Une brève introduction aux dérivations covariantes

Patrick Verovic

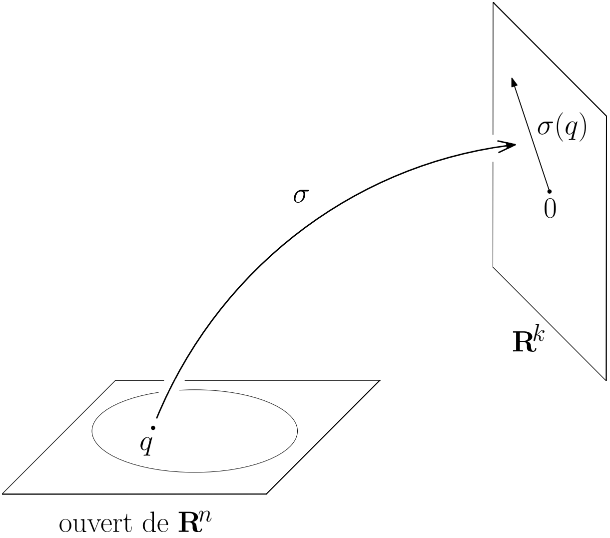
LAMA – UMR 5127 (CNRS) – Université Savoie Mont Blanc (France)

GDR « Géométrie différentielle et mécanique » (n° 2043)
La Rochelle, 26 – 28 juin 2024

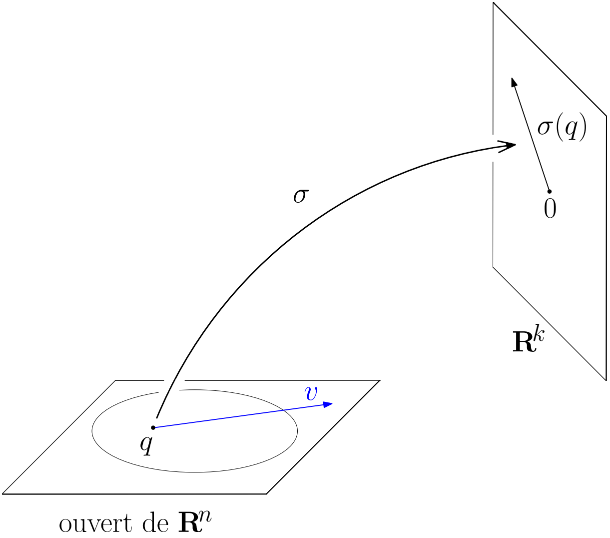
Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

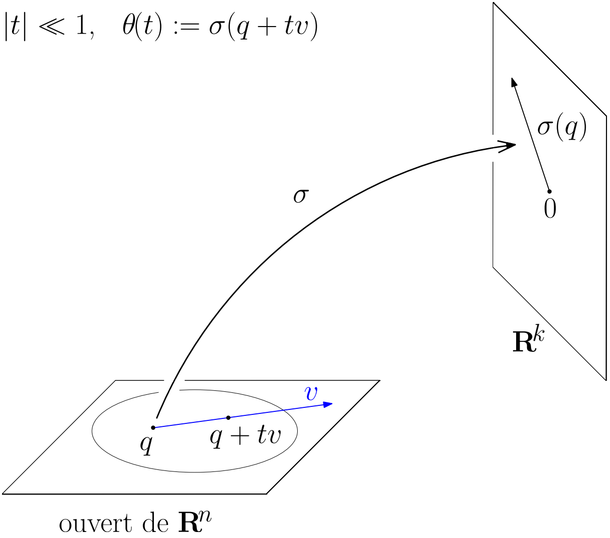
Introduction



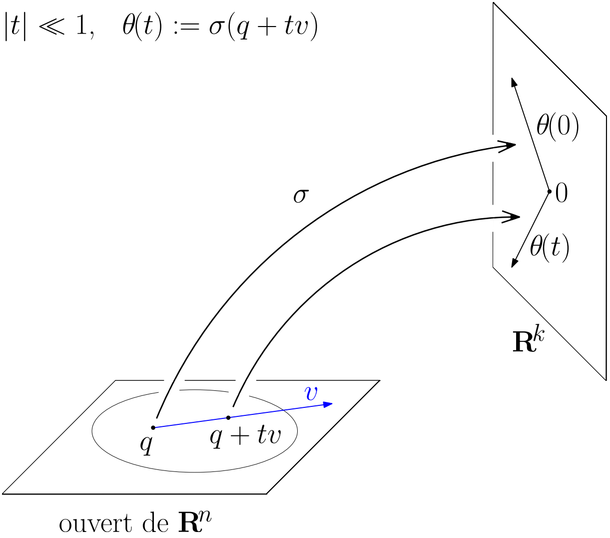
Introduction



$$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$$

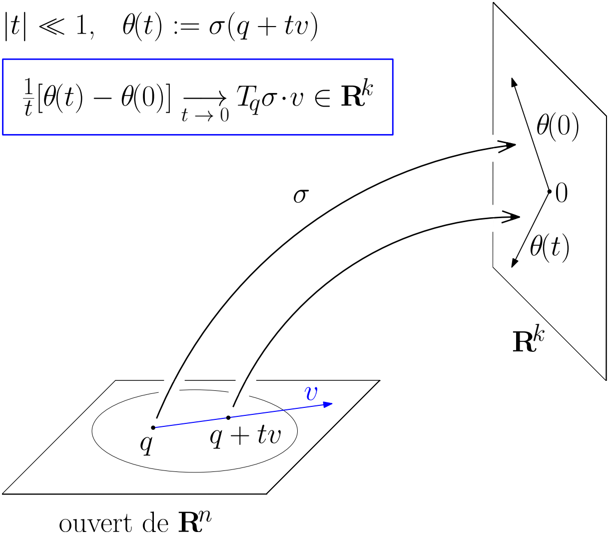


$$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q+tv)$$

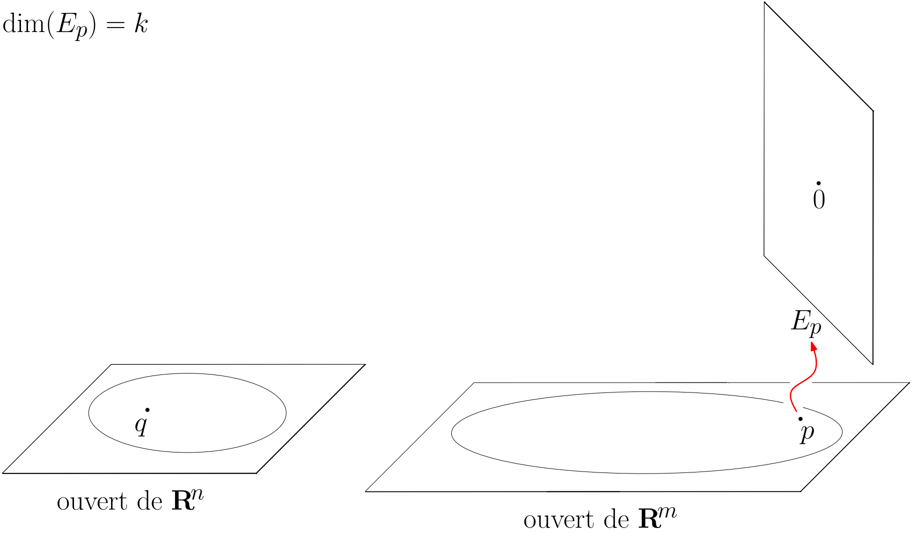


$$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$$

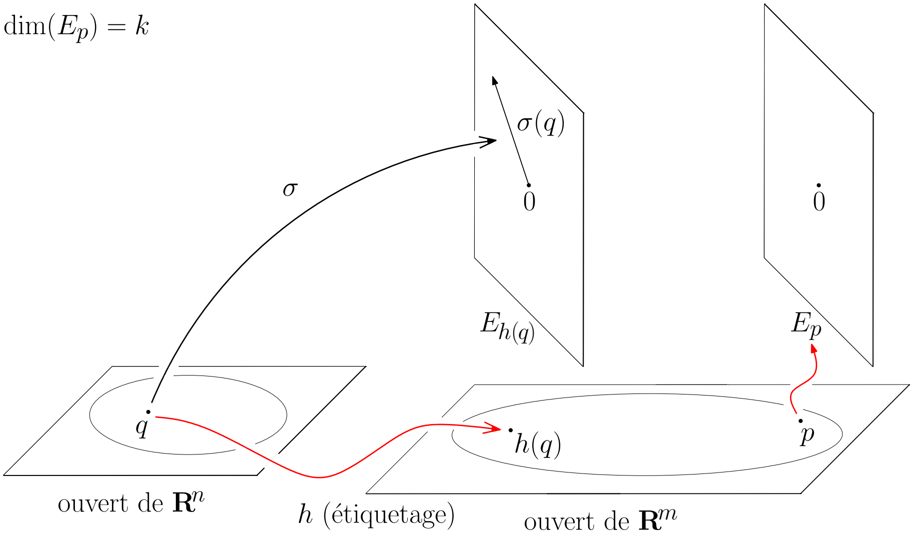
$$\boxed{\frac{1}{t}[\theta(t) - \theta(0)] \underset{t \to 0}{\longrightarrow} T_q\sigma \cdot v \in \mathbf{R}^k}$$



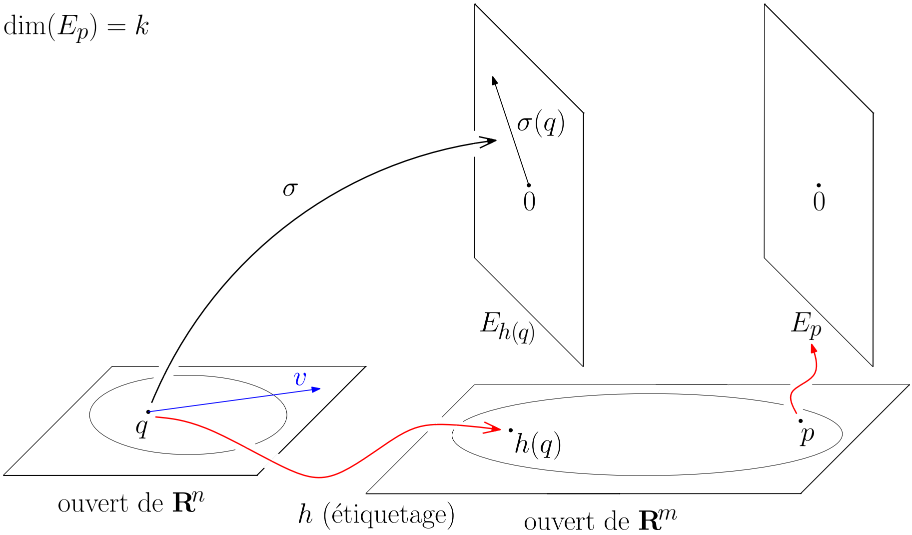
$\dim(E_p) = k$



$\dim(E_p) = k$

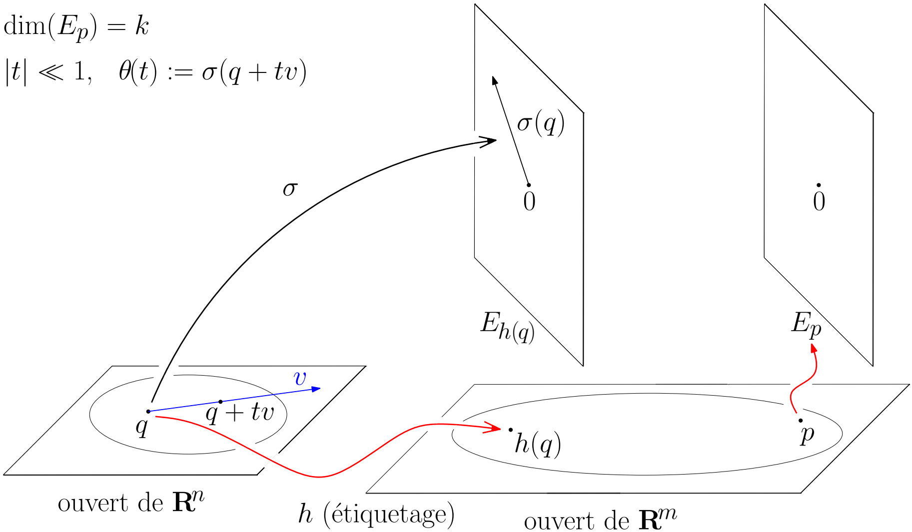

$\sigma(q)$
σ
0
0
$E_{h(q)}$
E_p
q
$h(q)$
p
ouvert de $\mathbf{R}^n$
h (étiquetage)
ouvert de $\mathbf{R}^m$

$\dim(E_p) = k$


$\sigma(q)$
0
0
σ
$E_{h(q)}$
E_p
v
q
$h(q)$
p
ouvert de $\mathbf{R}^n$
h (étiquetage)
ouvert de $\mathbf{R}^m$

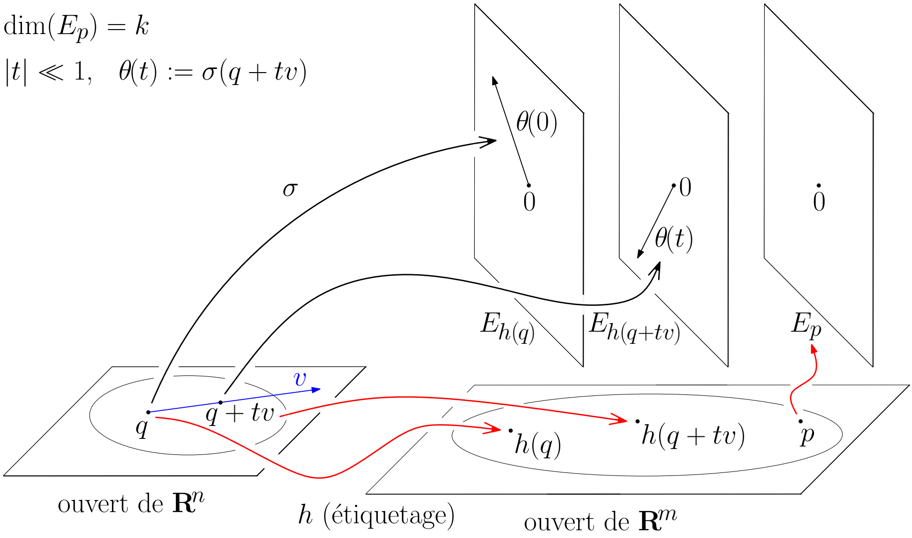
$\dim(E_p) = k$

$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$



$\dim(E_p) = k$

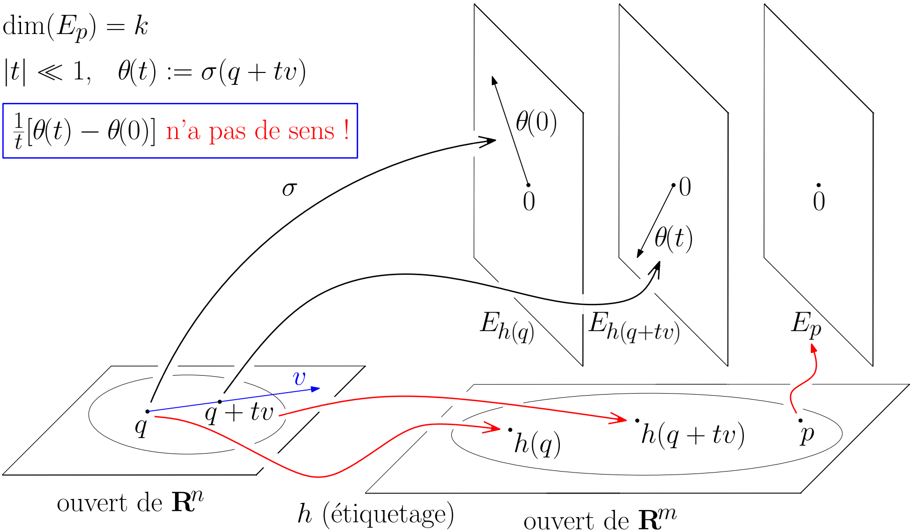
$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$



$\dim(E_p) = k$

$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$

$\boxed{\frac{1}{t}[\theta(t) - \theta(0)] \text{ n'a pas de sens !}}$

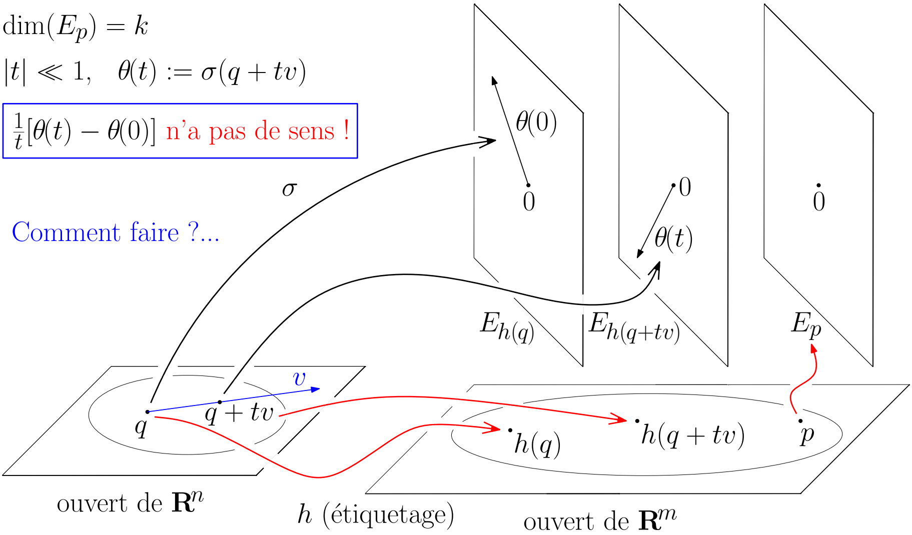


$\dim(E_p) = k$

$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$

$\boxed{\frac{1}{t}[\theta(t) - \theta(0)] \text{ n'a pas de sens !}}$

Comment faire ?...



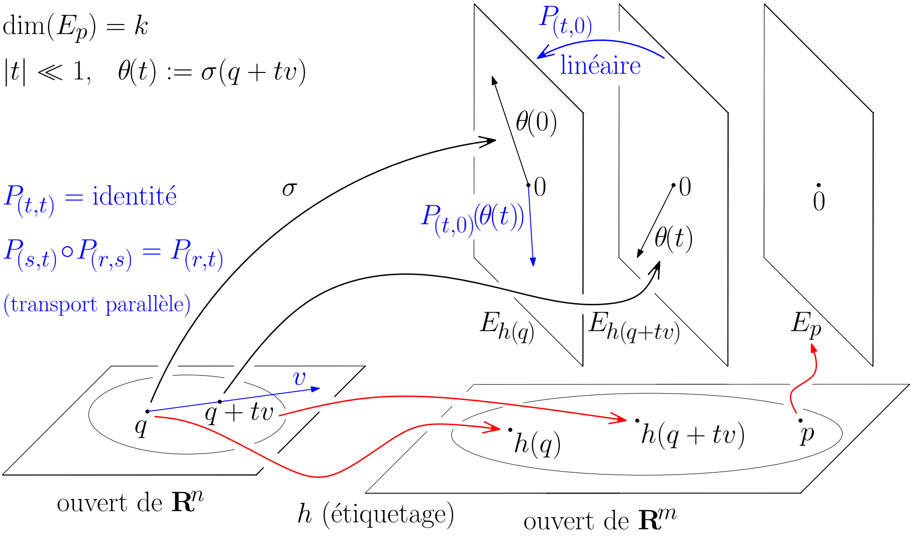
$\dim(E_p) = k$

$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$

$P_{(t,t)} = \text{identité}$

$P_{(s,t)} \circ P_{(r,s)} = P_{(r,t)}$

(transport parallèle)



$\dim(E_p) = k$

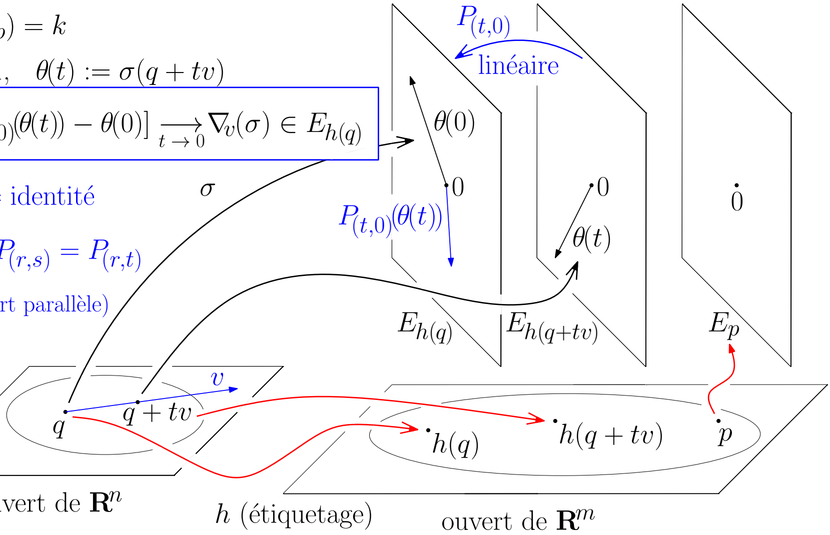
$|t| \ll 1, \quad \theta(t) := \sigma(q + tv)$

$$\boxed{\frac{1}{t}[P_{(t,0)}(\theta(t)) - \theta(0)] \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \nabla_v(\sigma) \in E_{h(q)}}$$

$P_{(t,t)} = \text{identité}$

$P_{(s,t)} \circ P_{(r,s)} = P_{(r,t)}$

(transport parallèle)



Plan de l'exposé

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné une variété lisse N et une application lisse $h : N \longrightarrow M$, on note $\Gamma_h(N, E)$ le sous-module sur $\mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$ de $\mathrm{C}^\infty(N, E)$ constitué des *sections lisses* de (E, M, π) *le long* de h (applications lisses $\sigma : N \longrightarrow E$ qui vérifient $\pi \circ \sigma = h$).

Lorsqu'on a $N \coloneqq M$ et $h \coloneqq \mathrm{I}_M$, l'ensemble $\Gamma_h(N, E)$ se réduit à celui des sections lisses $\Gamma(E)$ de (E, M, π).

Lorsqu'on a $E \coloneqq TM$ et $\pi \coloneqq \tau_M$, l'ensemble $\Gamma(E)$ n'est autre que celui $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs lisses sur M.

Lorsqu'on a $(E, M, \pi) \coloneqq (\mathbf{R}, \{0\}, 0)$ et $h \coloneqq 0$, l'ensemble $\Gamma_h(N, E)$ est égal à $\mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$.

Définition (Koszul)

On dit qu'une application $\nabla : TN \times \Gamma_h(N,E) \longrightarrow E$ *est une* dérivation covariante *sur* (E, M, π) le long *de* h *lorsqu'elle vérifie les cinq propriétés suivantes :*

- *Pour chaque* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$*, l'application partielle* $\nabla_{(\cdot)}(\sigma) : TN \longrightarrow E$ *est un morphisme du fibré vectoriel* (TN, N, τ_N) *dans le fibré vectoriel* (E, M, π) *au-dessus de* h.
- $\nabla_{v+w}(\sigma) = \nabla_v(\sigma) + \nabla_w(\sigma)$ *pour tous* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$ *et* $v, w \in TN$ *vérifiant* $\tau_N(v) = \tau_N(w)$.
- $\nabla_{\lambda v}(\sigma) = \lambda \nabla_v(\sigma)$ *pour tous* $\lambda \in \mathbf{R}$, $v \in TN$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$.
- $\nabla_v(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_v(\sigma_1) + \nabla_v(\sigma_2)$ *pour tous* $v \in TN$ *et* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N,E)$ *vérifiant* $(\sigma_1, \sigma_2) \in (E \times_M E)^N$.
- $\nabla_v(f\sigma) = f(q)\nabla_v(\sigma) + (T_q f \cdot v)\sigma(q)$ *(règle de Leibniz)* *pour tous* $q \in N$, $v \in T_q N$, $f \in \mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$.

Lorsqu'on a $N \coloneqq M$ et $h \coloneqq \mathrm{I}_M$, on dit tout simplement que ∇ est une dérivation covariante sur (E, M, π).

Définition

On dit qu'une application $\nabla : \mathfrak{X}(N) \times \Gamma_h(N,E) \longrightarrow \Gamma_h(N,E)$ *est un* opérateur de Koszul *sur* (E, M, π) le long *de* h *lorsqu'elle vérifie les quatre propriétés suivantes :*

- $\nabla_{X+Y}(\sigma) = \nabla_X(\sigma) + \nabla_Y(\sigma)$ *pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$.
- $\nabla_{fX}(\sigma) = f\nabla_X(\sigma)$ *pour tous* $f \in \mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$, $X \in \mathfrak{X}(N)$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$.

  (Ces deux points signifient donc que pour chaque $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$ *l'application partielle* $\nabla_{(.)}(\sigma) : \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \Gamma_h(N,E)$ *est linéaire relativement à* $\mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$.*)*
- $\nabla_X(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_X(\sigma_1) + \nabla_X(\sigma_2)$

  pour tous $X \in \mathfrak{X}(N)$ *et* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N,E)$ *vérifiant* $(\sigma_1, \sigma_2) \in (E \times_M E)^N$.
- $\nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X(\sigma) + (X \cdot f)\sigma$ *(règle de Leibniz)*

  pour tous $X \in \mathfrak{X}(N)$, $f \in \mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$ *et* $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$.

Lorsqu'on a $N \coloneqq M$ et $h \coloneqq \mathrm{I}_M$, on dit tout simplement que ∇ est un opérateur de Koszul sur (E, M, π).

Soient $\nabla : TN \times \Gamma_h(N,E) \longrightarrow E$ une application et $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$ telles que l'application partielle $\nabla_{(\cdot)}(\sigma) : TN \longrightarrow E$ soit un morphisme du fibré vectoriel (TN, N, τ_N) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de h.

Pour tous $X \in \mathfrak{X}(N)$, on peut donc poser

$$\boldsymbol{\nabla}_X(\sigma) \coloneqq \nabla_{(\cdot)}(\sigma) \circ X \in \Gamma_h(N,E) .$$

Proposition

Si ∇ est une dérivation covariante sur (E, M, π) le long de h, alors l'application $\boldsymbol{\nabla} : \mathfrak{X}(N) \times \Gamma_h(N,E) \longrightarrow \Gamma_h(N,E)$ ainsi définie est un opérateur de Koszul sur (E, M, π) le long de h qui est dit associé à ∇.

Soient $k \geqslant 1$ un entier, (E_1, M_1, π_1), ..., (E_k, M_k, π_k) des fibrés vectoriels, et $h_1 : N \longrightarrow M_1$, ..., $h_k : N \longrightarrow M_k$ des applications lisses.

Proposition

Étant donné une application $\boldsymbol{B} : \Gamma_{h_1}(N, E_1) \times \cdots \times \Gamma_{h_k}(N, E_k) \longrightarrow \Gamma_h(N, E)$ qui est multilinéaire relativement à $\mathrm{C}^\infty(N, \mathbf{R})$, on a

$$[\boldsymbol{B}(\sigma_1 \,, \ldots \,, \sigma_k)](q) = [\boldsymbol{B}(\theta_1 \,, \ldots \,, \theta_k)](q) \in E_{h(q)}$$

pour tous $q \in N$ et $\sigma_1, \theta_1 \in \Gamma_{h_1}(N, E_1)$, ..., $\sigma_k, \theta_k \in \Gamma_{h_k}(N, E_k)$ vérifiant $\sigma_1(q) = \theta_1(q)$, ..., $\sigma_k(q) = \theta_k(q)$.

Pour tous $q \in N$ et $x_1 \in (E_1)_{h_1(q)}$, ..., $x_k \in (E_k)_{h_k(q)}$,

on peut donc définir $B(x_1, \ldots, x_k) \coloneqq [\boldsymbol{B}(\sigma_1 \,, \ldots \,, \sigma_k)](q) \in E_{h(q)}$

en choisissant de façon arbitraire $\sigma_1 \in \Gamma_{h_1}(N, E_1)$, ..., $\sigma_k \in \Gamma_{h_k}(N, E_k)$ qui vérifient $\sigma_1(q) = x_1$, ..., $\sigma_k(q) = x_k$.

Soit $\boldsymbol{\nabla} : \mathfrak{X}(N)\times\Gamma_h(N,E) \longrightarrow \Gamma_h(N,E)$ une application.

Proposition

Étant donné $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$ telle que l'application partielle $\boldsymbol{\nabla}_{(\cdot)}(\sigma) : \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \Gamma_h(N,E)$ soit linéaire relativement à $\mathrm{C}^\infty(N,\mathbf{R})$, on a

$$[\boldsymbol{\nabla}_X(\sigma)](q) = [\boldsymbol{\nabla}_Y(\sigma)](q) \in E_{h(q)}$$

pour tous $q \in N$ et $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ vérifiant $X(q) = Y(q)$.

Pour tous $q \in N$ et $v \in T_qN$, on peut donc définir $\nabla_v(\sigma) \coloneqq [\boldsymbol{\nabla}_X(\sigma)](q) \in E_{h(q)}$ en choisissant de façon arbitraire $X \in \mathfrak{X}(N)$ qui vérifie $X(q) = v$.

Proposition

Si $\boldsymbol{\nabla}$ est un opérateur de Koszul sur (E, M, π) le long de h, alors l'application $\begin{array}{rcl} \nabla : TN \times \Gamma_h(N,E) & \longrightarrow & E \\ (v,\sigma) & \longmapsto & \nabla_v(\sigma) \end{array}$ *est une dérivation covariante sur (E, M, π) le long de h qui est dite associée à $\boldsymbol{\nabla}$.*

Plan de l'exposé

Soit $\nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) \longrightarrow E$ une dérivation covariante sur (E, M, π) le long de h.

Proposition

Étant donné $q \in N$ et $v \in T_q N$, on a alors $\boxed{\nabla_v(\sigma_1) = \nabla_v(\sigma_2) \in E_{h(q)}}$ *pour toutes $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$ telles qu'il existe un voisinage V de q dans N vérifiant $\sigma_{1|V} = \sigma_{2|V}$.*

Soient U un ouvert de N et $\theta \in \Gamma_{h_{|U}}(U, E)$.

On se donne une partie compacte K de N et un ouvert V de N qui vérifient $V \subseteq K \subseteq U$ ainsi qu'une fonction $f \in \mathrm{C}^{\infty}(N, \mathbf{R})$ telle qu'on ait $f_{|V} = 1$ et $f_{|N \smallsetminus K} = 0$.

Proposition

L'application $\sigma : N \longrightarrow E$ définie par $\sigma(q) \coloneqq f(q)\theta(q)$ pour $q \in U$ et $\sigma(q) \coloneqq 0 \in E_{h(q)}$ pour $q \in N \smallsetminus U$ appartient à $\Gamma_h(N, E)$.

Ceci montre que pour chaque $q \in U$ il existe un voisinage V de q dans N contenu dans U et un prolongement σ de $\theta_{|V}$ à N qui est dans $\Gamma_h(N, E)$.

Pour tout $q \in U$ et $v \in T_q N = T_q U$ on peut donc définir

$$\nabla_v^U(\theta) \coloneqq \nabla_v(\sigma) \in E_{h(q)}$$

en choisissant de façon arbitraire une section $\sigma \in \Gamma_h(N, E)$ et un voisinage V de q dans N contenu dans U qui vérifient $\sigma_{|V} = \theta_{|V}$.

Proposition

L'application

$$\begin{array}{rrcl} \nabla^U : & TU \times \Gamma_{h_{|U}}(U, E) & \longrightarrow & E \\ & (v, \theta) & \longmapsto & \nabla_v^U(\theta) \end{array}$$

est alors une dérivation covariante sur (E, M, π) le long de $h_{|U}$ qui est dite induite *par ∇ sur U.*

En désignant par $k \geqslant 1$ le rang du fibré vectoriel (E, M, π), on considère un ouvert Ω de M et des applications $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega, E)$.

Définition

On dit que $\mathcal{F} \coloneqq (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ est un repère mobile pour (E, M, π) au-dessus de Ω lorsque pour chaque $p \in \Omega$ les propriétés suivantes sont vérifiées :

- *On a $\pi(\omega_j(p)) = p$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.*
- *La famille $(\omega_1(p), \cdots, \omega_k(p))$ de vecteurs de E_p est libre.*

On se donne une dérivation covariante $\nabla : TN \times \Gamma_h(N,E) \longrightarrow E$ sur (E,M,π) le long de h et on suppose que $\mathcal{F} = (\omega_1,\ldots,\omega_k)$ est un repère mobile pour (E,M,π) au-dessus de Ω.

En posant $n := \dim(N) \geqslant 1$, on considère une carte $(U, \varphi = (x_1,\ldots,x_n))$ sur N qui vérifie $h(U) \subseteq \Omega$ et pour chaque $j \in [\![1,k]\!]$ on définit $\breve{\omega}_j \in \Gamma_{h_{|U}}(U,E)$ par $\breve{\omega}_j(q) \coloneqq \omega_j(h(q))$ pour tout $q \in U$.

Pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,k]\!]$, les fonctions $\Upsilon^1_{(i,j)},\ldots,\Upsilon^k_{(i,j)} \in \mathrm{C}^\infty(U,\mathbf{R})$ définies par $\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x_i}(q)}(\breve{\omega}_j) = \sum\limits_{\ell=1}^{k} \Upsilon^\ell_{(i,j)}(q)\,\breve{\omega}_\ell(q)$ pour tout $q \in U$ s'appellent les *symboles de Christoffel* de ∇ sur U relatifs à $(U, \varphi = (x_1,\ldots,x_n))$ et $\mathcal{F}$.

Étant donné $\sigma \in \Gamma_h(N, E)$, il existe une unique famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ d'éléments de $\mathrm{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ telle qu'on ait $\boxed{\sigma_{|U} = \alpha_1 \check{\omega}_1 + \cdots + \alpha_k \check{\omega}_k}$.

D'autre part, étant donné $q \in U$ et $v \in T_q N$, il existe une unique famille $(b_1, \ldots, b_n)$ de nombres réels vérifiant $\boxed{v = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(q) + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial x_1}(q)}$.

On obtient alors l'expression

$$\boxed{\nabla^U_v(\sigma_{|U}) = \sum_{\ell=1}^{k} \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i \left[\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i} \cdot \alpha_\ell \right) + \sum_{j=1}^{k} \Upsilon^\ell_{(i,j)} \alpha_j \right](q) \right\} \check{\omega}_\ell(q)}.$$

Plan de l'exposé

On suppose ici qu'on a $N \coloneqq M$, $h \coloneqq \mathrm{I}_M$ et $(E, M, \pi) \coloneqq (TM, M, \tau_M)$, ce qui donne $\Gamma_h(N, E) = \mathfrak{X}(M)$.

Dans ce cas, on dit que la dérivation covariante ∇ sur (TM, M, τ_M) associée à $\boldsymbol{\nabla}$ est une *dérivation covariante affine* sur M.

Proposition

L'application $\boldsymbol{T} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *définie par* $\boldsymbol{T}(X, Y) \coloneqq \boldsymbol{\nabla}_X(Y) - \boldsymbol{\nabla}_Y(X) - [X, Y]$ *est bilinéaire relativement à* $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbf{R})$ *et s'appelle le* tenseur de torsion *associé à* $\boldsymbol{\nabla}$.

Pour tous $q \in M$ et $v, w \in T_q M$, on peut donc définir

$$T(v, w) \coloneqq [\boldsymbol{T}(X, Y)](q) \in T_q M$$

en choisissant de façon arbitraire $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ qui vérifient $X(q) = v$ et $Y(q) = w$.

Soit $\boldsymbol{g} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{C}^{\infty}(M, \mathbf{R})$ une *métrique pseudo-riemannienne* sur M (par exemple, une métrique lorentzienne en relativité générale ou bien une métrique riemannienne en mécanique).

Théorème (Levi-Civita)

Il existe un unique opérateur de Koszul $\boldsymbol{\nabla}$ sur (TM, M, τ_M) qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- *Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a*
$$Z \cdot \boldsymbol{g}(X, Y) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\nabla}_Z(X), Y) + \boldsymbol{g}(X, \boldsymbol{\nabla}_Z(Y)).$$
- *Le tenseur de torsion associé à $\boldsymbol{\nabla}$ est nul.*

La dérivation covariante affine ∇ sur M associée à $\boldsymbol{\nabla}$ s'appelle alors la *dérivation covariante affine de Levi-Civita* sur M associée à $\boldsymbol{g}$.

Pour tous $q \in M$ et $v, w \in T_qM$, on peut définir $g(v,w) \coloneqq [\boldsymbol{g}(X,Y)](q) \in \mathbf{R}$ en choisissant de façon arbitraire $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ qui vérifient $X(q) = v$ et $Y(q) = w$ (puisque $\boldsymbol{g}$ est bilinéaire relativement à $\mathrm{C}^\infty(M,\mathbf{R})$).

En posant $n := \dim(M) \geqslant 1$, on considère une carte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ sur M et le repère mobile $\mathcal{F} \coloneqq \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ pour (TM, M, τ_M) au-dessus de U.

Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ et $q \in U$, on pose $g_{(i,j)}(q) \coloneqq g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(q)\,,\,\frac{\partial}{\partial x_j}(q)\right)$ et on définit $G : U \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ par $G(q) \coloneqq \left(g_{(i,j)}(q)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

En écrivant alors $[G(q)]^{-1} \eqqcolon \left(g^{(i,j)}(q)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ pour tout $q \in U$, on obtient

$$\Upsilon^{\ell}_{(i,j)}(q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g^{(\ell,k)}(q)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot g_{(k,j)}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot g_{(k,i)}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot g_{(i,j)}\right)\right](q)$$

pour tous $i, j, \ell \in [\![1,n]\!]$.

Plan de l'exposé

Soit $\nabla : TN \times \Gamma_h(N, E) \longrightarrow E$ une dérivation covariante sur (E, M, π) le long de h.

Proposition

Étant donné $q \in N$ et $v \in T_qN$, on a alors $\nabla_v(\sigma_1) = \nabla_v(\sigma_2) \in E_{h(q)}$ *pour toutes $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_h(N, E)$ telles qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et une courbe lisse $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow N$ vérifiant $c(0) = q$, $\dot{c}(0) = v$ et $\sigma_1 \circ c = \sigma_2 \circ c$.*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \longrightarrow N$ une courbe lisse.

Théorème

Il existe alors une unique application $D^{\gamma} : I \times \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E) \longrightarrow E$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

- *Pour chaque $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$, on a* $D^{\gamma}_{(\cdot)}(\theta) \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$.
- *Étant donné $t \in I$ et $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$ tels qu'il existe $\sigma \in \Gamma_h(N,E)$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ vérifiant $[t-\varepsilon\,,\; t+\varepsilon] \subseteq I$ et $\sigma(\gamma(s)) = \theta(s)$ pour tout $s \in [t-\varepsilon\,,\; t+\varepsilon]$, on a* $D^{\gamma}_{t}(\theta) = \nabla_{\overset{\bullet}{\gamma}(t)}(\sigma) \in E_{h(\gamma(t))}$.
- $D^{\gamma}_{t}(\theta_1 + \theta_2) = D^{\gamma}_{t}(\theta_1) + D^{\gamma}_{t}(\theta_2)$ *pour tous $t \in I$ et $\theta_1, \theta_2 \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$.*
- $D^{\gamma}_{t}(a\theta) = a(t)D^{\gamma}_{t}(\theta) + a'(t)\theta(t)$

  pour tous $t \in I$, $a \in \mathrm{C}^{\infty}(I,\mathbf{R})$ et $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$.

Définition

L'application D^γ s'appelle la dérivation absolue *associée à ∇* le long *de γ.*

Soient $\mathcal{F} = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ un repère mobile pour (E, M, π) au-dessus d'un ouvert Ω de M et $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ une carte sur N qui vérifie $h(U) \subseteq \Omega$.

On considère un intervalle ouvert $J \subseteq I$ vérifiant $\gamma(J) \subseteq U$ et pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$ on définit $b_i \in \mathrm{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ par $b_i(t) \coloneqq x_i(\gamma(t))$ pour tout $t \in J$.

Étant donné $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I, E)$, il existe une unique famille $(a_1, \dots, a_k)$ d'éléments de $\mathrm{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ vérifiant $\theta(t) = a_1(t)\breve{\omega}_1(\gamma(t)) + \cdots + a_k(t)\breve{\omega}_k(\gamma(t))$ pour tout $t \in J$.

On obtient alors l'expression

$$D_t^\gamma(\theta) = \sum_{\ell=1}^{k} \left\{ (a_\ell)'(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Upsilon_{(i,j)}^{\ell}(\gamma(t))\,(b_i)'(t)\,a_j(t) \right\} \breve{\omega}_\ell(\gamma(t))$$ pour tout $t \in J$.

Définition

On dit qu'une section $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I, E)$ est parallèle le long *de γ pour D^{γ} lorsqu'elle vérifie* $D_t^{\gamma}(\theta) = 0 \in E_{h(\gamma(t))}$ *pour tout $t \in I$.*

D'après l'expression précédente, ceci entraîne que pour chaque $\ell \in [\![1, k]\!]$ on a

$$(a_\ell)'(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Upsilon_{(i,j)}^{\ell}(\gamma(t))\,(b_i)'(t)\,a_j(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in J,$$

ce qui montre que la fonction $F \coloneqq (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{C}^{\infty}(J, \mathbf{R}^k)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Étant donné $t_0 \in I$ et $x \in E_{h(\gamma(t_0))}$, il existe donc une unique section $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I, E)$ qui soit parallèle le long de γ pour D^γ et qui vérifie la condition initiale $\boxed{\theta(t_0) = x}$.

Pour chaque $t_1 \in I$, on pose alors $\boxed{P^\gamma_{(t_0,t_1)}(x) \coloneqq \theta(t_1)}$.

Proposition

L'application $P^\gamma_{(t_0,t_1)} : E_{h(\gamma(t_0))} \longrightarrow E_{h(\gamma(t_1))}$ ainsi définie est linéaire et s'appelle le transport parallèle *de t_0 à t_1* le long *de γ pour D^γ.*

Proposition

Pour tous $t_0, t_1, t_2 \in I$, on a

$$P^{\gamma}_{(t_0,t_0)} = \mathrm{I}_{E_{h(\gamma(t_0))}} \quad \text{et} \quad P^{\gamma}_{(t_1,t_2)} \circ P^{\gamma}_{(t_0,t_1)} = P^{\gamma}_{(t_0,t_2)}.$$

Il en résulte que $P^{\gamma}_{(t_0,t_1)}$ est bijectif.

Théorème

Pour tout $t_0 \in I$ et toute section $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$, on a

$$[P^{\gamma}_{(t,t_0)}(\theta(t)) - \theta(t_0)]/(t - t_0) \longrightarrow D^{\gamma}_{t_0}(\theta) \in E_{h(\gamma(t_0))} \quad \text{lorsque } t \xrightarrow[t\neq t_0]{} t_0.$$

Conséquence

Une section $\theta \in \Gamma_{h\circ\gamma}(I,E)$ est parallèle le long de γ pour D^{γ} si, et seulement si, il existe $t_0 \in I$ tel qu'on ait $P^{\gamma}_{(t_0,t)}(\theta(t_0)) = \theta(t)$ pour tout $t \in I$.

Plan de l'exposé

On se donne une dérivation covariante affine $\nabla : TM \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow TM$ sur M, un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ et une courbe lisse $\gamma : I \longrightarrow M$.

Définition

On dit que γ est une géodésique pour ∇ lorsque la section $\overset{\bullet}{\gamma} \in \Gamma_\gamma(I, TM)$ est parallèle le long de γ pour D^γ.

Ceci équivaut donc à avoir $D_t^\gamma(\overset{\bullet}{\gamma}(t)) = 0 \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in I$, ce qui signifie que l'« accélération » de γ est nulle.

En posant $n := \dim(M) \geqslant 1$, on considère une carte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ sur M et le repère mobile $\mathcal{F} \coloneqq \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ pour (TM, M, τ_M) au-dessus de U.

On considère un intervalle ouvert $J \subseteq I$ vérifiant $\gamma(J) \subseteq U$ et pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$ on définit $b_i \in \mathrm{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ par $b_i(t) \coloneqq x_i(\gamma(t))$ pour tout $t \in J$.

On a donc $\overset{\bullet}{\gamma}(t) = (b_1)'(t) \frac{\partial}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \cdots + (b_n)'(t) \frac{\partial}{\partial x_n}(\gamma(t))$ pour tout $t \in J$.

Dire que γ est une géodésique pour ∇ entraîne alors que pour chaque $\ell \in [\![1, n]\!]$ on a

$$(b_\ell)''(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Upsilon^{\ell}_{(i,j)}(\gamma(t))(b_i)'(t)(b_j)'(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in J,$$

ce qui montre que la fonction $H \coloneqq (b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{C}^\infty(J, \mathbf{R}^k)$ est solution d'une équation différentielle non linéaire du second ordre.

Ceci nous amène à considérer ce qui suit.

Définition

Un champ de vecteurs lisse S sur TM qui vérifie la relation $T_{\tau_M} \circ S = \mathrm{I}_{TM}$ *s'appelle un* semi-spray *sur M.*

Ceci signifie que S est une section du fibré vectoriel $(T(TM), TM, T_{\tau_M})$ en plus d'être une section du fibré tangent $(T(TM), TM, \tau_{TM})$ de TM.

Définition

On dit qu'un semi-spray S sur M est un spray *sur M lorsque pour tout nombre réel $\lambda > 0$ et pour tout $v \in TM$ on a* $S(\lambda v) = T_v(m_\lambda) \cdot (\lambda S(v))$, *où $m_\lambda : TM \longrightarrow TM$ est la multiplication par λ.*

Ceci signifie que le flot Φ de S vérifie $\Phi^t(\lambda v) = \lambda \Phi^{\lambda t}(v)$ pour tout t dans l'intervalle de définition de $\Phi^{(\cdot)}(\lambda v)$.

Proposition

Il existe un unique semi-spray S sur M tel que pour tout intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ et pour toute courbe lisse $\gamma : I \longrightarrow M$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *La section $\dot{\gamma} \in \Gamma_\gamma(I, TM)$ est une courbe intégrale de S.*
- *La courbe γ est une géodésique pour ∇.*

Étant donné une carte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ sur M, considérons le repère mobile $\mathcal{F} \coloneqq \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ pour (TM, M, τ_M) au-dessus de U.

En écrivant $T\varphi = (y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$, on a alors

$$S(v) = \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ z_\ell(v) \frac{\partial}{\partial y_\ell}(v) - \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Upsilon^{\ell}_{(i,j)}(\tau_M(v))\, z_i(v)\, z_j(v) \right] \frac{\partial}{\partial z_\ell}(v) \right\}$$

pour tout $v \in TU$.

Soit S un spray sur M.

Proposition (réciproque)

Il existe alors un unique opérateur de Koszul $\boldsymbol{\nabla}$ *sur* (TM, M, τ_M) *dont le tenseur de torsion associé est nul et tel que pour tout intervalle ouvert* I *de* $\mathbf{R}$ *et pour toute courbe lisse* $\gamma : I \longrightarrow M$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *La section* $\overset{\bullet}{\gamma} \in \Gamma_\gamma(I, TM)$ *est une courbe intégrale de* S.
- *La courbe* γ *est une géodésique pour la dérivation covariante* ∇ *associée à* $\boldsymbol{\nabla}$.

Quelques références

LEVI-CIVITA Tullio
The absolute differential calculus
[Lezioni di calcolo differenziale assoluto (1925)]
Blackie & Son, 1961.

CHAVEL Isaac
Riemannian geometry — A modern introduction
Cambridge University Press, 1993.

LANG Serge
Fundamentals of differential geometry
Springer, 1999.