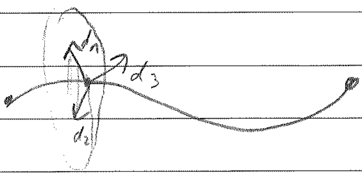
# <u>Une formulation hamiltonienne du modèle de Timoshenko</u>

Oscar Cosserat
avec Loïc Le Marrec

- Les structures hamiltoniennes sont utiles pour le calcul (cf ma thèse, mon exposé à l'IRMAR)
- Timoshenko est conservatif ET conservatif ⟹ hamiltonien
- la structure hamiltonienne clarifie le rôle de chaque variable et l'espace dans lequel elle vit, et donc facilite l'étude des symétries
- en dimension infinie (EDP), la notion de structure hamiltonienne est délicate (formelle), il est donc intéressant d'étudier des exemples
- la littérature n'est pas satisfaisante

$\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ placement

$Q : [0, L] \to SO(3)$ dièdre




$d_i := Q\,E_i$

$\mathcal{C} = \{(\varphi, Q)\}$ configurations

On veut l'espace des positions-vitesses et des positions-moments. Pour trouver les bonnes variables, on introduit 2 outils mathématiques.

## <u>I. Préliminaires</u>

### 1. La forme de Maurer-Cartan

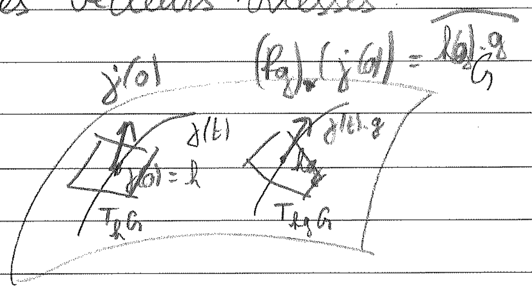
$G$ groupe de Lie (ex : $SO(3)$)

$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie de $G$ (ex : $\mathfrak{so}(3)$)

$\forall g \in G$, $R_g : h \in G \mapsto hg$ translation à droite par $g$

induit : $(R_g)_* : T_h G \longrightarrow T_{hg} G$ sur le fibré tangent, ie l'espace des vecteurs vitesses :

$(R_g)_*(\dot\gamma(0)) = \dot{\overline{\gamma(0)\, g}}$




$\mathfrak{g} = T_e G$

<u>def</u> : forme de Maurer-Cartan $\omega : T_g G \to \mathfrak{g}$

$$v \longmapsto (R_{g^{-1}})_* (v)$$

<u>ex</u> : $R(t)$ tq $R(0) = R_0 \in SO(3)$

$\dot R(0) \in T_{R_0} SO(3)$ $\qquad \omega(\dot R(0)) = \dot R(0) R_0^{-1}$

<u>rq</u> : on va voir plus loin qu'appliquer $\omega$ s'interprète comme un passage de la base euclidienne à la base mobile.

<u>b) $j$</u>

$$j : so(3) \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}$$

<u>prop</u> : $j$ morphisme d'algèbre de Lie : $j(A) \wedge j(B) = j(AB - BA)$

isométrie : $\langle j(A), j(B) \rangle = \underbrace{\langle\langle A, B \rangle\rangle}_{\frac{1}{2} tr(A^T B)}$

## II. <u>Mécanique analytique</u>

a) Euler-Lagrange

$\mathcal{C} = \{(\varphi, Q)\}$ $\qquad TC = \{(\varphi, Q, v_\varphi, v_Q)\}$

$$\begin{aligned} S\left((\varphi(t), Q(t))_t\right) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L & \langle \dot\varphi, A \dot\varphi \rangle + \langle j(\dot Q Q^{-1}), J j(\dot Q Q^{-1}) \rangle \\ & - \langle \varphi' - Q e_3, G(\varphi' - Q e_3) \rangle \\ & - \langle j(Q' Q^{-1}), \mathbb{H} j(Q' Q^{-1}) \rangle \, ds \, dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} & \mathcal{L} \, dt, \quad \mathcal{L} : TC \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

$A, J, G, \mathbb{H}$ matrices constantes (paramètres du modèle)

E-L : $\dfrac{d\, A\dot{\varphi}}{dt} = \dfrac{\partial\, G(\varphi' - Q e_3)}{\partial S}$

$$\frac{d\, J j(\dot{Q}Q^{-1})}{dt} = \frac{\partial\, \mathbb{H}\, j(Q'Q^{-1})}{\partial S} + \varphi' \wedge \big(G(\varphi' - Q e_3)\big)$$

rq : les conditions au bord sont à mettre au propre

Transformée de Legendre

$$p_\varphi = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \,,\quad p_Q = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{Q}} = j^{-1}\big(J j(\dot{Q}Q^{-1})\big)\, Q$$

## b) Formulation hamiltonienne

Il y a bien des crochets de Poisson sur $T^*\mathcal{C} = \{(\varphi, Q, p_\varphi, p_Q)\}$

$$\{f,g\} = \int_0^L \left\langle \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial g}{\partial p_\varphi} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial g}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial p_\varphi} \right\rangle + \left\langle\!\left\langle \frac{\partial f}{\partial Q}, \frac{\partial g}{\partial p_Q} \right\rangle\!\right\rangle - \left\langle\!\left\langle \frac{\partial g}{\partial Q}, \frac{\partial f}{\partial p_Q} \right\rangle\!\right\rangle dS$$

et un hamiltonien $H(\varphi, Q, p_\varphi, p_Q)$ induit par la transformée de Legendre, mais les équations résultantes ont une sale tête parce que $p_Q$ n'est pas la bonne variable pour décrire le moment de la rotation.

On pose $\sigma = j(p_Q Q^{-1})$. Les équations deviennent :

$$(*)\quad \begin{cases} \dot{p}_\varphi = \dfrac{\partial\, G(\varphi' - Q e_3)}{\partial S} \\[2ex] \dot{\sigma} = \dfrac{\partial\, \mathbb{H}\, j(Q'Q^{-1})}{\partial S} + \varphi' \wedge \big(G(\varphi' - Q e_3)\big) \\[2ex] \dot{\varphi} = A^{-1} p_\varphi \\ \dot{Q} = j^{-1}(J^{-1}\sigma)\, Q \qquad \text{puisque } \sigma = J j(\dot{Q}Q^{-1}) \end{cases}$$

thm (-, Le Marrec) Les éq de Timoshenko (*) sont hamiltoniennes pour

$$H(\varphi, Q, \mu_\varphi, \sigma) = \int_0^L \langle \mu_\varphi, A^{-1}\mu_\varphi\rangle + \langle \sigma, J^{-1}\sigma\rangle$$

$$+ \langle \varphi' - Qe_3, G(\varphi' - Qe_3)\rangle$$

$$+ \langle j(Q'Q^{-1}), \mathbb{H}\, j(Q'Q^{-1})\rangle \, dS$$

(Δ) et $\{f, g\} = \int_0^L \langle \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial g}{\partial \mu_\varphi}\rangle - \langle \frac{\partial g}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial \mu_\varphi}\rangle$ — partie canonique

$+ \langle\langle \frac{\partial f}{\partial Q}, j^{-1}(\frac{\partial g}{\partial \sigma}) Q\rangle\rangle - \langle\langle \frac{\partial g}{\partial Q}, j^{-1}(\frac{\partial f}{\partial \sigma}) Q\rangle\rangle$ — couplage entre Q et σ

$+ \langle \sigma, \frac{\partial f}{\partial \sigma} \wedge \frac{\partial g}{\partial \sigma}\rangle \, dS$ — terme correspondant au fait qu'on s'est ramené sur l'algèbre de Lie

ce qui veut dire

$$(*) \iff \dot\varphi = \{H, \varphi\} \qquad \dot\mu_\varphi = \{H, \mu_\varphi\}$$
$$\dot Q = \{H, Q\} \qquad \dot\sigma = \{H, \sigma\}$$

rq : * le crochet de Poisson est non-dégénéré, ie sans Casimirs non triviaux
* "valid" in the sense of Kolev 2007 ?
* conditions au bord à écrire proprement
* Timoshenko planaire et la corde vibrante sont hamiltoniens pour des sous-algèbres de Poisson de (Δ) on les obtient par réduction hamiltonienne de Timoshenko

Questions reçues : Jean Lerbet → le crochet du thm est Lie-Poisson pour un groupe semi-direct du déplacement par les rotations
⇒ pas exactement puisque le crochet est non dégénéré, mais à regarder
Philippe → conditions au bord sont un vrai défi pour les ingénieurs, ce sera intéressant de les solliciter
Boris K. → le crochet est-il clos ? ie quelle régularité