

«Repères inertiels d'ordres supérieurs»
Réunion plénière du GDR GDM

LIONEL DARONDEAU

IMJ-PRG, Sorbonne Université

La Rochelle, 27 juin 2024

Décryptage d'une partie de l'article :
Jerzy Kijowski, Katarzyna Senger,
Covariant jets of a connection and higher order curvature tensors,
Journal of Geometry and Physics, Volume 163, 2021.

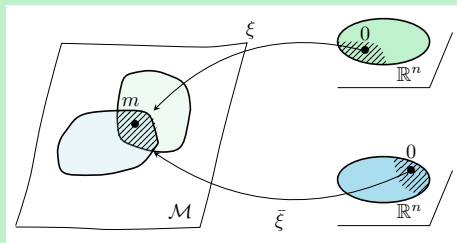
CONNEXIONS, REPÈRES INERTIELS

(ÉCHAUFFEMENT)

DÉF. \mathcal{M} : variété différentielle réelle de dimension n .

- ▶ Une *paramétrisation* est un choix de difféomorphisme local (défini sur des ouverts)

$$\xi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathcal{M}, m).$$



- ▶ Une *reparamétrisation* est un difféomorphisme local

$$\phi: (\mathcal{M}, m) \rightarrow (\mathcal{M}, m).$$

On notera $\bar{\xi} := \phi \circ \xi$, là où ça a du sens.

DÉF. Un *repère* est un choix d'isomorphisme linéaire

$$(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (T_m \mathcal{M}, 0).$$

REPÈRE HOLONOME Une paramétrisation ξ donne un repère naturel $T_0\xi$, dit *holonome*.

- ▶ On note

$$e_\mu := T_0\xi(\partial_\mu),$$

l'image de la base canonique de \mathbb{R}^n par $T_0\xi$.

- ▶ On a $[e_\mu, e_\nu] = T_0\xi([\partial_\mu, \partial_\nu]) = 0$.
- ▶ On a

$$\bar{e}_\lambda(m) = A^\kappa_\lambda(m)e_\kappa(m),$$

où $A^\kappa_\lambda := \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda}(\bar{x})$, avec $m = \xi(x) = \bar{\xi}(\bar{x})$.

DÉF. Une *connexion de Koszul* ∇ sur \mathcal{M} est un outil

$$\begin{aligned} \Gamma(TM) \otimes \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned} ,$$

utilisé pour définir les géodésiques/réaliser le transport parallèle des champs de vecteurs.

Il est C^∞ -linéaire en X et vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla_X(gY) = \nabla_X(g)Y + g\nabla_X(Y).$$

On adopte ici la convention $\nabla_X(g) = X \cdot g = dg(X)$.

DÉF. (SYMBOLE DE CHRITOFFEL D'UNE CONNEXION) Étant donné une paramétrisation $e: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$, on pose

$$\nabla_{e_\mu}(e_\lambda) = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} e_\kappa.$$

DÉF. La connexion ∇ est dite *sans torsion* si

$$T(X, Y) := \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y] = 0.$$

- ▶ Le terme $[X, Y]$, nul dans un repère holonome, est retranché pour obtenir un tenseur.
- ▶ Dans le repère holonome e_ρ , on a

$$T(X, Y) = X^\mu Y^\nu T(e_\mu, e_\nu) = X^\mu Y^\nu (\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}).$$

La connexion de Koszul ∇ est donc sans torsion si le symbole Γ est symétrique dans les indices du bas.

Dans la suite on parlera de connexion “symétrique”.

En écrivant dans le repère \bar{e}_k l'identité

$$\nabla_{\bar{e}_\mu} \bar{e}_\lambda = \nabla_{A^\sigma_\mu e_\sigma} (A^\rho_\lambda e_\rho) = A^\sigma_\mu \nabla_{e_\sigma} (e_\rho) A^\rho_\lambda + \nabla_{\bar{e}_\mu} (A^\rho_\lambda) e_\rho,$$

on obtient :

$$\bar{\Gamma}^\kappa_{\lambda\mu} = A^{-1\kappa}_\alpha (\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} A^\rho_\lambda A^\sigma_\mu + B^\alpha_{\lambda\mu}),$$

où $B^\kappa_{\lambda\mu} := \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu}(\bar{x})$.

En particulier, pour une transformation ϕ avec $T\phi = \text{id}$:

$$\bar{\Gamma}^\kappa_{\lambda\mu} = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + B^\kappa_{\lambda\mu}.$$

On en déduit le résultat classique suivant.

THÉO. ∇ : connexion symétrique ; e : paramétrisation.

Il existe une reparamétrisation ϕ de \mathcal{M} fixant le repère holonome e_ρ et telle que $\bar{\Gamma}$ s'annule (ponctuellement) en m . De plus, cette condition détermine la hessienne de ϕ .

Comme le repère est holonome, les symboles B et Γ sont symétriques dans les indices inférieurs. Pour annuler $\bar{\Gamma}$, on doit choisir $B = -\Gamma$.

DÉF. Soit ∇ une connexion symétrique. On appelle *repère inertiel* au point $m \in \mathcal{M}$ une paramétrisation $e: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathcal{M}, m)$ dans laquelle le symbole Γ de ∇ s'annule ponctuellement en m .

C'est une version relativiste d'un repère galiléen :

CHUTE LIBRE Γ : gravitation ; x : particule ; τ : horloge interne.
Équation (*ponctuelle!*) de la chute libre dans un repère inertiel \bar{e} :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\kappa} \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \tau^2} \quad (\text{Newton}) \\ \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = 0 + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \quad (\bar{e} \text{ inertiel}) \end{array} \right. .$$

Dans le référentiel e du laboratoire, on a l'équation géodésique :

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \tau^2} = - \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = -\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} .$$

JETS, RÈGLE DE CHAÎNE
&
REPÈRES INERTIELS D'ORDRES k

Quelques faits :

- ▶ **La règle de chaîne est triangulaire.**

$$(f \circ g)^{(k)} = (f^{(k)} \circ g) (g')^k + \text{termes}(f', \dots, f^{(k-1)}, g', \dots, g^{(k-1)}) + (f' \circ g) g^{(k)}.$$

- ▶ Partager le même développement de Taylor à l'ordre k est une relation d'équivalence qui ne dépend pas des coordonnées au but. On note $j_k(f)$ la classe d'équivalence d'une application f .
- ▶ On a $j_k(\phi)j_k(\psi) = j_k(\phi \circ \psi)$ quand cela fait sens.
- ▶ Si $k \geq \ell$, alors $j_k(\phi) \mapsto j_\ell(\phi)$ est bien défini, ce qui n'est pas le cas de “ $j_k(\phi) - j_\ell(\phi)$ ” par exemple.

EXEMPLE ϕ diffeo local $(\mathcal{M}, m) \rightarrow (\mathcal{M}, m)$.

- ▶ $j_1(\phi) = T\phi$, changement de repère de $T\mathcal{M}$, donné dans un repère holonome $T\xi = j_1(\xi)$ par A .
- ▶ $j_2(\phi)$ donné dans une paramétrisation ξ (ou plutôt $j_2(\xi)$) par A et B .

DÉF. Soit ∇ une connexion symétrique. On appelle *repère inertiel* au point $m \in \mathcal{M}$ le jet d'ordre 2 d'une paramétrisation $\xi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathcal{M}, m)$ dans laquelle le symbole Γ de ∇ s'annule ponctuellement en m .

THÉO. ∇ : connexion symétrique ; ξ : paramétrisation autour de m .
Il existe une reparamétrisation ϕ de \mathcal{M} tel que $j_2(\bar{\xi})$ soit un repère inertiel en m . De plus, cette condition détermine $j_2(\phi)$.

THÉO. *Le choix d'un repère inertiel $j_2(\xi)$ en tout point $m \in \mathcal{M}$ détermine Γ .*

DÉMONSTRATION. Dans un repère inertiel ξ , l'équation de reparamétrisation devient :

$$\bar{\Gamma}^\kappa_{\lambda\mu} = A^{-1\kappa}_{\alpha} B^\alpha_{\lambda\mu}.$$

Or tout repère s'obtient à partir du repère inertiel par reparamétrisation :

$$\bar{\xi} = (\bar{\xi} \circ \xi^{-1}) \circ \xi.$$

Donc la donnée de $j_2(\xi)$, considéré inertiel, détermine Γ_m . □

REM. On retrouve bien que deux choix de repère inertiel donnent le même Γ_m si on passe d'un repère à l'autre par une reparamétrisation ϕ arbitraire vérifiant $j_2(\phi) = j_2(\text{id})$.

LEMME (TRIANGULARITÉ DE LA REPARAMÉTRISATION) Pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{\kappa}_{\lambda\mu, \nu_1 \dots \nu_k} &= A^{-1\kappa}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma, \tau_1 \dots \tau_k} A^{\rho}_{\lambda} A^{\sigma}_{\mu} A^{\tau_1}_{\nu_1} \cdots A^{\tau_k}_{\nu_k} \\ &\quad + \text{terme intermédiaire} (j_{k-1}(\Gamma), j_{k+1}(\phi)) \\ &\quad + A^{-1\kappa}_{\alpha} \frac{\partial^{k+2} x^{\alpha}}{\partial \bar{x}_{\lambda} \partial \bar{x}_{\mu} \partial \bar{x}_{\nu_1} \cdots \partial \bar{x}_{\nu_k}}(\bar{x}), \end{aligned}$$

où le terme intermédiaire est polynomial et s'annule pour $\phi = \text{id}$.

DÉMONSTRATION. Appliquer successivement les dérivations

$\nabla_{\bar{e}_{\nu_i}} = A^{\tau_i}_{\nu_i} \nabla_{e_{\tau_i}}$ à l'identité (déjà démontrée)

$$\bar{\Gamma}^{\kappa}_{\lambda\mu} = A^{-1\kappa}_{\alpha} \left(\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} A^{\rho}_{\lambda} A^{\sigma}_{\mu} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \bar{x}_{\lambda} \partial \bar{x}_{\mu}}(\bar{x}) \right).$$

□

LEMME (TRIANGULARITÉ DE LA REPARAMÉTRISATION) Pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_k}^\kappa &= A^{-1\kappa}{}_\alpha \Gamma_{\rho\sigma,\tau_1\dots\tau_k}^\alpha A^\rho{}_\lambda A^\sigma{}_\mu A^{\tau_1}{}_{\nu_1} \cdots A^{\tau_k}{}_{\nu_k} \\ &\quad + \text{terme intermédiaire} (j_{k-1}(\Gamma), j_{k+1}(\phi)) \\ &\quad + A^{-1\kappa}{}_\alpha \frac{\partial^{k+2} x^\alpha}{\partial \bar{x}_\lambda \partial \bar{x}_\mu \partial \bar{x}_{\nu_1} \cdots \partial \bar{x}_{\nu_k}}(\bar{x}), \end{aligned}$$

où le terme intermédiaire est polynomial et s'annule pour $\phi = \text{id}$.

CORO. En appliquant à un difféomorphisme ϕ tel que $j_{k+1}(\phi) = j_{k+1}(\text{id})$, on obtient :

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_{\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_i}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_i}^\kappa & \text{pour } i < k; \\ \bar{\Gamma}_{\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_k}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_k}^\kappa + \frac{\partial^{k+2} x^\kappa}{\partial \bar{x}_\lambda \partial \bar{x}_\mu \partial \bar{x}_{\nu_1} \cdots \partial \bar{x}_{\nu_k}}(\bar{x}) & . \end{cases}$$

DÉF. La connexion Γ étant fixée, on appelle *repère inertiel d'ordre k* le jet d'ordre $k + 2$ d'une paramétrisation $\xi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathcal{M}, m)$ dans laquelle, ponctuellement en m , pour $i = 0, 1, \dots, k$:

$$\Gamma^{\kappa}_{(\lambda\mu, \nu_1 \dots \nu_i)} = 0.$$

THÉO. Soit ∇ une connexion symétrique. Pour une paramétrisation arbitraire $\xi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathcal{M}, m)$, il existe une unique reparamétrisation $j_{k+2}(\phi)$ avec $j_1(\phi) = j_1(\text{id})$ telle que $j_{k+2}(\bar{\xi})$ soit un repère inertiel d'ordre k en m .

Pour produire un repère inertiel d'ordre k :

- ▶ En partant d'une paramétrisation arbitraire ξ , on produit un repère inertiel $\xi_{(0)}$ d'ordre 0 en choisissant $\phi_{(0)}$ tel que

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda} \circ \bar{x} = \delta^\kappa_\lambda ; \quad \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu} \circ \bar{x} = -\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} ; \quad \frac{\partial^{j+2} x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^{\nu_1} \dots \partial \bar{x}^{\nu_j}} \circ \bar{x} = 0.$$

- ▶ Puis, dans la paramétrisation $\xi_{(i-1)}$ inertielle d'ordre $i-1$, on produit un repère inertiel d'ordre i , en choisissant $\phi_{(i)}$ tel que

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda} \circ \bar{x} = \delta^\kappa_\lambda ; \quad \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu} \circ \bar{x} = 0 ; \quad \frac{\partial^{j+2} x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^{\nu_1} \dots \partial \bar{x}^{\nu_j}} \circ \bar{x} = 0.$$

sauf pour $j = i$, dans quel cas :

$$\frac{\partial^{i+2} x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^{\nu_1} \dots \partial \bar{x}^{\nu_i}} \circ \bar{x} = -\Gamma^\kappa_{(\lambda\mu, \nu_1 \dots \nu_i)}.$$

- ▶ On pose $\phi = \phi_{(k)} \circ \dots \circ \phi_{(0)}$. L'expression de $j_{k+2}(\phi)$ par rapport au Γ original est un peu compliquée, mais en tout cas on a $j_1(\phi) = \text{id}$, et $j_{k+2}(\bar{\xi})$ inertiel d'ordre k .

- ▶ On observe que dans un repère inertiel, pour ϕ avec $T\phi = \text{id}$:

$$\frac{\partial^{k+2} x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^{\nu_1} \dots \partial \bar{x}^{\nu_k}} \circ \bar{x} = \bar{\Gamma}_{(\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_k)}^\kappa + \text{termes}(j_{k-1}(\Gamma), j_{k+1}(\phi)).$$

- ▶ $j_{k+2}(\bar{\xi})$ reste un repère inertiel d'ordre k si et seulement si ϕ est solution du système triangulaire ($i = 0, 1, \dots, k$)

$$\frac{\partial^{k+2} x^\kappa}{\partial \bar{x}^\lambda \partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^{\nu_1} \dots \partial \bar{x}^{\nu_k}} \circ \bar{x} = \text{termes}(j_{i-1}(\Gamma), j_{i+1}(\phi)).$$

Ce système admet une solution unique et $\phi = \text{id}$ est une solution évidente. C'est donc la seule solution !

THÉO. *Il existe un tenseur $K^{\kappa}_{\lambda\mu\nu_1\dots\nu_k}$ qui coïncide avec $\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu,\nu_1\dots\nu_k}$ dans les repères inertiels, et qui s'exprime (de façon inversible) en terme du tenseur de courbure et de ses dérivées covariantes.*

DÉMONSTRATION. Pour toute paramétrisation ξ , il existe une unique transformation $j_{k+2}(\phi)$ fixant $j_1(\xi)$ telle que le repère $\bar{\xi}$ soit inertiel d'ordre k en m . De plus ce repère détermine un k -jet $j_k(\bar{\Gamma})$. On considère donc $\xi \mapsto j_k(\bar{\Gamma})$ en $m \in \mathcal{M}$.

Le sous-groupe des $j_{k+2}(\phi)$ avec $j_1(\phi) = j_1(\text{id})$ agit trivialement sur $j_k(\bar{\Gamma})$. On en déduit que l'action passe au quotient $\text{GL}(n)$. Autrement dit $j_k(\bar{\Gamma})$ est un tenseur.

Deux tenseurs qui coïncident dans un repère coïncident dans tous les repères. Il suffit donc d'utiliser une expression des dérivées covariantes de la courbure en fonction des dérivées partielles de Γ dans un repère inertiel, cf. exemple. □

$k = 1$ La formule

$$\mathbf{R}^\kappa_{\lambda\mu\nu} := \Gamma^\kappa_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}.$$

donne immédiatement

$$\begin{cases} \mathbf{R}^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= \mathbf{K}^\kappa_{\lambda\nu,\mu} - \mathbf{K}^\kappa_{\lambda\mu,\nu} \\ \mathbf{K}^\kappa_{\lambda\mu,\nu} &= (\mathbf{R}^\kappa_{\nu\lambda,\mu} + \mathbf{R}^\kappa_{\nu\mu,\lambda})/3 \end{cases}.$$

Les tenseurs $\mathbf{K}^\kappa_{\lambda\mu\nu_1\dots\nu_i}$, que Kijowski et Senger appellent les *tenseurs de courbure d'ordres supérieurs* n'ont pas les mêmes symétries que le tenseur de courbure usuel. Ces tenseurs vérifient $\mathbf{K}^\kappa_{(\lambda\mu\nu_1\dots\nu_i)} = 0$, ils sont symétriques en $\lambda\mu$ et ils sont symétriques en $\nu_1 \dots \nu_i$.

Dans le référentiel e du laboratoire, on a l'équation géodésique :

$$\ddot{\gamma}^{\kappa} = -\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}(\gamma) \dot{\gamma}^{\lambda} \dot{\gamma}^{\mu}.$$

On fixe les conditions initiales $\dot{\gamma}_v(0) = v$ et $\gamma_v(0) = m$, puis on pose $\exp_m(v) = \gamma_v(1)$. En composant $\exp: TM \rightarrow \mathcal{M}$ avec un repère $E: \mathbb{R}^n \rightarrow TM$, on obtient une paramétrisation $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$.

THÉO. *Les paramétrisations $\exp \circ E$ sont inertielles d'ordre maximal.*

Par définition,

$$\tau \mapsto \exp(\tau v) = \gamma_{\tau v}(1) = \gamma_v(\tau).$$

est une géodésique. Elle est paramétrée par $\gamma^{\rho} = \tau v^{\rho}$ dans les coordonnées normales géodésiques. L'équation géodésique dans la carte exponentielle donne :

$$0 = -\bar{\Gamma}^{\kappa}_{\lambda\mu}(\tau v) v^{\lambda} v^{\mu}.$$

L'annulation en 0 à tout ordre des dérivées temporelles de cette équation donne le résultat recherché.

- ▶ Dans une paramétrisation exponentielle, on a $\Gamma_{(\lambda\mu, \nu_1 \dots \nu_i)}^\kappa(m) = 0$. Par unicité, un “repère inertiel d’ordre k ” n’est rien d’autre que le jet d’ordre $k + 2$ d’une paramétrisation exponentielle.
- ▶ Ceci donne en retour une construction étape par étape d’une approximation de l’exponentielle.
- ▶ Les quantités $\Gamma_{(\lambda\mu, \nu_1 \dots \nu_i)}^\kappa(m)$ paramètrent uniquement les jets de paramétrisation arbitraires induisant un même repère holonome.

Le k -jet $j_k(\Gamma)$ d’une connexion sans torsion ∇ sur la variété \mathcal{M} est donné par :

1. La donnée de $j_{k+2}(\exp \circ E)$, pour chaque repère holonome E de $T\mathcal{M}$.
2. La donnée de k tenseurs (généralisant le tenseur de courbure de Riemann), donnés en coordonnées normales géodésiques par

$$\mathbf{K}_{\lambda\mu\nu_1 \dots \nu_i}^\kappa(m) := \Gamma_{\lambda\mu, \nu_1 \dots \nu_i}^\kappa(m).$$