

Observations partielles et prévision :

Modèles graphiques pour la météorologie

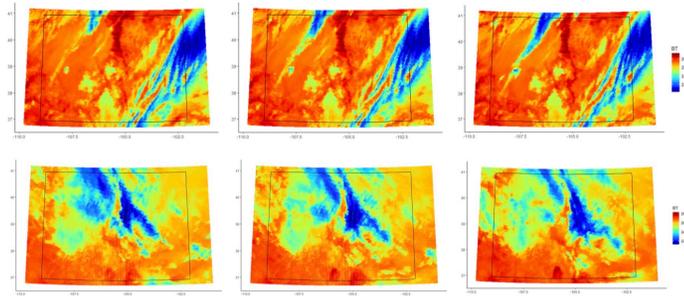
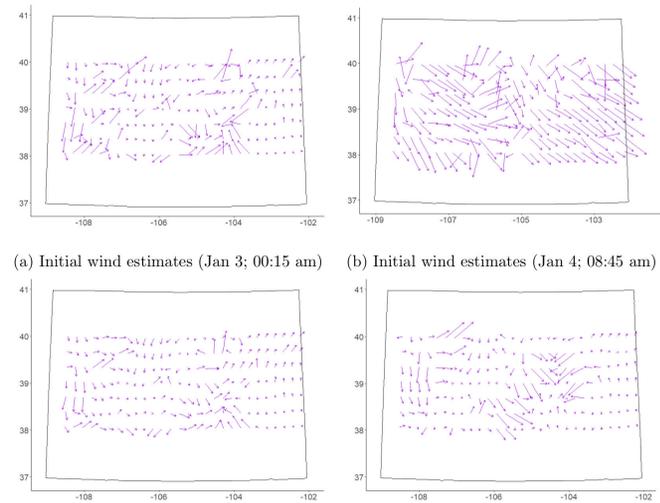


Figure 4: Data buffers containing brightness temperature (Kelvin) maps over Colorado on January 3, 2015 at 00:15 am (top panel) and on January 4, 2015 at 08:45 am (bottom panel).

[from Sahoo 21 - arXiv:1902.09653]



(c) Smoothed wind estimates (Jan 3; 00:15 am) (d) Smoothed wind estimates (Jan 4; 08:45 am)

Navier-Stokes \longleftrightarrow Boltzmann \longleftrightarrow Propagation de Crochances

I] Modèles graphiques (Markov Random Fields, Physique statistique, Machines de Boltzmann, ...)

- $E : \mathcal{P}(\Omega)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ faisceau d'espaces de configuration sur une base discrète Ω .
- $K \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ recouvrement de la base par un hypergraphe.
- $h_u : E_u \rightarrow \mathbb{R}$ potentiel d'interaction pour tout $U \in K$

DEF :

Énergie totale :

$$H_{\Omega}(x_{\Omega}) = \sum_{u \in K} h_u(x_{\Omega|u})$$

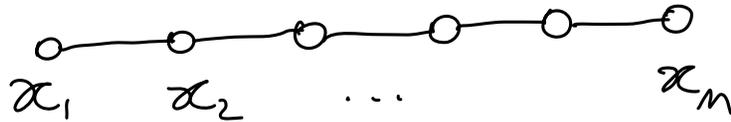
État de Gibbs :

$$p_{\Omega}(x_{\Omega}) = \frac{1}{Z_{\Omega}} e^{-\beta H_{\Omega}(x_{\Omega})} \propto \prod_{u \in K} e^{-\beta h_u(x_{\Omega|u})}$$

Cette structure (\sum_K pour H_{Ω} - \prod_K pour p_{Ω}) revient à supposer la localité des interactions relativement à $K \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

Exemples : (à variables linaires et interaction par paires)

① chaînes de Markov



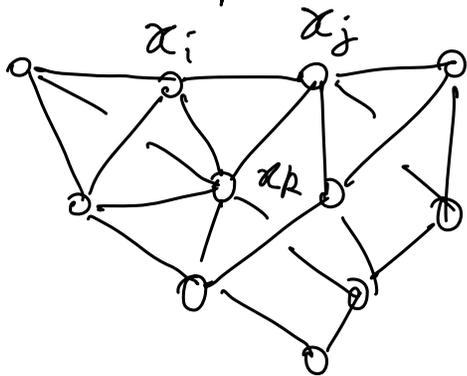
$$\Omega = \{1, \dots, n\}$$

$$K = \{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Hamiltonien de Ising:

$$H_{\Omega}(x_{\Omega}) = \sum_{i \in \Omega} f_i x_i + \sum_{i \sim j} w_{ij} x_i x_j$$

② verres de spins



(Ω, K) graphe

$$E_{\Omega} = \{-1, 1\}^{\Omega}$$

= Réseaux de Neurones de Hopfield (Mézard, Monkanari ...)

Propagation de croyances : (BP)

États de Gibbs locaux

DEF:

$$p_v(x_v) = \frac{1}{Z_v} e^{-H_v(x_v)}$$

ou

Hamiltonien locaux

$$H_v(x_v) = \sum_{W \subset V} h_W(x_v|W)$$

- PBs:
- Paramétrisation de H_Ω par les (h_U) non-unique
 - Les (p_U) ne sont pas consistants a priori sous la marginalisation

- La diffusion de croyances explore les (h'_V) qui conservent l'énergie H_Ω :

$$h'_V(x_v) = h_v(x_v) + \underbrace{\sum_{U \supset V} \varphi_{U \rightarrow V}(x_v) - \sum_{W \subset V} \varphi_{V \rightarrow W}(x_v|W)}_{\text{passages de messages}} \quad h' = h + \delta \varphi \iff \sum h'_V = \sum h_V$$

HOMOLOGIE

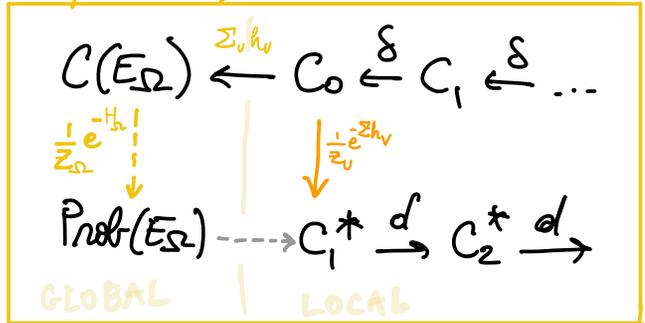
- Ses états stationnaires définissent des lois de Gibbs locales consistantes:

$$p_v(x_v) = \sum_{x_{U \setminus V} = x_v} p_U(x_U)$$

$dp = 0$
COHOMOLOGIE

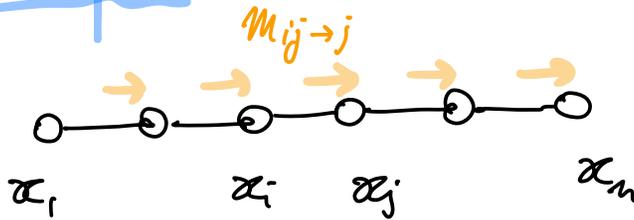
\Rightarrow BP estime les marginales p_V sans estimer p_Ω
IMPOSSIBLE!

Complexes adjoints



Exemples

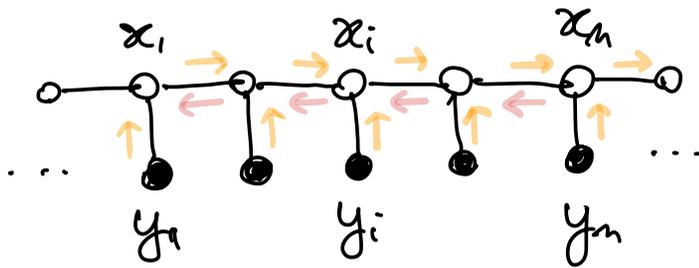
①



$$\text{BP} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x_n) = \sum_{x_{n-1}} p(x_n | x_{n-1}) \cdot p(x_{n-1}) \\ = \dots \\ p(x_2) = \sum_{x_1} p(x_2 | x_1) \cdot p(x_1) \end{cases}$$

②

Chaînes de Markov cachées :



BP converge en temps fini
par acyclicité du graphe
et interactions.

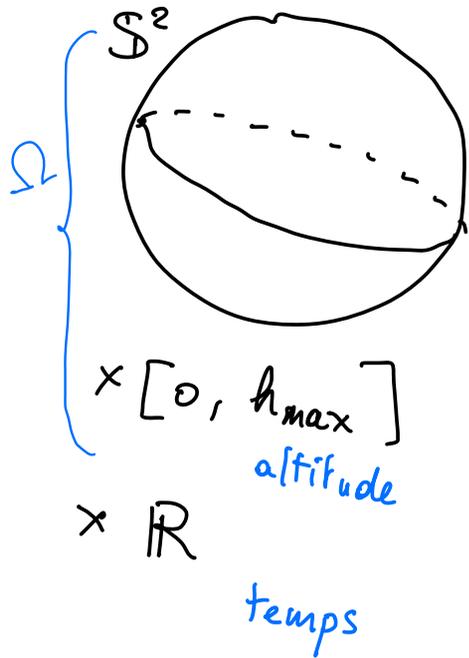


BP estime les lois $p(x_i)$ à partir des :

- $p(x_{i+1} | x_i)$ noyaux de transition
- $p(x_i | y_i)$ inférence de l'état caché.
- y_i variables observées

ex:
Filtre de Kalman

II] Problèmes d'observation et de précision en météo



Soit Ω une variété.
Plusieurs champs décrivent l'état instantané du fluide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet v \in \mathcal{X}(\Omega) \\ \bullet p \in C(\Omega, \mathbb{R}_+) \\ \bullet T \in C(\Omega, \mathbb{R}_+) \\ \bullet \rho \in C(\Omega, \mathbb{R}_+) \\ \dots \end{array} \right. \rightarrow \text{faisceau d'états instantanés} \quad \boxed{s^t \in \mathcal{E}^t(\Omega)} = (v, p, T, \rho \dots)$$

Il s'étend en un faisceau sur $\Omega \times \mathbb{R}$
où pour tout $I = [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$

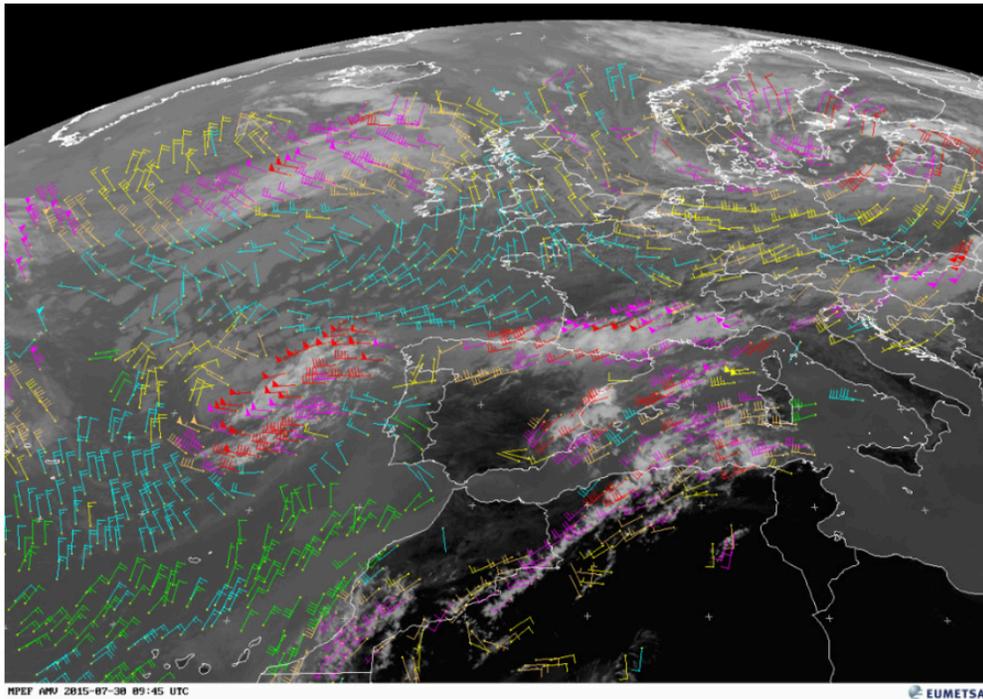
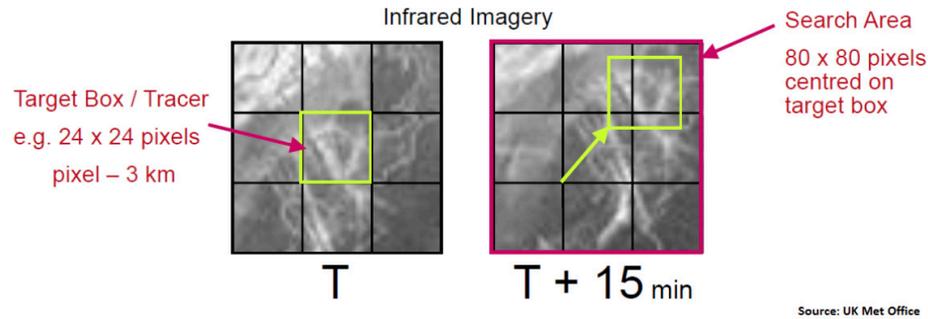
$$\boxed{\mathcal{E}^I(\Omega) \simeq C(I, \mathcal{E}^t(\Omega))}$$

faisceau des trajectoires du fluide de t_0 à t_1 .

2
PROBLÈMES:

- inférence des conditions initiales ?
- intégration des équations de Navier-Stokes ?

1) L'estimation des vents se fait typiquement à partir d'images satellites infrarouge, et suivi de trajectoire des nuages.



Problème:

turbulence et dissipation
d'énergie ont une structure
fractale et multi-échelle



Inférence d'un état caché:

$$p_{\theta}(s^t | y^t)$$

$$s^t \in \mathcal{G}^t(\Omega)$$

couleur
= altitude estimée

2) l'intégration des équations du mouvement peut reposer sur divers modèles :

- intégrateurs discrets de Navier-Stokes ou Boussinesq
- Principe de moindre action stochastique : [Constantin-Iyer, Eyink]

$$d_t x_t^\omega = v_t^\omega(x_t^\omega) dt + \sqrt{2\nu} d_t W^\omega(t)$$

(Backward Itô : pour $t \leq t_1$, à $x^\omega(t_1) = x_1$ fixé)

$$S[x] = \mathbb{E}_\omega \left[\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Omega} dy \frac{1}{2} \|v_t^\omega(y)\|^2 \right]$$

(avec condition initiale $x_{t_0}^\omega = \varphi^\omega(x_1)$ pour φ difféomorphisme isochore
 On retrouve les forces de pression $\vec{\nabla} p^\omega$ comme multiplicateurs de Lagrange de $\vec{\nabla} \cdot v^\omega = 0$)

DYNAMIQUE

$$\left\{ \begin{array}{l} p(s^{t+1} | s^t) \\ p(s^t | s^{t+1}) \end{array} \right.$$

- Équations de Boltzmann à la limite des fortes collisions [Gallager, Tristani ...]

$f(t, x, v)$ densité de particules dans $dt \cdot d^d x \cdot d^d v$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f)$$

ε : temps de libre parcours (Knudsen number)

$$f^\varepsilon(t, x, v) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\|v\|^2}{2}} \left[1 + g^\varepsilon(t, x, v) \right]$$

limite thermodynamique, " $\varepsilon \rightarrow 0$ "

perturbation $\mapsto \begin{cases} u(t, x) \\ \rho(x) \\ T(x) \dots \end{cases}$ solut^{os} de Boussinesq



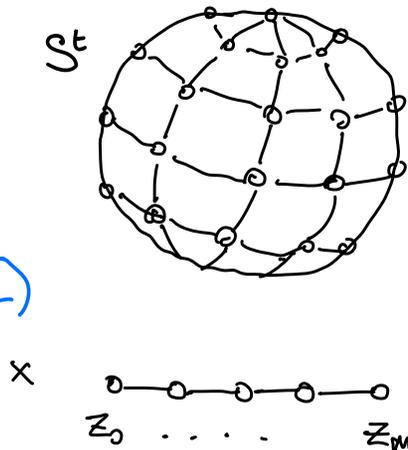
III] Chaînes de Markov cachées pour la météo ?

Discrétisation et temps et en espace :

Base :

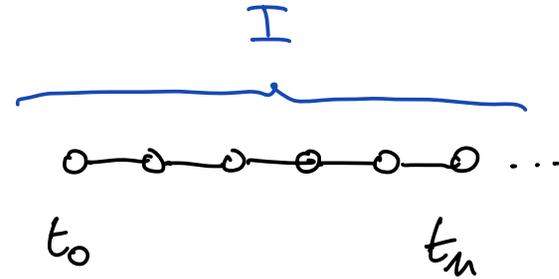
Hypergraphe

$K \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$



(Ω^t, K^t)

x



Faisceau d'états : (base discrète, fibre continue)

$$S^t \in \mathcal{G}^t = \prod_{i \in \Omega^t} \mathcal{G}_i^t = \left\{ s_i^t = \begin{cases} v^t(x_i) \in T_{x_i} \tilde{\Omega} \approx \mathbb{R}^3 \\ \rho^t(x_i) \in \mathbb{R}_+ \\ p^t(x_i) \in \mathbb{R}_+ \\ \dots \end{cases} \middle| i \in \Omega^t \right\}$$

vitesse, densité, pression, humidité, ...
 ↓ ↓
 température

Potentils d'interaction et lois locales :

$$h_i(v_i) = \beta \|v_i - \bar{v}_i\|^2$$

Quadratique

⇒

$$p_i(v_i) = \frac{1}{Z_i} e^{-\beta \|v_i - \bar{v}_i\|^2}$$

Gaussien

Boltzmann
- Gibbs du
gaz parfait

État instantané

Couplage à 2 points en espace

$$h_{ij}(v_i, v_j) = k_{ij} \|v_i - v_j\|^2$$

⇒

Processus gaussiens, ...

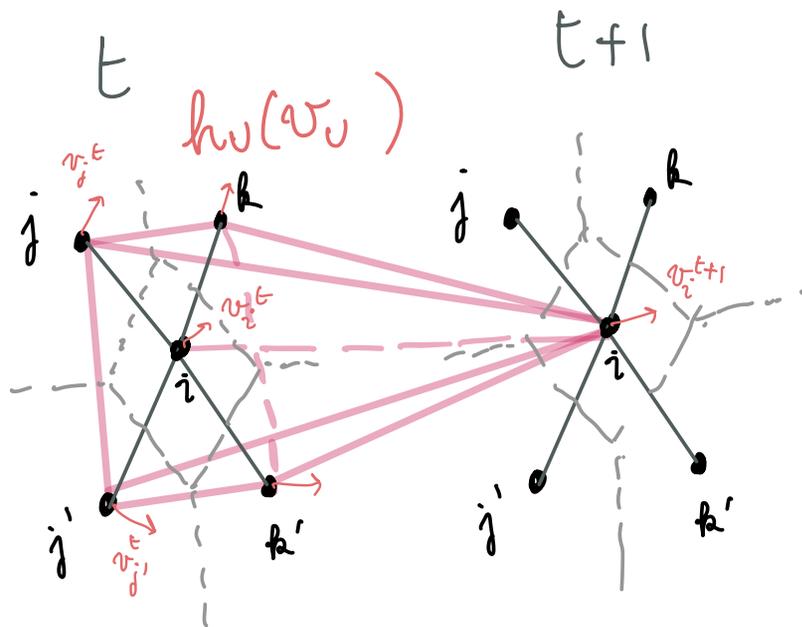


$$P_{ij} = \frac{1}{Z_{ij}} e^{-(h_{ij} + h_i + h_j)}$$

DYNAMIQUE: couplage en temps

$$h_U(v_i^{t+1}, v_i^t, v_j^t \text{ pour } j \sim i) \quad ?$$

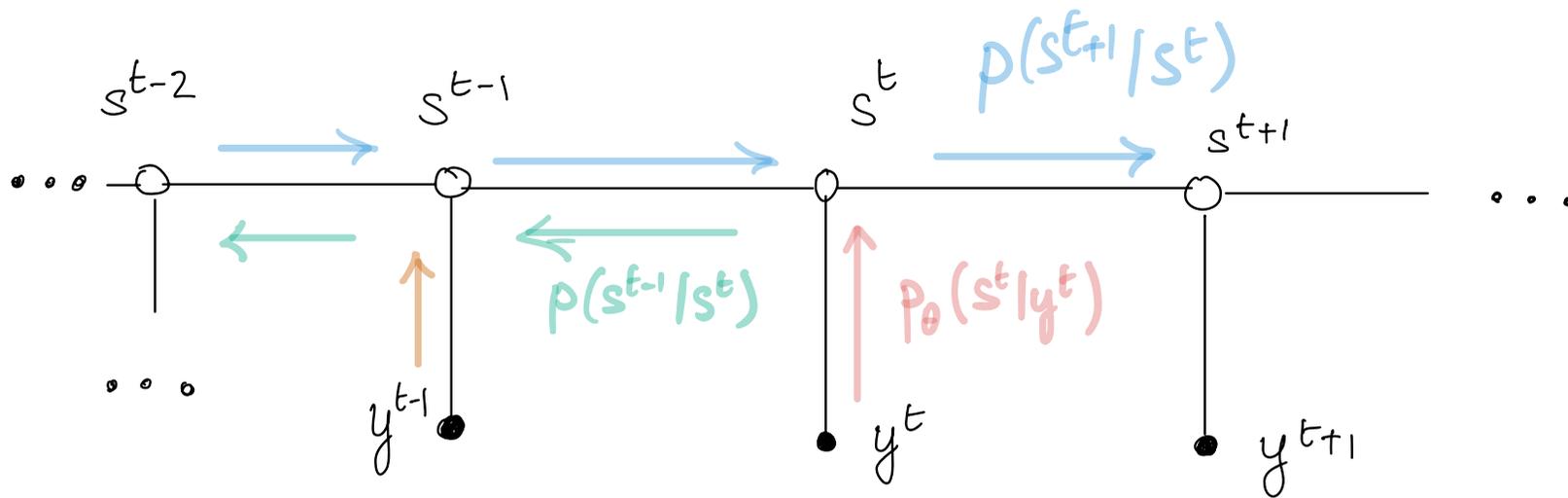
↳ Transport,
Collision,
dissipation ...



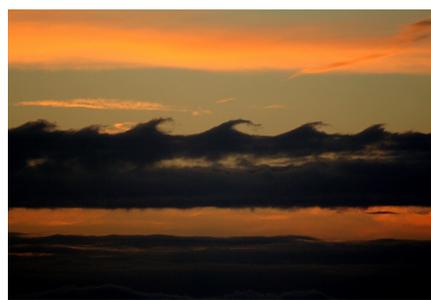
Dynamique globale: en agrégeant

- toutes les variables d'espaces $(S_i^t) = S^t$,
- toutes les observations (multi-modales) $(y_U^t) = y^t$

on a une chaîne de Markov cachée :



Structure Horizontale



Structure Verticale

⚠
Turbulence
à toutes les
échelles

État actuel: • Librairie pour les modèles graphiques discrets,
propagation de croyances sur hypergraphes.
github.com/opeltre/topos

(pytorch \rightsquigarrow GPU)

Todo: • Extension aux états continus $x_u \in \mathcal{E}_u$ par des lois
gaussiennes ou des mixtures de gaussiennes:

↕ • potentiels $h_u(x_u)$ quadratiques sur: un espace vectoriel $\mathcal{E}_u = \mathbb{R}^{d_u}$
• une union disjointe $\mathcal{E}_u = \coprod_{\alpha \in K} \mathbb{R}^{d_u}$

→ Paramétrisations finies des espaces de lois locales

→ Marginalisation calculable par produits matriciels

modes de la mixture = $K \times \mathbb{R}^{d_u}$

• Définition d'expériences réalistes,
choix de datasets accessibles ...

Merci pour votre attention !