Covariance générale et Objectivité

Quelques réflexions et précisions

Boris Kolev

LMPS, ENS Paris-Saclay

La Rochelle, jeudi 29 juin 2023

OUTLINE

OUTLINE

INTRODUCTION

- Le principe de covariance général comme celui d'objectivité ont été (et semblent toujours) sujet à controverse (Norton 1993, Ryskin 1984).
- Une des raisons de ces controverses provient probablement du fait de définitions trop vagues de ces principes et d'une mauvaise interprétation du rôle de l'« Univers $\mathscr{M}$ » en relativité générale.

Relativité générale (RG)

Elle se formule en introduisant :

- des fonctionnelles (Lagrangiens)

$$\mathscr{L}(g, \Psi, \dots)$$

 dépendant de la métrique g (définie sur la variété univers $\mathscr{M}$ de dimension 4) et de divers champs Ψ modélisant la matière, l'électromagnétisme, …
- et des tenseurs (tenseur d'Einstein, tenseur énergie-impulsion, …)

$$T(g, \Psi, \dots)$$

 qui dépendent eux-mêmes de ces champs

et en formulant des équations de champs.

Qu'est ce que la covariance générale ?

- Est-ce l'invariance des équations de champs par rapport aux changements de coordonnées ?
- Est-ce la possibilité de formuler ces équations de manière intrinsèque ?
- Est-ce la covariance de ces équations par le groupe des difféomorphismes ?

Ce qu'en dit Einstein

The meaning of relativity, 1922

> *"We shall be true to the principle of relativity in its broadest sense if we give such a form to the laws that they are valid in every such four-dimensional system of co-ordinates, that is, if the équations expressing the laws are co-variant with respect to arbitrary transformations."*

En traduisant …

- Les lois doivent être formulées de telle sorte qu'elles soient indépendantes du système de coordonnées.
- Les équations qui expriment ces lois doivent être covariantes par rapport aux difféomorphismes.

Un exemple : l'équation des ondes

- Dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^4$, elle s'écrit

$$\partial_x{}^2 f + \partial_y{}^2 f + \partial_z{}^2 f - \partial_t{}^2 f = 0$$

- En introduisant l'opérateur $\Box f := \mathrm{tr}(\nabla df)$, elle se réécrit

$$\Box f = 0,$$

forme intrinsèque, indépendante du système de coordonnées.

- Cette équation n'est pas pour autant équivariante par tous les difféomorphismes. La relation

$$\Box(f \circ \varphi) = (\Box f) \circ \varphi$$

n'est valable que si φ est une transformation de Lorentz.

Autre exemple : problème de re-paramétrage

On définit sur l'ensemble des courbes $c\colon I = [0,1] \to \mathbb{R}^3$:

- la fonctionnelle énergie

$$K(c) = \frac{1}{2}\int_I \|\dot{c}\|^2 \, dt$$

qui n'est pas invariante par tous les re-paramétrages $t \mapsto \tau(t)$ $(\dot{\tau} \neq 0)$

- la fonctionnelle longueur

$$L(c) = \int_I \|\dot{c}\| \, dt$$

qui est invariante par tous les re-paramétrages de I.

Invariance par le groupe des difféomorphismes

- Dans l'exemple précédent, on s'intéresse à des fonctionnelles $\mathscr{L}(c)$ qui dépendent d'une fonction $c \colon I \to \mathbb{R}^3$. Le problème posé est celui de l'invariance de ces fonctionnelles par re-paramétrage, *i.e.* par l'action du groupe des difféomorphismes de I :

$$c \mapsto \varphi^* c := c \circ \varphi.$$

- En RG, on introduit des fonctionnelles (Lagrangiens) $\mathscr{L}(g, \Psi, \dots)$ qui dépendent de champs définis sur l'univers $\mathscr{M}$. Le problème posé est celui de l'invariance par le groupe des difféomorphismes de $\mathscr{M}$ qui agit sur les variables $g, \Psi, \dots$ définies sur $\mathscr{M}$.
- L'univers $\mathscr{M}$ ne joue finalement qu'un rôle de paramétrage comme I pour les fonctionnelles énergie et longueur, ou le body $\mathscr{B}$ en mécanique des milieux continus.

De nombreux auteurs (dont Souriau 1964) ont depuis adopté la formulation suivante de la covariance générale comme invariance par le groupe des difféomorphismes.

Définition

Un Lagrangien $\mathscr{L}(g, \Psi, \dots)$, est covariant général si il vérifie

$$\mathscr{L}(\varphi^* g, \varphi^* \Psi) = \mathscr{L}(g, \Psi),$$

pour tout difféomorphisme φ.

OUTLINE

La fonctionnelle de Hilbert-Einstein

Le prototype de la covariance générale

- La fonctionnelle

$$\mathscr{H}(g) = \int R_g \, \mathrm{vol}_g, \qquad (R_g \text{ courbure scalaire})$$

est covariante générale

$$\mathscr{H}(\varphi^* g) = \int R_{\varphi^* g} \, \mathrm{vol}_{\varphi^* g} = \int \varphi^* [R_g \, \mathrm{vol}_g] = \mathscr{H}(g).$$

- Son gradient L^2, le tenseur d'Einstein

$$\mathbf{G}(g) := \mathbf{Ric}_g - \frac{1}{2} R_g \, g, \qquad (\mathbf{Ric}_g \text{ tenseur de Ricci})$$

vérifie par conséquent

$$\mathbf{G}_{\varphi^* g} = \varphi^* \mathbf{G}(g), \quad \text{et} \quad \mathrm{div}^g \, \mathbf{G}(g) = 0.$$

Conséquence sur le tenseur énergie-impulsion

Un tenseur d'énergie-impulsion $T(g, \Psi)$ satisfaisant l'équation d'Einstein

$$\mathbf{G}(g) = T(g, \Psi)$$

doit donc nécessairement vérifié

$$\operatorname{div} T = 0,$$

équation dont Einstein aurait dit « c'est la mécanique ! ».

Remarque historique

Dans les premiers balbutiements de la formulation de la RG (1913), Einstein avait d'abord proposé comme équation de champ : $\mathbf{Ric}(g) = T$, avant d'y renoncer car bien que le tenseur $\mathbf{Ric}(g)$ soit covariant ($\mathbf{Ric}(\varphi^* g) = \mathbf{Ric}(g)$),

$$\operatorname{div} \mathbf{Ric}(g) \neq 0.$$

COVARIANCE GÉNÉRAL D'UN GRADIENT L^2

Une remarque importante est la suivante.

- Soit $S(g)$ le gradient L^2 d'une fonctionnelle $\mathscr{L}(g)$, invariante par difféomorphisme.
- Alors, $S(g)$ est non seulement également invariant par difféomorphisme, *i.e.*
$$S(\varphi^* g) = S(g),$$
mais satisfait aussi
$$\operatorname{div} S(g) = 0.$$
- On va donc exiger du tenseur énergie-impulsion T, qu'il dérive d'un Lagrangien ou pas, qu'il satisfasse ces deux propriétés (*i.e.* que T soit une forme basique sur l'espace quotient $\mathrm{Met}(\mathscr{M})/\mathrm{Diff}(\mathscr{M})$). C'est l'expression de la covariance générale pour T.

LAGRANGIENS LOCAUX

- En général, un Lagrangien n'est pas défini par intégration sur tout l'univers $\mathscr{M}$ mais seulement sur un ouvert U et il est de plus local (*i.e.* qu'il ne dépend que des valeurs ponctuelles d'un nombre fini de dérivées partielles des champs).
- Ainsi, on écrit par exemple

$$\mathscr{L}_U(g) = \int_U L\left(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \partial_\lambda \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \mathrm{vol}_g.$$

- L'invariance par difféomorphismes se traduit alors par la condition suivante sur la densité lagrangienne L

$$L\left((\varphi^* g)_{\mu\nu}, \partial_\rho (\varphi^* g)_{\mu\nu}, \partial_\lambda \partial_\rho (\varphi^* g)_{\mu\nu}\right) = L\left(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \partial_\lambda \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \circ \varphi$$

Conséquences sur la forme du Lagrangien

- Une fonctionnelle locale d'ordre 0

$$\mathscr{L}_U(g) = \int_U L\left(g_{\mu\nu}\right) \mathrm{vol}_g$$

invariante par difféomorphismes est constante.

- Une fonctionnelle locale d'ordre 1

$$\mathscr{L}_U(g) = \int_U L\left(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \mathrm{vol}_g$$

invariante par difféomorphismes est constante.

- Il faut aller à l'ordre 2 pour obtenir une fonctionnelle non triviale

$$\mathscr{H}(g) = \int (aR_g + b) \mathrm{vol}_g,$$

invariante par difféomorphismes.

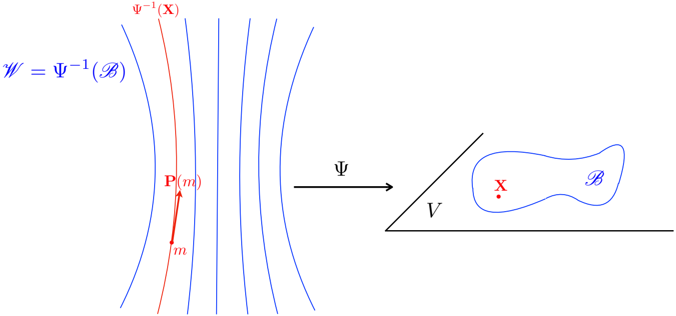
- La modélisation de la matière parfaite (comme adoptée par Souriau dés 1958) s'inspire de la théorie de jauge, où les champs de matière sont décrits par des sections d'un fibré vectoriel (ici un fibré trivial).
- Un champ de matière parfaite est une fonction vectorielle

$$\Psi : \mathscr{M} \to V = \mathbb{R}^3.$$

- La notation Ψ pour le champ de matière n'est pas anodine :
  Ψ est la fonction d'onde en mécanique quantique.

LE BODY ET LE TUBE DE MATIÈRE

- La matière est alors décrite par une sous-variété orientable compacte à bord de dimension 3, le body $\mathscr{B} \subset V$, qui labelle les particules.
- On suppose en outre que Ψ est une submersion, et donc que $\mathscr{W} := \Psi^{-1}(\mathscr{B})$ est fibré par les lignes d'univers des particules $\Psi^{-1}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathscr{B}$, et est appelé pour cette raison le tube de matière (World tube).



Un lagrangien pour la matière parfaite

- Pour prendre en compte la présence de matière dans le cadre de la RG, une fonctionnelle $\mathscr{L}^m(g,\Psi)$ (dépendant du champ de matière Ψ) est ajoutée à $\mathscr{H}$ pour construire un nouveau Lagrangien

$$\mathscr{L}(g,\Psi) = \mathscr{H}(g) + \mathscr{L}^m(g,\Psi).$$

- En suivant Souriau (1958, 1964), on suppose que le Lagrangien de la matière parfaite $\mathscr{L}^m(g,\Psi)$ ne dépend que du 0-jet de la métrique g et du 1-jet du champ de matière Ψ :

$$\mathscr{L}^m(g,\Psi) = \int L^m\left(g_{\mu\nu}, \Psi^I, \frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu}\right) \mathrm{vol}_g.$$

Covariance du lagrangien de matière

Théorème (Souriau (1958))

Si le lagrangien

$$\mathscr{L}^m(g, \Psi) = \int L_0(g_m, \Psi(m), T_m\Psi)\, \mathrm{vol}_g$$

est covariant général, alors, sa densité lagrangienne s'écrit

$$L^m(g, \Psi, T\Psi) = L(\Psi, \mathbf{K}),$$

où $\mathbf{K} = (T\Psi)\, g^{-1} (T\Psi)^\star$ *est dénommé la* *conformation*.

La conformation

- La conformation $\mathbf{K}$ introduite par Souriau en 1958 est la pierre angulaire de la formulation de l'hyperélasticité relativiste et dérive naturellement d'une formulation covariante générale de l'hyperélasticité.
- C'est une fonction vectorielle (à valeur dans S^2V^*)

$$\mathbf{H} : \mathscr{M} \to \mathbb{S}^2(V^*), \qquad m \mapsto \mathbf{H}(m) := (T_m\Psi)\, g_m^{-1} (T_m\Psi)^\star$$

  dont la valeur en tout point $m \in \mathscr{W}$ est une forme quadratique définie positive.
- Sa limite classique correspond à l'inverse C^{-1} du tenseur de Cauchy-Green droit C défini dans le cadre de la théorie classique des grandes déformations.

Outline

Retour sur l'équation des ondes

- Dans le problème de l'équation des ondes $\Box f = 0$, le Dalembertien

$$\Box f = \operatorname{tr}(\nabla df) = \operatorname{tr}_\eta(\nabla^\eta df) = \Box^\eta f$$

dépend en fait de la métrique à travers la trace et la dérivée covariante qui dépendent de la métrique $g = \eta$, la métrique plate de Minkowski.

- La non-covariance générale de l'équation des ondes provient du fait que cette équation dépend d'un paramètre η qui n'est pas invariant par l'action du groupe des difféomorphismes.

Dans la covariance générale, il faut tout faire bouger !

Un lagrangien qui n'est pas covariant général

Soit θ un champ de tenseurs donné sur $\mathscr{M}$, d'ordre 2 contravariant. La fonctionnelle

$$\mathscr{L}(g) := \int (\theta : g)\mathrm{vol}_g$$

n'est pas covariante générale : $\mathscr{L}(\varphi^* g) \neq \mathscr{L}(g)$.

- Toutefois, si on intègre θ dans les variables de $\mathscr{L}$, alors elle devient covariante générale

$$\mathscr{L}(\varphi^* g, \varphi^* \theta) = \mathscr{L}(g, \theta)$$

- La covariance générale exige que le groupe des difféomorphismes agisse simultanément sur toutes les grandeurs.

Peut-on rendre l'équation des ondes covariante générale

- Comme précédemment, il serait tentant de réécrire l'équation des ondes sous la forme

$$\Box^g f = \mathrm{tr}_g(\nabla^g df) = 0 \tag{1}$$

et de faire agir le groupe des difféomorphismes simultanément sur g et f.

- Mais l'équation (1) est-elle équivalente à l'équation

$$\Box^\eta f = 0 \tag{2}$$

- Non : une solution (g, f) de l'équation (1) est une solution de (2) seulement si g est plate (*i.e.* si son tenseur de courbure s'annule).

- L'équation des ondes formulée dans l'espace de Minkowski entraîne une brisure de symétrie de la relativité générale.
- Dans sa formulation, on restreint le problème général $\Box^g f = 0$ dépendant des variables (g, f) au problème restreint

$$\Box^\eta f = 0$$

  où η, la métrique de Minkowski, est un paramètre fixé.
- Ce faisant, on restreint le groupe de symétrie de l'équation aux seules transformations qui préservent η, autrement dit au groupe d'isométries de η (transformations de Lorentz et translations).

- Le même phénomène se produit quand on passe à la limite classique de la relativité générale.
- Une structure galiléenne sur M est une paire $(\mathfrak{g}, \theta)$, où
  - $\mathfrak{g}$: un champ de tenseurs contravariants symétriques d'ordre 2 et de signature $(0,+,+,+)$ (la métrique spatiale),
  - θ : une 1-forme qui engendre le noyau de $\mathfrak{g}$ (l'horloge).
- Une structure galiléenne $(\mathfrak{g}, \theta)$ peut être obtenue comme la limite d'une famille à 1 paramètre de métriques lorentziennes g_λ, telle que

$$g_\lambda^{-1} = \mathfrak{g} + \lambda \boldsymbol{\kappa} + O(\lambda^2), \qquad \lambda = \frac{1}{c^2}$$

avec $\mathfrak{g}$ de signature $(0,+,+,+)$, et $\theta \in \ker \mathfrak{g}$.

Objectivité

Une autre brisure de symétrie de la relativité générale

- En mécanique classique, la donnée fondamentale est une structure galiléenne fixée $(\mathfrak{g}, \theta)$ sur $\mathscr{M} = \mathbb{R}^4$

$$\mathfrak{g} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2, \qquad \theta = dt$$

au même titre que la métrique de Minkowski en relativité restreinte

$$\eta = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

- Un Lagrangien ou une loi de comportement compatible avec la relativité générale se doivent donc d'être invariantes par rapport aux transformations qui fixent cette structure galiléenne $(\mathfrak{g}, \theta)$. Celles-ci correspondent aux transformations dites objectives

$$\bar{\mathbf{x}} = Q(t)\mathbf{x} + b(t), \qquad \bar{t} = t + c,$$

où $Q(t)$ est une rotation dépendant de t et $b(t)$ un vecteur dépendant de t.

CONCLUSION

- La covariance générale se formule par l'invariance par difféomorphismes.
- La relativité restreinte, comme l'objectivité correspondent à l'invariance par le sous-groupe des transformations qui préservent, soit la métrique de Minkowski, soit la structure galiléenne de $\mathscr{M} = \mathbb{R}^4$.
- la formulation même de la covariance générale nécessite que le groupe des difféomorphismes de $\mathscr{M}$ agisse sur les variables impliquées. Ceci peut être mis en défaut dans des théories plus élaborées comme les théories de jauge : la covariance générale est alors remplacée par l'invariance de jauge.

RÉFÉRENCES I

J. D. Norton.
General covariance and the foundations of general relativity : eight decades of dispute.
Reports on Progress in Physics, 56(7) :791–858, July 1993.

G. Ryskin.
Misconception which led to the “material frame-indifference” controversy.
Physical Review A, 32(2) :1239–1240, Aug. 1985.

H. Westman and S. Sonego.
Coordinates, observables and symmetry in relativity.
Annals of Physics, 324(8) :1585–1611, Aug. 2009.