Fibré des repères et théorie du repère mobile

-Des connexions aux dérivées covariantes et vice-versa

Rencontre annuelle du GDR-GDM
La Rochelle, 26–28 Juin 2024.

Clément Ecker
clement.ecker@ens-paris-saclay.fr

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France.

Contexte

Usages

- On confond souvent la notion de dérivée covariante avec celle de connexion (ex : page wikipédia sur la connexion de Levi-Civita) ;
- Les références (Bleecker, 1981 ; Kobayashi and Nomizu, 1996) sont difficiles à lire ;
- Les connexions dans un sens plus général seront abordées dans plusieurs exposés ;
- Le fibré des repères est un prototype de fibré principal qui est la structure de base des théories de jauges ;
- Exemple : L'électro-magnétisme (Weyl, 1918).

Sommaire

Fibré des repères
Connexions
Dérivée covariante
Applications

Objectifs de la présentation

On va définir un objet, une connexion ω, sur le fibré des repères $\mathrm{L}(\mathcal{M})$, ensemble des repères en chaque points d'une variété $\mathcal{M}$, et on va voir qu'elle correspond à une dérivée covariante ∇ sur $T\mathcal{M}$ (et un peu plus).

Fibré des repères

Repères ponctuels p sur une variété $\mathcal{M}$

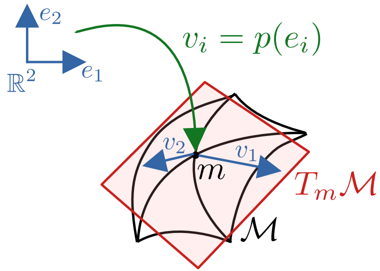
Soient $\mathcal{M}$ une variété différentielle de dimension d et (e_I) la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1

Un repère ponctuel p au point $m \in \mathcal{M}$ est :
une base (v_i) de l'espace tangent $T_m\mathcal{M}$ en m.

Définition 2

Un repère ponctuel p au point $m \in \mathcal{M}$ est :
un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $T_m\mathcal{M}$.



Les deux définitions sont équivalentes

- Si (v_i) est une base de $T_m\mathcal{M}$, alors $p(e_i) := v_i$ défini un isomorphisme $p : \mathbb{R}^d \mapsto T_m\mathcal{M}$.
- Si $p : \mathbb{R}^d \mapsto T_m\mathcal{M}$ est un isomorphisme, alors $(v_i) := (p(e_i))$ est une base de $T_m\mathcal{M}$.

Fibré des repères $\mathsf{L}(\mathcal{M})$ d'une variété $\mathcal{M}$

$$\begin{array}{c} \mathsf{L}(\mathcal{M}) \\ \Big\downarrow \pi \\ \mathcal{M} \end{array}$$

Ensemble des repères $\mathsf{L}(\mathcal{M})_m$ au point $m \in \mathcal{M}$

$$\mathsf{L}(\mathcal{M})_m := \left\{ p : \mathbb{R}^d \mapsto T_m\mathcal{M} \;\middle|\; p \text{ isomorphisme} \right\}$$

Définition : Fibré des repères $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

$$\mathsf{L}(\mathcal{M}) := \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \mathsf{L}(\mathcal{M})_m$$

Projection canonique $\pi : \mathsf{L}(\mathcal{M}) \mapsto \mathcal{M}$

La projection canonique π associe à chaque repère p son point de base m,

$$p \in \mathsf{L}(\mathcal{M})_m, \quad \pi(p) := m.$$

On appelle $\mathsf{L}(\mathcal{M})_m = \pi^{-1}(m)$ la fibre au dessus de m.

Trivialisation locale τ sur un ouvert U de $\mathcal{M}$

Soient (x^i) des coordonnées locales sur $U \subset \mathcal{M}$, (∂_{x^i}) la base associée de TU et (e_I) la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Définition

Une trivialisation locale τ sur $U \subset \mathcal{M}$ est une bijection de $\mathsf{L}(U)$ sur $U \times \mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$.

Exemple :

$$p \in \mathsf{L}(\mathcal{M}) \text{ un repère,} \quad \tau(p) = (\pi(p), p^I{}_j),$$

où $p^I{}_j$ est la matrice des composantes de p dans les bases (e_I) et (∂_{x^i}).

Propriétés

- On obtient un atlas de $\mathsf{L}(\mathcal{M})$: $\dim(\mathsf{L}(\mathcal{M})) = d + d^2$;
- Chaque fibre $\pi^{-1}(m) = \mathsf{L}(\mathcal{M})_m$ est isomorphe à $\mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$: $\mathsf{L}(\mathcal{M})_m \cong \mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$.

Repère mobile sur U un ouvert de $\mathcal{M}$

Définition

Un repère mobile s sur U est une section locale de $\mathrm{L}(\mathcal{M})$:

une application lisse $s\colon U \to \mathrm{L}(\mathcal{M})$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$.

Exemple : (∂_{x^i}) est un repère mobile.

Soient $s_i : U_i \to \mathrm{L}(\mathcal{M})$ $(i = 1, 2)$ deux repères mobiles locaux et $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Fonction de transition $g_{12} : U \mapsto \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$

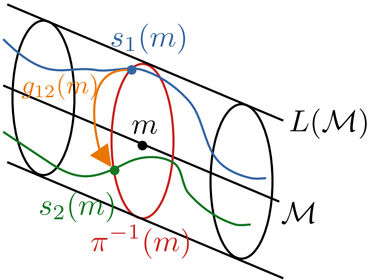
La fonction de transition g_{12} de s_1 vers s_2 est :

$$g_{12}(m) = s_1(m)^{-1} \circ s_2(m)$$

On retiendra :

$$s_2(m) = s_1(m) g_{12}(m),$$

où $s_i(m) : \mathbb{R}^d \mapsto T_m\mathcal{M}$ est un repère.



Equivalence entre sections et trivialisations locales

Soit U un ouvert de $\mathcal{M}$ et $\mathsf{L}(U)$ le fibré des repères de U.

Equivalence entre sections et trivialisations locales

- Si $\tau : \mathsf{L}(U) \mapsto U \times \mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$ est une trivialisation locale, alors pour $m \in \mathcal{M}$:
$$s(m) := \tau^{-1}(m, \mathrm{id}_{\mathsf{GL}_d(\mathbb{R})}), \quad \text{est une section locale.}$$
- Si $s : U \mapsto \mathsf{L}(U)$ est une section locale, alors pour $p \in \mathsf{L}(U)$:
$$\tau(p) := (\pi(p), g = s(m)^{-1} \circ p), \quad \text{est une trivialisation locale.}$$

Action (à droite) de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ sur le fibré des repères $\mathrm{L}(\mathcal{M})$

Définition

Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ agit sur $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ à droite par la multiplication matricielle :

$$(p, g) \mapsto R_g p := p \circ g = pg, \quad \text{pour } p \in \mathrm{L}(\mathcal{M}) \text{ un repère et } g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}).$$

Propriétés

- Si $\tau(p) = (m, g) \in U \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est une section locale sur U, alors :
$$\tau(ph) = (m, gh), \quad h \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}).$$
- Cette action est simple, différentiable, propre et l'espace quotient $\mathrm{L}(\mathcal{M}) / \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) = \mathcal{M}$;
- Son application linéaire tangente s'écrit :
$$T_p R_g(\delta p) = T_p R_g \,.\, \delta p = (\delta p) g, \quad \text{où } \delta p \in T_p \mathrm{L}(\mathcal{M}) \text{ est une } \textit{"variation de repères"}.$$

$\mathrm{L}(\mathcal{M})$ possède une structure de fibré principal localement trivial :
de base $\mathcal{M}$ et de groupe structural $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

Champs fondamentaux $\tilde{X}_u$ sur le fibré des repères $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

Soit u un vecteur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = \mathsf{M}_d(\mathbb{R})$ du groupe $\mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$.

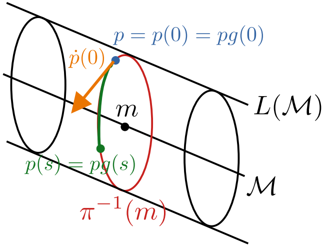
Définition : champ fondamental $\tilde{X}_u \in \mathsf{Vect}(\mathsf{L}(\mathcal{M}))$

$\tilde{X}_u$ est engendré par $u \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$:

$$p \in \mathsf{L}(\mathcal{M}), \quad (\tilde{X}_u)(p) := \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(pg(s))\right]_{s=0}$$

où $g(s)$ est un chemin de matrices dans $\mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$ tel que :

$$g(0) = \mathrm{id}_{\mathsf{GL}_d(\mathbb{R})} \text{ et } \dot{g}(0) = u.$$



Propriétés

- $[\tilde{X}_u, \tilde{X}_v]_{\mathsf{Vect}(\mathsf{L}(\mathcal{M}))} = \tilde{X}_{[u,v]_{\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})}}$; $\quad \left([u,v]_{\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})} = uv - vu\right)$
- L'application $u \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) \mapsto \tilde{X}_u \in \mathsf{Vect}(\mathsf{L}(\mathcal{M}))$ est un isomorphisme linéaire.

Sous-fibré vertical V de $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

Définition

Le sous-fibré vertical V est la distribution des sous-espaces vectoriels V_p :

$$V = \bigcup_{p \in \mathsf{L}(\mathcal{M})} V_p, \quad V_p = \ker(T_p \pi).$$

Les vecteurs de V_p sont tangents aux fibres $(\pi^{-1}(m) = \mathsf{L}(\mathcal{M})_m)$.

$$\begin{tikzcd} & T\mathsf{L}(\mathcal{M}) \arrow[dl] \arrow[dr, "T\pi"] & \\ \mathsf{L}(\mathcal{M}) \arrow[dr, "\pi"] & & T\mathcal{M} \arrow[dl] \\ & \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

Champs de vecteurs verticaux

Champs de vecteurs verticaux

Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \mathsf{Vect}(\mathsf{L}(\mathcal{M}))$ est vertical si :

$$\text{pour tout repère } p \in \mathsf{L}(\mathcal{M}), \quad \tilde{X}(p) \in V_p.$$

Soient $\tilde{X} \in \mathsf{Vect}(\mathsf{L}(\mathcal{M}))$ un champ vertical et (ξ_i) une base de $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$.

Décomposition en champs fondamentaux

Il existe une unique famille de fonctions $f_i : \mathsf{L}(\mathcal{M}) \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\tilde{X}(p) = \sum_{i=1}^{d^2} f_i(p)\tilde{X}_{\xi_i}(p).$$

Synthèse : Le fibré des repères comme prototype d'un fibré principal

A retenir

- L'ensemble des repères p en chaque point m d'une variété $\mathcal{M}$ forme :
  un fibré principal $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ de variété de base $\mathcal{M}$ et de groupe structural $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$
- Chaque fibre, ensemble des repères au même point, est isomorphe à $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$;
- Le sous-fibré vertical $V = \cup V_p$ est la distribution des :

$$V_p = \ker(T_p\pi) \quad \text{(vecteurs tangents aux fibres).}$$

Y a t'il une distribution canonique de sous-espaces "*horizontaux*" supplémentaires à V ?

Connexions

Sous-fibrés horizontaux H

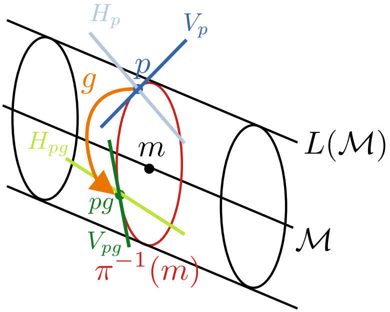
NON, il n'y a pas de supplémentaire canonique, mais on peut en CHOISIR un.

Définition

Un sous-fibré horizontal H est une distribution de sous espaces vectoriels H_p telle que :

$$H = \bigcup_{p \in \mathsf{L}(\mathcal{M})} H_p \quad \text{où en tout repère } p,\ T_p\mathsf{L}(\mathcal{M}) = V_p \oplus H_p.$$

On appelle cette distribution une connexion.



G-connexions

Une connexion est G invariante (G-connexion) si pour tout repère $p \in \mathsf{L}(\mathcal{M})$ et $g \in \mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$:

$$H_{pg} = T_pR_g \,.\, H_p = H_p g, \quad \text{car } T_pR_g \,.\, \delta p = (\delta p) g$$

où $\delta p \in T_p\mathsf{L}(\mathcal{M})$ est une *"variation de repères"*.

Toutes les connexions seront des G-connexions.

Formes de connexion ω sur le fibré des repères $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

Soit H une connexion sur $\mathsf{L}(\mathcal{M})$, ce sous-fibré peut être défini comme le noyau d'une 1-forme $\omega \in \Omega^1(\mathsf{L}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = \mathsf{M}_d(\mathbb{R})$.

Définition - Théorème

A toute connexion H, correspond une unique forme $\omega \in \Omega^1(\mathsf{L}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ telle que :

1. $\ker(\omega_p) := H_p$
2. $\omega(\tilde{X}_u) = u$, pour tout champ fondamental $\tilde{X}_u$.

Réciproquement, une telle forme ω définie une connexion H.

G-connexions

H est GL_d-équivariante ssi :

$$R_g^* \omega = g^{-1} \omega g.$$

Formes locales de connexions Γ sur $\mathcal{M}$

Soient ω une 1-forme de connexion et $s\colon U \mapsto \mathsf{L}(\mathcal{M})$ une sections locale sur $U \subset \mathcal{M}$.

Définition

On définit $\Gamma := s^*\omega : TU \mapsto \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ par :

$$(\Gamma)_m(\delta m) := (s^*\omega)_m(\delta m) = \omega_{s(m)}(T_m s \,.\, \delta m).$$

où $\delta m \in T_m\mathcal{M}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{L}(\mathcal{M}) \arrow[d, shift left, "\pi"] & \omega \in \Omega^1(\mathsf{L}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})) \\ \mathcal{M} \arrow[u, bend left, "s"] & \Gamma \in \Omega^1(\mathcal{M}, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

Formule de changement de jauge

Soient ω une connexion, $s_i : U_i \mapsto \mathsf{L}(\mathcal{M})$ $(i = 1, 2)$ deux sections locales.
Alors, $s_2(m) = s_1(m)g_{12}(m)$ et le lien entre leurs applications linéaires tangentes est :

$$T_m s_2 \,.\, \delta m = (\tilde{X}_u)_{s_1(m)g_{12}} + (T_m s_1 \,.\, \delta m)g_{12} \quad \text{où } u = g_{12}^{-1}(\mathrm{d}g_{12} \,.\, \delta m) \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}).$$

où $\delta m \in T_m\mathcal{M}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{M}$.

Formule de changement de jauges : $\Gamma_i := s_i^* \omega : TU_i \mapsto \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$

Sur $U_1 \cap U_2$, Γ_1 et Γ_2 sont reliées par :

$$(\Gamma_2)_m(\delta m) = g_{12}^{-1}(\mathrm{d}_m g_{12} \,.\, \delta m) + g_{12}^{-1}(\Gamma_1)_m(\delta m)g_{12}. \tag{1}$$

Réciproque

Inversement, étant donné un recouvrement de $\mathcal{M}$ par des formes Γ_i vérifiant **(1)**.
Il existe une unique G-connexion ω sur $\mathsf{L}(\mathcal{M})$ telle que les Γ_i soient les formes locales de ω.

Forme canonique θ sur $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

Définition

On définit également la 1-forme θ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par :

$$p \in \mathsf{L}(\mathcal{M}),\ \delta p \in T_p\mathsf{L}(\mathcal{M}), \quad \theta_p(\delta p) := p^{-1}(T_p\pi \,.\, \delta p).$$

Propriétés

- $\theta(\tilde{X}_u) = 0$ et $R_g^*\theta = g^{-1}\theta$;
- θ_p est un isomorphisme entre H_p et $\mathbb{R}^d$ (pour toute connexion H).

Formule de changement de jauge

Soient ω une connexion, $s_i : U_i \mapsto \mathrm{L}(\mathcal{M})$ $(i = 1, 2)$ deux sections locales.
Alors, $s_2(m) = s_1(m)g_{12}(m)$ et le lien entre leurs applications linéaires tangentes est :

$$T_m s_2 \,.\, \delta m = (\tilde{X}_u)_{s_1(m)g_{12}} + (T_m s_1 \,.\, \delta m)g_{12} \quad \text{où } u = g_{12}^{-1}(\mathrm{d}g_{12} \,.\, \delta m) \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}).$$

où $\delta m \in T_m\mathcal{M}$ est un vecteur tangent à $\mathcal{M}$.

Formule de changement de jauges : $\eta_i := s_i^*\theta : TU_i \mapsto \mathbb{R}^d$

Sur $U_1 \cap U_2$, η_1 et η_2 sont reliées par :

$$(\eta_2)_m(\delta m) = g_{12}^{-1}(\eta_1)_m(\delta m).$$

On remarque $(\eta_i)_m = s_i(m)^{-1}$, c'est donc la fonction *composantes* du repère s_i.

Formes basiques α sur le fibré des repères

Soient E un espace vectoriel, $\alpha \in \Omega^k(\mathsf{L}(\mathcal{M}), E)$ une k-forme à valeurs dans E et $\rho : \mathsf{GL}_d(\mathbb{R}) \mapsto \mathsf{GL}(E)$ une action linéaire à gauche de $\mathsf{GL}_d(\mathbb{R})$ sur E.

Définition

α est basique si :

1. elle est ρ-équivariante : $R_g^*\alpha = \rho(g)^{-1}\alpha$;
   - $E = \mathbb{R}^d$ et $\rho(g)v = g^{-1}v$;
   - $E = \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ et $\rho(g)v = g^{-1}vg$.
2. elle est horizontale : $\alpha(\dots, \tilde{X}_u, \dots) = 0_E$, pour tout champ fondamental $\tilde{X}_u$.

Formule de changement de jauges : $\mathcal{A}_i := s_i^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{M}, E)$

Sur $U_1 \cap U_2$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont reliées par :

$$(\mathcal{A}_2)_m(\delta m_1, \dots, \delta m_k) = \rho(g_{12})^{-1}(\mathcal{A}_1)_m(\delta m_1, \dots, \delta m_k).$$

Dérivée extérieure absolue d^ω des formes sur $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

Définition

La dérivée extérieure absolue $\mathrm{d}^\omega\alpha$ de $\alpha \in \Omega^k(\mathsf{L}(\mathcal{M}), E)$ est définie par:

$$(\mathrm{d}^\omega\alpha)(\delta p_1, \ldots, \delta p_k) = (\mathrm{d}\alpha)(\delta p_1^H, \ldots, \delta p_k^H).$$

où δp_i^H est la composante horizontale de $\delta p_i \in T_p\mathsf{L}(\mathcal{M})$ une *"variation de repère"*.

La dérivée absolue d'une forme équivariante (même non horizontale) est **toujours BASIQUE**.

Formes de torsion Θ et de courbure Ω sur $\mathsf{L}(\mathcal{M})$

Soient ω une forme de connexion, θ la forme canonique et d^ω la dérivée absolue.

Forme de torsion $\Theta \in \Omega^2(\mathsf{L}(\mathcal{M}), \mathbb{R}^d)$

$$\Theta := \mathrm{d}^\omega \theta$$

Forme de courbure $\Omega \in \Omega^2(\mathsf{L}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$

$$\Omega := \mathrm{d}^\omega \omega$$

Equations structurales

$$\begin{aligned}
\Omega(\delta p_1, \delta p_2) &= (\mathrm{d}\omega)(\delta p_1, \delta p_2) + \omega(\delta p_1)\omega(\delta p_2) - \omega(\delta p_2)\omega(\delta p_1) \quad & \left(\Omega = \mathrm{d}\omega + \tfrac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) \\
\Theta(\delta p_1, \delta p_2) &= (\mathrm{d}\theta)(\delta p_1, \delta p_2) + \omega(\delta p_1)\theta(\delta p_2) - \omega(\delta p_2)\theta(\delta p_1) \quad & (\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta)
\end{aligned}$$

Synthèse : Connexions sur le fibré des repères

A retenir

- Une connexion H est le **CHOIX** d'une distribution de sous espaces H_p de $TL(\mathcal{M})$ supplémentaires aux sous espaces verticaux $V_p = \ker(T_p\pi)$;
- Cette connexion est définie par une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$ qui vérifie :
$$R_g^*\omega = g^{-1}\omega g, \quad \omega(\tilde{X}_u) = u;$$
- Les formes basiques :
$$\rho\text{-équivariantes } (R_g^*\alpha = \rho(g)^{-1}\alpha) \text{ et horizontales } (\mathfrak{i}_{\tilde{X}_u}\alpha = 0)$$
sont les formes qui *"descendent"* comme des tenseurs sur $\mathcal{M}$;
- Exemples : les formes canonique, de torsion et de courbure ;
- La forme de connexion ω n'est pas basique :

ω ne *"descend"* pas sur $\mathcal{M}$ comme un tenseur.

Comment donc interpréter la forme de connexion ω ?

Dérivée covariante

Dérivées covariantes ∇ sur le fibré tangent à la variété $\mathcal{M}$

Définition

Une dérivée covariante sur $T\mathcal{M}$ est un opérateur

$$\begin{array}{llll}\nabla : & \mathrm{Vect}(\mathcal{M}) \times \mathrm{Vect}(\mathcal{M}) & \mapsto \mathrm{Vect}(\mathcal{M}) \\ & (X,Y) & \mapsto \nabla_X Y\end{array}$$

tel que:

1. $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$ ($\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R})$-linéarité);
2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)Y$ (Règle de Leibnitz).

Dans une carte locale (x^i), où (∂_{x^i}) base de l'espace tangent

Les symboles de Christoffels $\Gamma_{ij}^k := \mathrm{d}x^k(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j})$ se transforment selon la règle :

$$\overline{\Gamma}_{pq}^r = \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\right)\Gamma_{ij}^k + \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q}\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\right)$$

D'une connexion ω sur L$(\mathcal{M})$ à une dérivée covariante ∇ sur $T\mathcal{M}$

Soient s_i des repères mobiles sur des ouverts U_i de $\mathcal{M}$, ω une forme de connexion sur L$(\mathcal{M})$ et $\Gamma_i = s_i^*\omega$ les formes de connexions locales sur $\mathcal{M}$.

Construction d'une dérivée covariante ∇

On pose :

$$\overset{(i)}{\nabla}_X Y = s_i(\mathrm{d}(s_i^{-1}(Y))\,.\,X + \Gamma_i(X)s_i^{-1}(Y))$$

Théorème

- Cette définition est indépendante du choix de s_i :

$(\overset{(1)}{\nabla} = \overset{(2)}{\nabla} = \nabla)$ par la transformation des Γ_i ;

- ∇ est bien d'une dérivée covariante.

D'une dérivée covariante ∇ sur $T\mathcal{M}$ à une connexion ω sur L$(\mathcal{M})$

Soit ∇ une dérivée covariante sur $T\mathcal{M}$ et s_i un recouvrement de $\mathcal{M}$ par des sections locales sur des ouverts U_i (typiquement des (∂_{x^i}) issus de coordonées locales sur $\mathcal{M}$).

Construction d'un recouvrement de formes locales $\Gamma_i : TU_i \mapsto \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$

On pose pour $X \in$ Vect$(\mathcal{M})$:

$$\begin{array}{rlcl} \Gamma_i(X) : & \mathbb{R}^d & \mapsto & \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_d(\mathbb{R}) \\ & v & \mapsto & s_i(m)^{-1}\Big(\nabla_X s_i(m)(v)\Big) \end{array}$$

Théorème

- $\Gamma_i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ qui vérifie la formule de changement de jauge :
  Γ_i est une forme locale de connexion sur U_i ;
- Par recollement des formes locales Γ_i sur $\mathcal{M}$ on en déduit :
  l'existence d'une unique forme de connexion ω sur L$(\mathcal{M})$ telle que $\Gamma_i = s_i^*\omega$.

Synthèse : Dérivée covariante ∇ sur $T\mathcal{M}$ et connexion ω sur $\mathrm{L}(\mathcal{M})$

A retenir

A partir d'une forme de connexion ω sur $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ on peut construire une derivée covariante ∇ sur $T\mathcal{M}$ et vice-versa.

Comment interpréter les formes de torsion et de courbure ?

Applications

De la forme de torsion Θ sur $\mathsf{L}(\mathcal{M})$ à la torsion T de ∇

Soient $\Theta := \mathrm{d}^\omega \theta$ la forme de torsion et $\sigma := s^*\Theta$ une forme locale.

Lien avec la torsion T de ∇

On rappelle :

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_{\mathsf{Vect}(\mathcal{M})}$$

En appliquant s^* à l'équation structurale :

$$\Theta(\tilde{X},\tilde{Y}) = (\mathrm{d}\theta)(\tilde{X},\tilde{Y}) + \omega(\tilde{X})\theta(\tilde{Y}) - \omega(\tilde{Y})\theta(\tilde{X})$$

Et en utilisant : $((s^*\theta)_m = (\eta)_m = s(m)^{-1})$

$$s^*(\mathrm{d}\theta)(X,Y) = \mathrm{d}\eta(X,Y) = \mathcal{L}_X \eta(Y) - \mathcal{L}_Y \eta(X) - \eta([X,Y]_{\mathsf{Vect}(\mathcal{M})})$$

On obtient :

$$\sigma(X,Y) = s(m)^{-1}\Big(T(X,Y)\Big)$$

De la forme de courbure Ω sur $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ à la courbure R de ∇

Soient $\Omega := \mathrm{d}^\omega \omega$ la forme de courbure et $\rho := s^*\Omega$ une forme locale.

Lien avec la courbure R de ∇

On rappelle :

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

En appliquant s^* à l'équation structurale :

$$\Omega(\tilde{X},\tilde{Y}) = (\mathrm{d}\omega)(\tilde{X},\tilde{Y}) + \omega(\tilde{X})\omega(\tilde{Y}) - \omega(\tilde{Y})\omega(\tilde{X})$$

On obtient : $$\rho(X,Y)s(m)^{-1}(Z) = s(m)^{-1}\Big(R(X,Y)Z\Big)$$

Identité de Bianchi (II)

$$\mathrm{d}^\omega \Omega = \mathrm{d}^\omega(\mathrm{d}^\omega \omega) = 0$$

Formulation de l'EM sur un fibré principal (Weyl, 1918)

Fibré principal	Fibré des repères	Electro-magnétisme	
Base	$\mathcal{M}$	Univers $(\mathcal{M}, \eta)$ 4D η métrique de Minkowski	$\eta = -c^2 \mathrm{d}t^2 + q$
Groupe structural	$\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$	$U(1)$ (abélien)	
Forme de connexion	Γ	$i\mathcal{A}$ potentiel EM $\mathcal{A} = \phi \mathrm{d}t - qA$	ϕ potentiel électrique $A = (A_x\ A_y\ A_z)^T$
Changement de jauge	$\Gamma_2 = g_{12}^{-1}\Gamma_1 g_{12}$ $+g_{12}^{-1}\mathrm{d}g_{12}$	$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \mathrm{d}\chi$	$\phi_2 = \phi_1 - \partial_t \chi$ $A_2 = A_1 + \nabla \chi$
Forme de courbure	$\Omega = \mathrm{d}^\omega \omega$	$F = \mathrm{d}\mathcal{A}$ Tenseur de Faraday $F = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$	$B = \text{rot } A$ $E = -\nabla\phi - \partial_t A$
Bianchi (II)	$\mathrm{d}^\omega \Omega = 0$	$\mathrm{d}F = 0$	rot $E = -\partial_t B$ div $B = 0$

Réferences

Weyl, H. (1918).Gravitation and electricity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 1918*, 465.

Bleecker, D. (1981). *Gauge theory and variational principles*. Addison-Wesley.

Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1996). *Foundations of differential geometry. 2*. Wiley.