Processus Gaussiens et séries aléatoires de fonctions propres du Laplacien

La Rochelle-2023

Rafik Imekraz

La Rochelle Université

Trois périodes

1. La période Paley-Salem-Zygmund (1930-1954) :

   premiers résultats et questions sur les séries trigonométriques
2. L'âge d'or (1967-1986) :

   résolution de **tous** les problèmes (Dudley, Fernique, Marcus, Pisier, Talagrand).
3. Les 20 dernières années :

   analogues riemanniens des problèmes précédents (Burq, Lebeau, Tzvetkov, Robert,...)

À toute suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on associe la fonction trigonométrique :

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Problème : trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que $f \in L^p$

Ici $f \in L^p$ signifie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < +\infty$.

À toute suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on associe la fonction trigonométrique :

$$\forall x \in [-\pi,\pi] \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Problème : trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que $f \in L^p$

Ici $f \in L^p$ signifie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < +\infty$.

Solution pour $p = 2$: on doit avoir $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ (théorème de Parseval-Bessel sur les séries trigonométriques).

À toute suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on associe la fonction trigonométrique :

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Problème : trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que $f \in L^p$

Ici $f \in L^p$ signifie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < +\infty$.

Solution pour $p = 2$: on doit avoir $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ (théorème de Parseval-Bessel sur les séries trigonométriques).

Solution pour $1 < p < +\infty$: on peut aussi donner une condition (beaucoup moins jolie) avec la théorie de Littlewood-Paley (découpages dyadiques en fréquences).

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction déterministe} & f(x) = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{fonction aléatoire} & f^\omega(x) = & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n(\omega) c_n e^{inx} \end{array}$$

où $\varepsilon_n(\omega) = +1$ avec $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$
et $\varepsilon_n(\omega) = -1$ avec $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{fonction déterministe} & f(x) = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{fonction aléatoire} & f^\omega(x) = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n(\omega) c_n e^{inx}
\end{array}
$$

où $\varepsilon_n(\omega) = +1$ avec $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$
et $\varepsilon_n(\omega) = -1$ avec $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$.

Problème (Paley-Salem-Zygmund 1930 et 1954) :
trouver une condition nécessaire et suffisante
sur les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que $f^\omega \in L^p$ avec $\mathbb{P} = 1$

$$\begin{array}{ccc}
\text{fonction déterministe} & f(x) = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{fonction aléatoire} & f^\omega(x) = & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n(\omega) c_n e^{inx}
\end{array}$$

où $\varepsilon_n(\omega) = +1$ avec $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$
et $\varepsilon_n(\omega) = -1$ avec $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$.

Problème (Paley-Salem-Zygmund 1930 et 1954) :
trouver une condition nécessaire et suffisante
sur les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour que $f^\omega \in L^p$ avec $\mathbb{P} = 1$

Autrement dit : on souhaite que $f^\omega \in L^p$ pour tous les échantillons infinis de signes $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, ...)$

Pour simplifier, on ne considère que des fréquences positives :

$$f^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \pm c_n e^{inx}, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

Pour simplifier, on ne considère que des fréquences positives :

$$f^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \pm c_n e^{inx}, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

- Pour tout $p \in [1, +\infty)$, Paley et Zygmund ont prouvé en 1930

$$(c_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \qquad \Leftrightarrow \qquad f^\omega \in L^p \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1$$

Pour simplifier, on ne considère que des fréquences positives :

$$f^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \pm c_n e^{inx}, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

- Pour tout $p \in [1, +\infty)$, Paley et Zygmund ont prouvé en 1930

$$\begin{array}{rcl} (c_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) & \Leftrightarrow & f^\omega \in L^p \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 \\ f^\omega \in L^2 \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 & \Leftrightarrow & f^\omega \in L^p \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 \end{array}$$

Cela est surprenant car, en général, une fonction f dans $L^2(-\pi, \pi)$ n'est pas dans $L^p(-\pi, \pi)$ pour $p > 2$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x||\ln(x)|}}$$

Ici $f \in L^\infty$ signifie que f est bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Étrangement, cela ne change pas du tout les résultats si on se restreint au cas où f est continue dans $[-\pi, \pi]$ (alors que ça serait a priori plus restrictif).

Ici $f \in L^\infty$ signifie que f est bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Étrangement, cela ne change pas du tout les résultats si on se restreint au cas où f est continue dans $[-\pi, \pi]$ (alors que ça serait a priori plus restrictif).

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 \quad \Leftrightarrow \;??$$

Ici $f \in L^\infty$ signifie que f est bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Étrangement, cela ne change pas du tout les résultats si on se restreint au cas où f est continue dans $[-\pi, \pi]$ (alors que ça serait a priori plus restrictif).

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 \quad \Leftrightarrow \ ??$$

$$\Uparrow$$

Ici $f \in L^\infty$ signifie que f est bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Étrangement, cela ne change pas du tout les résultats si on se restreint au cas où f est continue dans $[-\pi, \pi]$ (alors que ça serait a priori plus restrictif).

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 \quad \Leftrightarrow \; ??$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \sqrt{\sum_{k\geq n} |c_k|^2} < +\infty}$$

(Salem-Zygmund 1954)

Résultats pour $p = \infty$

Ici $f \in L^\infty$ signifie que f est bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Étrangement, cela ne change pas du tout les résultats si on se restreint au cas où f est continue dans $[-\pi, \pi]$ (alors que ça serait a priori plus restrictif).

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \quad \text{avec } \mathbb{P} = 1 \quad \Leftrightarrow \ ??$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \sqrt{\sum_{k\geq n} |c_k|^2} < +\infty} \qquad \text{(Salem-Zygmund 1954)}$$

Ce résultat un peu technique fut le meilleur dans la période avant 1954 (il améliore un autre résultat de Paley-Zygmund 1930).

Cette période voit la résolution du problème suivant

Problème : trouver une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}$ avec $\mathbb{P} = 1$

Cette période voit la résolution du problème suivant

Problème : trouver une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}$ avec $\mathbb{P} = 1$

Solution conséquence de deux résultats fondamentaux obtenus par Dudley (1967) et Fernique (1975).

Cette période voit la résolution du problème suivant

Problème : trouver une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm c_n e^{inx} \in \mathcal{C}$ avec $\mathbb{P} = 1$

Solution conséquence de deux résultats fondamentaux obtenus par Dudley (1967) et Fernique (1975).

Spoiler : Marcus and Pisier ont prouvé dans les années 80' que cela équivaut à comprendre le cas gaussien

$$f^{G,\omega}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega) c_n e^{inx}$$

où (g_n) est une suite i.i.d. de va gaussiennes centrées réduites complexes $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$.

Définition d'un processus gaussien

Soit $\mathcal{M}$ un compact, par exemple $\mathcal{M} = [-\pi, \pi]$ ou même une surface plus générale (variété riemannienne).
Pour tout $x \in \mathcal{M}$, on fixe une variable aléatoire $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x)$.
Definition : on dit que $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ est un processus gaussien si pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathcal{M}$, toute combinaison linéaire finie des variables aléatoires $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x_k)$ reste une variable aléatoire gaussienne.

Soit $\mathcal{M}$ un compact, par exemple $\mathcal{M} = [-\pi, \pi]$ ou même une surface plus générale (variété riemannienne).
Pour tout $x \in \mathcal{M}$, on fixe une variable aléatoire $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x)$.
Definition : on dit que $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ est un processus gaussien si pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathcal{M}$, toute combinaison linéaire finie des variables aléatoires $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x_k)$ reste une variable aléatoire gaussienne.

Exemple : si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < +\infty$ alors $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx}$ est un processus gaussien sur $[-\pi, \pi]$.

Soit $\mathcal{M}$ un compact, par exemple $\mathcal{M} = [-\pi, \pi]$ ou même une surface plus générale (variété riemannienne).
Pour tout $x \in \mathcal{M}$, on fixe une variable aléatoire $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x)$.
Definition : on dit que $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ est un processus gaussien si pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathcal{M}$, toute combinaison linéaire finie des variables aléatoires $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x_k)$ reste une variable aléatoire gaussienne.

Exemple : si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < +\infty$ alors $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega) c_n e^{inx}$ est un processus gaussien sur $[-\pi, \pi]$.
Problème : caractériser les processus gaussiens $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ telles que la fonction suivante soit continue avec $\mathbb{P} = 1$:

$$x \in \mathcal{M} \mapsto f^{G,\omega}(x)$$

Soit $\mathcal{M}$ un compact, par exemple $\mathcal{M} = [-\pi, \pi]$ ou même une surface plus générale (variété riemannienne).
Pour tout $x \in \mathcal{M}$, on fixe une variable aléatoire $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x)$.
Definition : on dit que $(f^{G,\omega}(x))_{x \in \mathcal{M}}$ est un processus gaussien si pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathcal{M}$, toute combinaison linéaire finie des variables aléatoires $\omega \mapsto f^{G,\omega}(x_k)$ reste une variable aléatoire gaussienne.

Exemple : si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 < +\infty$ alors $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(\omega) c_n e^{inx}$ est un processus gaussien sur $[-\pi, \pi]$.
Problème : caractériser les processus gaussiens $(f^{G,\omega}(x))_{x \in \mathcal{M}}$ telles que la fonction suivante soit continue avec $\mathbb{P} = 1$:

$$x \in \mathcal{M} \mapsto f^{G,\omega}(x)$$

Solution complète conjecturée par Fernique et résolue par Talagrand (théorie des mesures majorantes).

Vu que l'on travaille sur un compact $\mathcal{M}$, ce dernier est déjà muni d'une topologie et d'une distance...
...mais dans la théorie des processus gaussiens, on s'est rendu compte qu'il fallait changer de distance.

Principe fondamental (Fernique) : Comprendre la continuité (probabiliste) du processus gaussien $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ est équivalent à comprendre la distance suivante sur $\mathcal{M}$:

$$\boxed{\delta(x,y) = \|f^{G,\omega}(x) - f^{G,\omega}(y)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\mathbf{E}[|f^{G,\omega}(x) - f^{G,\omega}(y)|^2]}}$$

Vu que l'on travaille sur un compact $\mathcal{M}$, ce dernier est déjà muni d'une topologie et d'une distance...
...mais dans la théorie des processus gaussiens, on s'est rendu compte qu'il fallait changer de distance.

Principe fondamental (Fernique) : Comprendre la continuité (probabiliste) du processus gaussien $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ est équivalent à comprendre la distance suivante sur $\mathcal{M}$:

$$\boxed{\delta(x,y) = \|f^{G,\omega}(x) - f^{G,\omega}(y)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\mathbf{E}[|f^{G,\omega}(x) - f^{G,\omega}(y)|^2]}}$$

Signification : si deux processus gaussiens donnent la même distance, alors ils sont simultanément continus ou simultanément discontinus.

Vu que l'on travaille sur un compact $\mathcal{M}$, ce dernier est déjà muni d'une topologie et d'une distance...
...mais dans la théorie des processus gaussiens, on s'est rendu compte qu'il fallait changer de distance.

Principe fondamental (Fernique) : Comprendre la continuité (probabiliste) du processus gaussien $(f^{G,\omega}(x))_{x\in\mathcal{M}}$ est équivalent à comprendre la distance suivante sur $\mathcal{M}$:

$$\boxed{\delta(x,y) = \|f^{G,\omega}(x) - f^{G,\omega}(y)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\mathbf{E}[|f^{G,\omega}(x) - f^{G,\omega}(y)|^2]}}$$

Signification : si deux processus gaussiens donnent la même distance, alors ils sont simultanément continus ou simultanément discontinus.
Exemple : si $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx}$ alors

$\delta(x,y)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 |e^{inx} - e^{iny}|^2$ et $\boxed{\delta \text{ ne dépend que de } (c_n)}$.

On reste sur $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx}$ sur $[-\pi,\pi]$.

On reste sur $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx}$ sur $[-\pi, \pi]$.

En résumé, on cherche une information de nature topologique sur $[-\pi, \pi]$ pour la nouvelle distance (ou pseudo-distance) qui permet d'assurer la continuité (avec $\mathbb{P} = 1$) de la série trigonométrique aléatoire $f^{G,\omega}(x)$.

On reste sur $f^{G,\omega}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx}$ sur $[-\pi,\pi]$.

En résumé, on cherche une information de nature topologique sur $[-\pi,\pi]$ pour la nouvelle distance (ou pseudo-distance) qui permet d'assurer la continuité (avec $\mathbb{P}=1$) de la série trigonométrique aléatoire $f^{G,\omega}(x)$.

Sans rentrer dans les détails techniques, en exploitant une hypothèse forte de symétrie sur $[-\pi,\pi]$ vis-à-vis des fonctions e^{inx} (on parle de stationnarité), la CNS est l'intégrale entropique

$$\int_0^1 \sqrt{\ln N_\delta(\varepsilon)}d\varepsilon < +\infty,$$

où $N_\delta(\varepsilon)$ est le nombre minimal de boules de rayon $\varepsilon > 0$ dont l'union recouvre $[-\pi,\pi]$ pour la nouvelle distance δ.

Vers les surfaces généralisées

Sur une variété riemannienne compacte sans bord M, il y a

- un opérateur Laplacien $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$

Sur une variété riemannienne compacte sans bord M, il y a
- un opérateur Laplacien $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$
- une base hilbertienne de modes propres dans $L^2(M)$:

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n^2\phi_n \qquad \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_n \to +\infty$$

Sur une variété riemannienne compacte sans bord M, il y a

- un opérateur Laplacien $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$
- une base hilbertienne de modes propres dans $L^2(M)$:

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n^2\phi_n \qquad \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_n \to +\infty$$

$$M = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [-\pi, \pi] \quad \Rightarrow \quad \Delta e^{inx} = -n^2 e^{inx}$$ analyse de Fourier classique

Sur une variété riemannienne compacte sans bord M, il y a
- un opérateur Laplacien $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$
- une base hilbertienne de modes propres dans $L^2(M)$:

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n^2\phi_n \qquad \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_n \to +\infty$$

$$M = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [-\pi, \pi] \quad \Rightarrow \quad \Delta e^{inx} = -n^2 e^{inx}$$ analyse de Fourier classique

Un exemple naturel de série aléatoire $f^{G,\omega}$ serait

$$f^{G,\omega}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega) c_n \phi_n(x)$$

Ce n'est pas le seul exemple, mais les autres exemples sont plus délicats à présenter.

Sur une variété riemannienne compacte sans bord M, il y a
- un opérateur Laplacien $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$
- une base hilbertienne de modes propres dans $L^2(M)$:

$$\Delta\phi_n = -\lambda_n^2\phi_n \qquad \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_n \to +\infty$$

$$M = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [-\pi, \pi] \quad \Rightarrow \quad \Delta e^{inx} = -n^2 e^{inx}$$ analyse de Fourier classique

Un exemple naturel de série aléatoire $f^{G,\omega}$ serait

$$f^{G,\omega}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n\phi_n(x)$$

Ce n'est pas le seul exemple, mais les autres exemples sont plus délicats à présenter.

Problème (Tzvetkov 2009) :

Trouver une CNS de continuité avec $\mathbb{P} = 1$ pour la fonction aléatoire $f^{G,\omega}$ (ou pour d'autres exemples).

Supposons que la surface $\mathcal{M}$ (ou plus généralement une variété) a beaucoup de symétries.

En termes plus sophistiqués : le groupe des isométries agit transitivement sur $\mathcal{M}$.

Supposons que la surface $\mathcal{M}$ (ou plus généralement une variété) a beaucoup de symétries.

En termes plus sophistiqués : le groupe des isométries agit transitivement sur $\mathcal{M}$.

La théorie développée par Marcus et Pisier dans les années 80 permet de montrer que la CNS de continuité pour une fonction aléatoire est encore l'intégrale entropique.

Supposons que la surface $\mathcal{M}$ (ou plus généralement une variété) a beaucoup de symétries.

En termes plus sophistiqués : le groupe des isométries agit transitivement sur $\mathcal{M}$.

La théorie développée par Marcus et Pisier dans les années 80 permet de montrer que la CNS de continuité pour une fonction aléatoire est encore l'intégrale entropique.

On notera que cela est applicable notamment pour les sphères usuelles.

Supposons que la surface $\mathcal{M}$ (ou plus généralement une variété) a beaucoup de symétries.

En termes plus sophistiqués : le groupe des isométries agit transitivement sur $\mathcal{M}$.

La théorie développée par Marcus et Pisier dans les années 80 permet de montrer que la CNS de continuité pour une fonction aléatoire est encore l'intégrale entropique.

On notera que cela est applicable notamment pour les sphères usuelles.

Mais cette théorie n'est pas applicable aux surfaces sans symétrie...

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx} \in \mathcal{C}^0 \quad \text{with } \mathbb{P}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \sqrt{\ln N_\delta(\varepsilon)}d\varepsilon < +\infty,$$

Theorem (RI 2022)

Soit $\mathcal{M}$ une variété riemannienne compacte de dimension $d \geq 2$ sans bord. Alors on a l'équivalence

1. $f^{G,\omega}$ *est continue avec* $\mathbb{P}=1$,
2. *l'intégrale d'entropie* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln N_\delta(\varepsilon)}d\varepsilon$ *est convergente*

   (pour la nouvelle distance δ sur $\mathcal{M}$).

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega)c_n e^{inx} \in \mathcal{C}^0 \quad \text{with } \mathbb{P}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \sqrt{\ln N_\delta(\varepsilon)}d\varepsilon < +\infty,$$

Theorem (RI 2022)

Soit $\mathcal{M}$ une variété riemannienne compacte de dimension $d \geq 2$ sans bord. Alors on a l'équivalence

1. $f^{G,\omega}$ *est continue avec* $\mathbb{P}=1$,
2. *l'intégrale d'entropie* $\int_0^1 \sqrt{\ln N_\delta(\varepsilon)}d\varepsilon$ *est convergente (pour la nouvelle distance* δ *sur* $\mathcal{M}$*).*
3. *une condition de type Salem-Zygmund est satisfaite :*

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p\sqrt{\ln(p)}} \Big(\sum_{n=p}^{+\infty} |c_n|^2 \Big)^{1/2} < +\infty$$

Idée principale de la preuve

Le point clé est le principe fondamental de la théorie des processus gaussiens : une analyse fine de la nouvelle distance δ associée au processus gaussien.

Le point clé est le principe fondamental de la théorie des processus gaussiens : une analyse fine de la nouvelle distance δ associée au processus gaussien.

Dans le cas avec symétrie, on vérifie que $\delta(x, y)$ ne dépend que de la distance riemannienne entre x et y.
Propriété illusoire dans le cas sans symétrie...

En utilisant des résultats de Hörmander 1968 et des résultats récents de Canzani-Hanin 2015, on peut affaiblir la propriété précédente de deux façons :

- on montre que $\delta(x, y)$ est **équivalente** à une troisième distance qui ne dépend que de la distance riemannienne entre x et y,

$\Rightarrow$ on peut soit calquer la preuve du théorème de Dudley-Fernique ou utiliser la théorie (disproportionnée ici) des mesures majorantes pour montrer que la CNS est l'intégrale d'entropie.

- cette troisième distance est explicite :

$$\delta(x,y)^2 \simeq \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 \min(1, n \,\mathrm{Dist}(x,y))^2$$

- cette troisième distance est explicite :

$$\delta(x,y)^2 \simeq \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 \min(1, n\,\mathrm{Dist}(x,y))^2$$

cette forme est surprenante ... car fausse en dim $d = 1$ où l'on a seulement

$$\delta(x,y)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 |e^{inx} - e^{iny}|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |c_n|^2 n^2 |x-y|^2$$

- cette troisième distance est explicite :

$$\delta(x,y)^2 \simeq \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 \min(1, n\,\mathrm{Dist}(x,y))^2$$

cette forme est surprenante ... car fausse en dim $d = 1$ où l'on a seulement

$$\delta(x,y)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 |e^{inx} - e^{iny}|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} |c_n|^2 n^2 |x-y|^2$$

$\Rightarrow$ c'est cette forme explicite qui permet de faire surgir la condition de Salem-Zygmund en tant que CNS

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p\sqrt{\ln(p)}} \Big(\sum_{n=p}^{+\infty} |c_n|^2\Big)^{1/2} < +\infty$$