

Une discrétisation en espace de la dynamique d'un fluide bi-dimensionnel incompressible par des crochets de Poisson

Oscar Cosserat

LaSIE, CNRS

GdR-GDM, Juin 2023



Projet CNRS 80Prime GraNum

- 1 Dynamique en mécanique conservative de dimension finie
- 2 Fluide incompressible sur la sphère

Analyse numérique pour la dimension finie : question

$$\dot{x} = X(x), \quad X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (1)$$

la dynamique considérée sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et ϕ_t son flot.

Question : Trouver une discrétisation en temps $\Phi_{\Delta t}: x_n \mapsto x_{n+1}$ de (1) qui

- préserve les symétries : $f \circ \phi_t = f \Rightarrow f \circ \Phi_{\Delta t} \approx f$
- soit stable au voisinage d'une singularité de ϕ
- ait un bon comportement en temps long, par exemple :
 $\|\phi_{n\Delta t} - (\Phi_{\Delta t})^n\| \leq e^{-\frac{\gamma}{\Delta t}} \text{ si } n \leq \frac{1}{\Delta t}$

Encoder la physique par la géométrie

Symétries de l'espace \Rightarrow structure de Poisson π
Énergie \Rightarrow Hamiltonien H

Théorème

Une structure de Poisson sur Ω induit un feuilletage de Ω en feuilles admettant chacune une structure de variété symplectique.

Remarque

- *Une feuille est localement définie par une collection de fonctions constantes sur cette feuille appelées Casimirs.*
- *Toute trajectoire hamiltonienne reste sur une feuille symplectique.*

Équation de Hamilton-Jacobi

Théorème (O.C., 2022)

1 Soit (U, α, β) le groupoïde symplectique local de π . L'équation

$$\begin{cases} \partial_t S_t(x) &= H(\alpha(x, \nabla_x S_t)) \\ S_0 &= 0 \end{cases} \quad (2)$$

admet une unique solution $(S_t)_t$ pour t petit, dite transformée de Hamilton-Jacobi de H .

2 Une telle solution permet le calcul du flot de H par :

$$\begin{cases} \phi_t^H(x) = \beta(\bar{x}, \nabla_{\bar{x}} S_t) \\ \text{où } \bar{x} \text{ est l'unique solution de } \alpha(\bar{x}, \nabla_{\bar{x}} S_t) = x \end{cases}$$

Analyse numérique pour la dimension finie : une solution

Théorème (O. C., 2022)

Soit $S_t^i = \sum_{j=1}^i \frac{t^j}{j!} S_j$ une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (2) à l'ordre i . Alors l'équation

$$\begin{cases} \alpha(\bar{x}_n, \nabla_{\bar{x}_n} S_{\Delta t}^i) = & x_n \\ x_{n+1} = & \beta(\bar{x}_n, \nabla_{\bar{x}_n} S_{\Delta t}^i) \end{cases} \quad (3)$$

fournit un intégrateur hamiltonien de Poisson à l'ordre i de pas de temps Δt .

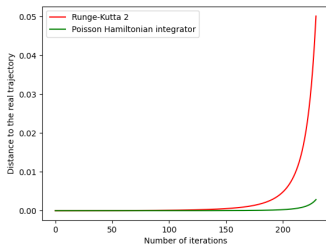
Remarque

L'analyse rétrograde de tels schémas numériques fournit des estimées sur le comportement en temps long¹.

¹Pour le cas symplectique : Benettin and Giorgilli, 1994

Illustration en dynamique des populations

- $$\begin{cases} \dot{x} = x(y+z) \\ \dot{y} = y(-x+z) \\ \dot{z} = -z(x+y) \end{cases}$$
- $$\pi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$
- $$H(x, y, z) = x + y + z$$
- $$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$$
- $$\Delta t = 10^{-3}$$



Erreur par rapport à la solution analytique ^a

^aC., Laurent-Gengoux, Salnikov, 2023

Encoder la physique par la géométrie en dimension infinie

Fluide incompressible sur la sphère^a

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \{\psi, \omega\} \\ \Delta\psi = \omega \\ \text{où} \end{cases}$$

- $\omega(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$ vorticité
- $\psi(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$ fonction courant
- $\{\psi, \omega\}(f) = \int_{\mathbb{S}^2} f(x) \langle x, \nabla\psi \wedge \nabla\omega \rangle$

^aKhesin and Arnol'd, 1997

C'est un système hamiltonien de Poisson

- sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$
- pour $\{.,.\}$
- et $H(f) = \int_{\mathbb{S}^2} f \Delta^{-1}f$

Remarque

Dans ce cas particulier, les feuilles symplectiques sont encore distinguées par des niveaux de fonctions : $f \sim g \Rightarrow \int_{\mathbb{S}^2} h(f) - h(g) = 0 \forall h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Analyse numérique en dimension infinie : question

Question : Trouver un espace \mathcal{E}^N et une discrétisation en temps

$$\Phi_{\Delta t}: x_n^N \in \mathcal{E}^N \mapsto x_{n+1}^N \in \mathcal{E}^N$$

de la dynamique

$$\phi_t: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$$

du fluide incompressible sur la sphère qui

- préserve les symétries : $f \circ \phi_t = f \Rightarrow f \circ \Phi_{\Delta t} \approx f$
- soit stable au voisinage d'une singularité de ϕ
- ait un bon comportement en temps long, par exemple :
 $\|\phi_{n\Delta t} - (\Phi_{\Delta t})^n\| \leq e^{-\frac{\gamma}{\Delta t}} \text{ si } n \leq \frac{1}{\Delta t}$

Discrétisation en espace par les harmoniques sphériques : modèle de Zeitlin²

espace $\mathcal{E}^N = su(N)$

projection $p_N: \sum_{(l,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} f^{lm} Y_{lm} \in C^\infty(\mathbb{S}^2) \mapsto \sum_{\substack{0 \leq l \leq N-1 \\ -l \leq m \leq l}} f^{lm} i T_{lm}^N \in su(N),$

$(Y_{lm})_{l,m}$ harmoniques sphériques et $(T_{lm}^N)_{l,m}$ une base de $su(N)$

laplacien $\Delta_N A = \frac{4}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^3 [p_N x^i, [p_N x^i, A]]$ si $A \in su(N)$

crochets $\{F, G\}_N(A) = \text{Tr}(\bar{H}^T [d_H F, d_H G])$ si $A \in su(N),$
 $F, G \in C^\infty(su(N)).$

²Zeitlin, 2004

Analyse numérique : une solution

Le système dynamique sur $su(N)$ induit par la projection p_N de la dynamique du fluide incompressible sur la sphère devient :

$$\dot{W} = \frac{N-1}{2} [\Delta_N^{-1} W, W]$$

avec $H_N(W) = -\frac{2\pi}{N} \text{Tr}(\bar{W}^T \Delta_N^{-1} W)$.

Remarque

- *La structure de Poisson $\{.,.\}_N$ sur $su(N)$ admet comme Casimirs les $C_k: W \mapsto \text{Tr}(W^k)$, $1 \leq k \leq N$.*
- *On s'est ramené à un système hamiltonien de dimension finie sur lequel les méthodes numériques de la première section s'appliquent.*

Propriétés du modèle de Zeitlin

Théorème (Courbure et crochets)

- $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$,

$$\|p_N\{f, g\} - \frac{2}{N-1}[p_N f, p_N g]\|_{L^\infty} = O\left(\frac{1}{N}\right)^3$$

- *La courbure sectionnelle de $SU(N)$ converge vers la courbure sectionnelle de $\text{Diff}_\mu(\mathbb{S}^2)$: il existe c_0 tel que $\forall f, g \in H^7(\mathbb{S}^2)$,*

$$|C_N(p_N f, p_N g) - C(X_f, X_g)| \leq \frac{2c_0}{N-1} \|f\|_{H^7} \|g\|_{H^7}^4$$

³Bordemann, Meinrenken, Schlichenmaier, 1994

⁴Modin and Perrot, 2023

Simulations numériques

$\omega(0) \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ aléatoire :
[https://slides.com/kmodin/einstein-seminar/4⁵](https://slides.com/kmodin/einstein-seminar/45)

⁵Cifani, Viviani, Modin, 2022

Analyse rétrograde ?

Question : Comment étendre l'analyse rétrograde pour un schéma numérique discrétisant l'espace et le temps lorsqu'il préserve une structure géométrique ?

- Estimer les trajectoires projetées sur l'espace de dimension finie ? ie

$$\|p_N \phi_{k\Delta t} - (\Phi_{\Delta t}^N)^k\|_N \leq \dots$$

- Relever la trajectoire discrète dans l'espace de dimension infinie ? ie

$$\|\phi_{k\Delta t} - i_N \left((\Phi_{\Delta t}^N)^k \right)\|_{\mathbb{S}^2} \leq \dots$$

où $p_N \circ i_N = \text{Id}_{su(N)}$

Ouverture

- Simulations numériques en augmentant l'ordre en temps
- Étudier l'impact de la courbure sur le comportement asymptotique du fluide
- Traitement algébrique de la discrétisation en espace
- Extension de la méthode à d'autres exemples