le crochet de Lie vérifie la très importante *identité de Jacobi* :

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \qquad (15)$$

- La loi de composition imposée par le crochet de Lie vérifie la très importante *identité de Jacobi* :

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0 \qquad (15)$$

- L'espace linéaire des champs vectoriels interprétés comme dérivations Υ forme naturellement un espace linéaire, car nous avons $(\alpha X+\beta Y)f=\alpha(Xf)+\beta(Yf)$. Doté d'une loi de composition anti-symétrique vérifiant l'identié de Jacobi, cette espace devient une *algèbre de Lie* (de dimension infinie).

- Considérons deux champs vectoriels en 3D, dépendant aussi du temps :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) = X^i(x^k,t)\,\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{x},t) = Y^j(x^k,t)\,\mathbf{e}_j. \tag{16}$$

- Considérons deux champs vectoriels en $3D$, dépendant aussi du temps :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) = X^i(x^k,t)\,\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{x},t) = Y^j(x^k,t)\,\mathbf{e}_j. \tag{16}$$

- Nous devons ici faire une distinction entre deux types de champs pour $\mathbf{Y}$, les champs correspondant à des vecteurs dit objectifs et ceux correspondant à des vecteurs qui ne sont pas objectifs. Cette distinction devient nécessaire car le changement des coordonnées locales $x^i \to \tilde{x}^k(t,x^i)$ fait aussi intervenir le temps et correspond à un changement de référentiel.

Un vecteur est dit objectif, si dans le cas d'un changement de référentiel $x^i \to \tilde{x}^k(t, x^i)$ on a :

$$Y^i \mathbf{e}_i = \tilde{Y}^i \tilde{\mathbf{e}}_k \tag{17}$$

et classiquement, les composantes de ce vecteur se transforment en utilisant la matrice Jacobienne :

$$\tilde{Y}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} Y^k. \tag{18}$$

Certains vecteurs, dit non-objectifs, ne respectent pas cette règle de transformation ; c'est le cas pour la vitesse V et pour ses dérivées par rapport au temps (accélération...). Il faut alors établir une règle de transformation *ad hoc*. Pour la vitesse on a en effet :

$$V^i \mathbf{e}_i = \mathbf{V}_e + \tilde{V}^i \tilde{\mathbf{e}}_i \tag{19}$$

où $\mathbf{V}_e$ correspond à la vitesse d'entrainement du référentiel $\tilde{\mathbf{e}}_i$ par rapport au référentiel $\mathbf{e}_i$.

Supposons que le champ $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ induit une déformation infinitésimale $\delta\mathbf{x} = \epsilon\mathbf{X}$, définissant ainsi les nouvelles variables $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$. On peut alors calculer la variation infinitésimale du champ $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$, calculée *au même moment* t, et l'on arrive à la définition usuelle de la dérivée de Lie du champ $\mathbf{Y}$ par rapport au champ de déformation $\mathbf{X}$, prise au moment t :

$$\mathcal{L}_X Y = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \left[X^i \partial_i Y^k - Y^l \partial_l X^k \right] \mathbf{e}_k. \tag{20}$$

C'est la dérivée de Lie dite "autonome". Il existe bien une anti-symétrie entre les champs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ et on a bien :

$$\mathcal{L}_X Y = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad \text{et donc} \;\; \mathcal{L}_X X = [\mathbf{X}, \mathbf{X}] = 0 \tag{21}$$

- Mais la question plus intéressante est de savoir comment calculer la variation du champ $\mathbf{Y}$ après un temps infinitésmal δt sous l'effet de déplacement induit par la variation du champ de déformation $\mathbf{X}$, qui sera alors remplacé par $\delta\mathbf{X} = \partial_t \mathbf{X} \delta t$.

- Mais la question plus intéressante est de savoir comment calculer la variation du champ $\mathbf{Y}$ après un temps infinitésmal δt sous l'effet de déplacement induit par la variation du champ de déformation $\mathbf{X}$, qui sera alors remplacé par $\delta\mathbf{X} = \partial_t \mathbf{X}\delta t$.
- Nous devons alors faire une distinction entre les deux types de champs pour $\mathbf{Y}$, les champs correspondant à des vecteurs dit objectifs et ceux correspondant à des vecteurs qui ne sont pas objectifs, comme par exemple un champ de vitesses, ce dernier cas étant traité dans la section qui suit.

- On peut utiliser les formules établies précédemment en remplaçant ϵX^k par $\partial_t X^k \, \delta t$, ce qui revient à remplacer le champ des déformations par le champ de vitesses. La variation complète du champ $\mathbf{Y}$ pendant le temps δt est donc :

$$\delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t + \delta t, \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\delta t) - \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}) \tag{22}$$

- On peut utiliser les formules établies précédemment en remplaçant ϵX^k par $\partial_t X^k\ \delta t$, ce qui revient à remplacer le champ des déformations par le champ de vitesses. La variation complète du champ $\mathbf{Y}$ pendant le temps δt est donc :

$$\delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t+\delta t, \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\delta t) - \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}) \tag{22}$$

- Comme dans le cas non dépendant du temps, pour trouver l'expression en coordonnées locales, il faudra que toutes les composantes soient exprimées par rapport au même repère. On a donc : $\mathbf{Y} = Y^i(t, x^j)\mathbf{e}_i$,

$$\mathbf{Y}(t+\delta t, x^j + \frac{\partial X^j}{\partial t}\delta t) = Y^k(t+\delta t, \tilde{x}^j)\tilde{\mathbf{e}}_k(t+\delta t, \tilde{x}^j). \tag{23}$$

- Pour rendre les formules plus lisibles, introduisons le *champ de vitesses* engendré par le champ vectoriel $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ dépendant du temps en posant :

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \quad \tilde{x}^i = x^i + V^i \, \delta t, \tag{24}$$

- Pour rendre les formules plus lisibles, introduisons le *champ de vitesses* engendré par le champ vectoriel $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ dépendant du temps en posant :

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \quad \tilde{x}^i = x^i + V^i \, \delta t, \tag{24}$$

- et nous pourrons ecrire

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} = \delta^i_k + \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \, \delta t, \quad \tilde{\mathbf{e}}_k \simeq \mathbf{e}_k - \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i \, \delta t \tag{25}$$

En reproduisant le raisonnement standard, nous arrivons à la formule pour la dérivée de Lie du champ **Y** induit par la variation dans le temps et le transport consécutif le long du champ $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$:

$$\left(\mathcal{L}_{X(t)} Y\right)^k = \frac{\partial Y^k}{\partial t} + \frac{\partial X^i}{\partial t} \partial_i Y^k - Y^i \partial_i \frac{\partial X^k}{\partial t} = \frac{\partial Y^k}{\partial t} + [\mathbf{V},\ \mathbf{Y}]^k . \tag{26}$$

Cette dérivée de Lie est parfois appelée dérivée de Lie non autonome. Notons que dans ce cas, pour transporter **Y** exprimé en 23, en utilisant 25, il faut que **Y** soit objectif. Ceci introduit une dissymétrie entre **X** et **Y**. En effet, **V** est un champ de vitesse (engendré par **X**) et n'est donc pas objectif alors que **Y** est objectif. On ne peut donc pas calculer la dérivée de Lie de **X** par rapport à **X** en utilisant 26.

Pour le cas du calcul de la dérivée de Lie d'un champ de vitesse, il faut prendre en compte la vitesse d'entrainement du repère donnée par :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\delta t \quad (\text{ avec } \tilde{x}^i = x^i + V^i\ \delta t) \tag{27}$$

On a donc $\mathbf{Y} = Y^i(t, x^j)\,\mathbf{e}_i$, et

$$\mathbf{Y}(t+\delta t, x^j + \frac{\partial X^j}{\partial t}\delta t) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\delta t = Y^k(t+\delta t, \tilde{x}^j)\tilde{\mathbf{e}}_k(t+\delta t, \tilde{x}^j). \tag{28}$$

et la dérivée de Lie d'un champ de vitesse **Y** dans un champ vectoriel $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ engendrant un champ de vitesse **V** est :

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{X(t)} Y\right)^k &= \frac{\partial Y^k}{\partial t} + \frac{\partial X^i}{\partial t}\partial_i Y^k - Y^i \partial_i \frac{\partial X^k}{\partial t} - \frac{\partial V^k}{\partial t} \\
&= \frac{\partial Y^k}{\partial t} + [\mathbf{V},\ \mathbf{Y}]^k - \frac{\partial V^k}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{29}$$

On retrouve donc une forme d'anti-symétrie dans la relation car on a bien :

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{X(t)} V\right)^k &= \frac{\partial V^k}{\partial t} + \frac{\partial X^i}{\partial t}\partial_i V^k - V^i \partial_i \frac{\partial X^k}{\partial t} - \frac{\partial V^k}{\partial t} \\
&= \frac{\partial V^k}{\partial t} + V^i \partial_i V^k - V^i \partial_i V^k - \frac{\partial V^k}{\partial t} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

La tâche suivante est l'établissement d'un lien ou d'une correspondance entre la dernière formule et la dérivée de Lie dans l'espace de Minkowski en $4D$. Étant donnés deux champs 4-vectoriels X^μ, Y^ν dépendant du quadrivecteur position

$$x^\mu = [x^0, x^i] = [ct, x, y, z] \;\; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \;\; i, j, ... = 1, 2, 3,$$

la dérivée de Lie du champ Y par rapport au champ de déplacement X est alors donnée par la formule classique

$$\mathcal{L}_X Y = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu]\, e_\nu \tag{31}$$

ou encore

$$X^\mu(x^\lambda), \;\; Y^\nu(x^\lambda), \;\; \rightarrow \;\; (\mathcal{L}_X Y)^\lambda = X^\mu \partial_\mu Y^\lambda - Y^\mu \partial_\mu X^\lambda. \tag{32}$$

- Le problème qui se pose d'emblée est l'interprétation de la variable t ayant pour dimension le temps - mais de quel temps s'agit il ? ? Pour une particule massive on peut parler soit de son *temps propre*, mesuré le long de sa trajectoire $4D$, ou du temps de l'observateur Galiléen qui voit le mouvement de la particule.

- Le problème qui se pose d'emblée est l'interprétation de la variable t ayant pour dimension le temps - mais de quel temps s'agit il ? ? Pour une particule massive on peut parler soit de son *temps propre*, mesuré le long de sa trajectoire $4D$, ou du temps de l'observateur Galiléen qui voit le mouvement de la particule.
- Mais dans le cas d'un milieu continu, qui peut être considéré comme une multitude de particules, le temps de chaque élément n'est pas forcément le même ; ceci dit, l'hypothèse de milieu continu implique que la vitesse et les autres objets sont continus et dérivables autant de fois que le nécessite les calculs

On peut néanmoins choisir un *feuilletage* de l'espace-temps plongé dans l'espace Minkowskien.

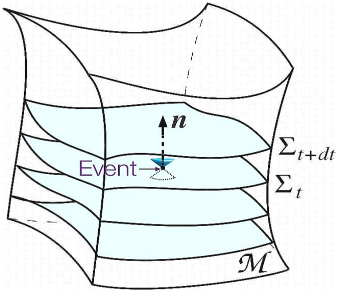

Figure – Un feuilletage en $4D$ est une famille des sous-variétés spatiales paramétrées avec un temps commun t

- On a pris l'habitude, dans la littérature courante, d'utiliser le paramètre $\tau = ct$ afin de donner à la quatrième dimension (coordonnée temporelle) la même dimension qu'aux trois dimensions spatiales restantes (x, y, z). Ce qui conduit à la quadri-vitesse $u^{\mu} = [1, \frac{\mathbf{v}}{c}]$.

- On a pris l'habitude, dans la littérature courante, d'utiliser le paramètre $\tau = ct$ afin de donner à la quatrième dimension (coordonnée temporelle) la même dimension qu'aux trois dimensions spatiales restantes (x, y, z). Ce qui conduit à la quadri-vitesse $u^\mu = [1, \frac{\mathbf{v}}{c}]$.
- Nous proposons de garder le temps de l'observateur Galiléen comme paramètre physique, en gardant la première composante de la position dans l'espace-temps ayant la dimension spatiale, ct. En dérivant par rapport au temps "réel", les quatre composantes de la quadri-vitesse auront la même dimension :

$$u^\mu = [u^0, \mathbf{v}] = [\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}] = [c, \mathbf{v}]. \tag{33}$$

- Vu ainsi, on peut mieux comprendre pourquoi les effets gravitationnels sont aussi faibles par rapport aux forces qui agissent à l'échelle microscopique et décident de tout dans notre quotidien. Car selon l'expression (33) ci-dessus, à chaque instant nous avançons dans la quatrième dimension avec la vitesse de la lumière c, parcourant chaque seconde 300 000 kilomètres.

- Vu ainsi, on peut mieux comprendre pourquoi les effets gravitationnels sont aussi faibles par rapport aux forces qui agissent à l'échelle microscopique et décident de tout dans notre quotidien. Car selon l'expression (33) ci-dessus, à chaque instant nous avançons dans la quatrième dimension avec la vitesse de la lumière c, parcourant chaque seconde 300 000 kilomètres.
- Si les effets gravitationnels sont négligeables comparés aux actions des forces électromagnétiques ou nucléaires (fortes ou faibles), c'est parce que la vitesse de la lumière c, constante universelle, est si élevée comparée aux vitesses observées dans le monde macroscopique.

Car mesurée avec le temps t, notre vitesse instantanée dans la direction temporelle (la quatrième dimension) est toujours la même, égale à la vitesse de la lumière, par rapport à laquelle les vitesses rencontrées sur Terre, et aussi dans le système solaire, paraissent totalement négligeables.
La vitesse de la Terre sur son orbite autour du Soleil est d'environ 30 km/sec, celle de la Lune dans son orbite autour de la Terre n'est qu'un km/sec., soit de l'ordre de 10^{-4} c ou 10^{-5} c.
Portés à l'aide d'un stylo sur un graphique, les déviations relatives des trajectoires quadridimensionnelles seraient beaucoup plus minuscules que le trait de crayon le plus fin.

- Voici les vitesses orbitales moyennes de quelques planètes du Système Solaire :

  Mercure : 48 km/s, avec période de $\simeq$ 88 jours,
  Vénus : 35 km/s, avec période de $\simeq$ 225 jours,
  Terre : 30 km/s, avec période de $\simeq$ 365 jours,
  Mars : 24 km/s, avec période de $\simeq$ 687 jours.

- Voici les vitesses orbitales moyennes de quelques planètes du Système Solaire :

  Mercure : 48 km/s, avec période de $\simeq$ 88 jours,
  Vénus : 35 km/s, avec période de $\simeq$ 225 jours,
  Terre : 30 km/s, avec période de $\simeq$ 365 jours,
  Mars : 24 km/s, avec période de $\simeq$ 687 jours.
- Toutes sont de l'ordre de $10^{-4}\,c$, ce qui fait que la différence entre le temps "universel" dt et le temps propre ds est de l'ordre v^2/c^2, soit 10^{-8}, totalement négligeable en mécanique courante.

On rappelle la formule explicite pour la dérivée de Lie du champ 4D Y par rapport au champ 4D X :

$$X^\mu(x^\lambda),\quad Y^\nu(x^\lambda),\ \rightarrow\quad (\mathcal{L}_X Y)^\lambda = X^\mu \partial_\mu Y^\lambda - Y^\mu \partial_\mu X^\lambda. \tag{34}$$

En vue de ce qui a été dit, nous allons négliger la différence entre le temps propre *ds* le long de chaque ligne d'univers, en utilisant le "temps universel" *ct* pour paramétrer les champs quadri-dimensionnels, et, en reprenant l'approche classique admettre que les composantes temporelles du *champ de vitesse* X sont égales à :

$$X^\mu = \left[X^0 = 1, X^i(t,\ \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v^i}}{c} \right], \tag{35}$$

La dérivée de Lie d'un champ 4D Y par rapport au champ 4D X devient alors :

$$(\mathcal{L}_X Y)^\lambda = 1\frac{\partial Y^\lambda}{\partial(ct)} + \frac{\mathbf{v^i}}{c}\partial_i Y^\lambda - Y^0\frac{\partial X^\lambda}{\partial(ct)} - Y^i \partial_i X^\lambda. \tag{36}$$

- Pour la composante temporelle, $\lambda = 0$, l'équation (36) se réduit à une identité triviale $0 = 0$:

$$(\mathcal{L}_X Y)^0 = c\frac{\partial Y^0}{\partial t} + X^i \partial_i Y^0 - c\frac{\partial X^0}{\partial t} - Y^i \partial_i X^0 = 0 \tag{37}$$

puisque nous avons posé $X^0 = Y^0 = c = \text{Const.}$

- Pour la composante temporelle, $\lambda = 0$, l'équation (36) se réduit à une identité triviale $0 = 0$:

$$(\mathcal{L}_X Y)^0 = c\frac{\partial Y^0}{\partial t} + X^i \partial_i Y^0 - c\frac{\partial X^0}{\partial t} - Y^i \partial_i X^0 = 0 \tag{37}$$

puisque nous avons posé $X^0 = Y^0 = c = \text{Const}$.

- Pour la composante spatiale, $\lambda = k$, l'équation (36) devient

$$(\mathcal{L}_X Y)^k = \frac{\partial Y^k}{\partial (ct)} + \frac{\mathbf{v^i}}{c}\partial_i Y^k - Y^0 \frac{\partial(\frac{\mathbf{v^i}}{c})}{\partial (ct)} - Y^i \partial_i (\frac{\mathbf{v^i}}{c}). \tag{38}$$

ou en multipliant par c

$$c(\mathcal{L}_X Y)^k = \frac{\partial Y^k}{\partial t} + v^i \partial_i Y^k - \frac{Y^0}{c}\frac{\partial v^i}{\partial t} - Y^i \partial_i v^i. \tag{39}$$

Pour continuer, il faut faire une hypothèse sur la nature du champ Y :

- Soit Y est un champ tel que Y^0 est petit devant c et l'équation (39) devient :

$$c(\mathcal{L}_X Y)^k = \frac{\partial Y^k}{\partial t} + v^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i v^i. \tag{40}$$

comparable à la dérivée de Lie non autonome établie pour la 3D et non symétrique, Pour continuer, il faut faire une hypothèse sur la nature du champ Y :

- Soit Y est un champ tel que Y^0 est petit devant c et l'équation (39) devient :

$$c(\mathcal{L}_X Y)^k = \frac{\partial Y^k}{\partial t} + v^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i v^i. \tag{40}$$

comparable à la dérivée de Lie non autonome établie pour la 3D et non symétrique,

- Soit Y est aussi du type champ de vitesse avec $Y^\mu = \left[Y^0 = 1, Y^i = \frac{Y^i_{3D}}{c}\right]$ et 39 devient :

$$c(\mathcal{L}_X Y)^\lambda = \frac{\partial Y^\lambda}{\partial t} + \mathbf{v^i} \partial_\mathbf{i} \mathbf{Y}^\lambda - \frac{\partial \mathbf{X}^\lambda}{\partial \mathbf{t}} - \mathbf{Y^i_{3D}} \partial_\mathbf{i} \mathbf{X}^\lambda. \tag{41}$$

comparable à l'équation 29 établie pour la 3D. Cette expression est manifestement antisymétrique, comme il se doit :

$$(\mathcal{L}_X Y)^k = -(\mathcal{L}_Y X)^k. \tag{42}$$

Dérivée de Lie d'une 1-forme

Pour établir la dérivée de Lie d'une 1-forme α dans un champ de vecteur X on utilise le fait que $\alpha_i X^i = a$ où a est un champ scalaire et :

$$\mathcal{L}_X a = X^k \partial_k a \tag{43}$$

$$\mathcal{L}_X(\alpha_i X^i) = X^k \partial_k(\alpha_i X^i) \tag{44}$$

$$\alpha_i \mathcal{L}_X(X^i) + X^i \mathcal{L}_X(\alpha_i) = X^k \left[\alpha_i \partial_k X^i + X^i \partial_k \alpha_i\right] \tag{45}$$

$$X^k \left[\alpha_i \partial_k X^i + X^i \partial_k \alpha_i - \mathcal{L}_X(\alpha_k)\right] = 0 \tag{46}$$

alors

$$\mathcal{L}_X(\alpha_k) = X^i \partial_k \alpha_i + \alpha_i \partial_k X^i, \tag{47}$$

la dérivée de Lie vérifiant la règle de Leibniz et connaissant la dérivée de Lie d'un champ scalaire et d'un champ de vecteur.

- On prouve aussi facilement la formule pour la dérivée de Lie d'un tenseur deux fois covariant, par exemple le tenseur métrique :

$$(\mathcal{L}_X\, g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j X^k + g_{kj} \partial_i X^k. \tag{48}$$

- On prouve aussi facilement la formule pour la dérivée de Lie d'un tenseur deux fois covariant, par exemple le tenseur métrique :

$$(\mathcal{L}_X\, g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{ik}\partial_j X^k + g_{kj}\partial_i X^k. \tag{48}$$

- en utilisant la définition des symboles de Christoffel de la métrique g_{ij} ,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right),$$

on trouve la formule plus élégante :

$$(\mathcal{L}_X\, g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i. \tag{49}$$

Si un tenseur métrique **g** est défini, on peut construire le dual $X_k = g_{kj}X^j$ du champ de vecteur X et calculer

$$\mathcal{L}_X(X_k) = X^i\partial_k X_i + X_i\partial_k X^i, \tag{50}$$

$$\mathcal{L}_X(X_k) = X^i\partial_k X_i + X_i\partial_k(g^{ij}X_j), \tag{51}$$

$$\mathcal{L}_X(X_k) = X^j(\partial_k X_j + \partial_k X_j), \tag{52}$$

ou avec la règle de Leibniz :

$$\mathcal{L}_X(g_{kj}X^j) = X^j\mathcal{L}_X(g_{kj}) \tag{53}$$

qui est différent de zéro. Remarque :

$$\mathcal{L}_X(g_{kj}) = \nabla_k X_j + \nabla_j X_k \tag{54}$$

Dérivée de Lie du dual d'un champ de vitesse

Ce qui vient d'être établi est valable en 3D quand les champs ne dépendent pas du temps. On cherche maintenant à calculer la dérivée de Lie du dual du champ de vecteur vitesse V_i en 3D ou u_μ en 4D dans le champ de vitesse correspondant, c'est à dire pour la 3D :

$$\mathcal{L}_V(V_i) \tag{55}$$

sachant que V est un champ de vitesse qui dépend du temps, et pour la 4D

$$\mathcal{L}_u(u_\mu) \tag{56}$$

En 4D, c'est assez direct, on peut montrer que :

$$\mathcal{L}_u(u)_\mu = a_\mu \tag{57}$$

où a est le champ d'accélération. En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(u)_\mu &= \mathcal{L}_u(u^\alpha g_{\mu\alpha}) \\ &= u^\alpha \mathcal{L}_u(g_{\mu\alpha}) \\ &= u^\alpha(\partial_\mu u_\alpha + \partial_\alpha u_\mu) \\ &= u^\alpha \partial_\alpha u_\mu \\ &= a_\mu \end{aligned} \tag{58}$$

Peut on retrouver un équivalent pour la 3D ? Pour cela il faut reprendre le raisonnement suivi pour établir la dérivée de Lie d'une 1-forme appliqué maintenant au dual de V dans un champ de vecteur V, V étant un champ de vitesse qui dépend du temps. On a alors :

$$\mathcal{L}_V(V_i V^i) = \frac{d(V_i V^i)}{dt} \tag{59}$$

$$V_i(\mathcal{L}_V V)^i + V^i(\mathcal{L}_V V)_i = V_i \frac{dV^i}{dt} + V^i \frac{dV_i}{dt} \tag{60}$$

On rappelle l'équation (30) obtenue au début de cet exposé :

$$\left(\mathcal{L}_{V(t)} V\right)^k = \frac{\partial V^k}{\partial t} + V^i \partial_i V^k - V^i \partial_i V^k - \frac{\partial V^k}{\partial t} = 0 \tag{61}$$

On a donc :

$$(\mathcal{L}_V V)_i = 2\frac{dV_i}{dt} = 2a_i \tag{62}$$