

Dynamique des systèmes avec des contraintes différentielles unilatérales

Tatiana Salnikova Eugene Kugeshev

June 2023

- 1 Introduction
- 2 Absence des impacts
- 3 Realisation des contraintes différentielles unilaterales par frottement visqueux anisotrope
- 4 Exemple: Le traîneau de Chaplygin
- 5 Conclusion

1.1 Introduction

Considérons un système mécanique composé de N points matériels, $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in R^{3N}$, sur lesquels superposé k contraintes différentielles bilatérales et s contraintes différentielles unilatérales

$$A(x, t)\dot{x} + b(x, t) = 0, \quad W(x, t)\dot{x} + h(x, t) \leq 0,$$

où A est une matrice $3N \times k$, W - est une matrice $3N \times s$, $b \in R^k$, $h \in R^s$. Ces relations s'effectuent composante par composante (k et s , respectivement).

Définition. Si à l'instant t^* il y a une limite à gauche et à droite des vitesses des points du système $V^- = \dot{x}(t^* - 0)$, $V^+ = \dot{x}(t^* + 0)$, et elles ne sont pas égaux les unes aux autres, alors ils disent qu'un **impact** s'est produit dans le système

1.2 Introduction

Commentaire.

1) Nous considérons l'instant t^* tel que $W(x, t)\dot{x} + h(x, t) = 0$, si $t < t^*$,
 $W(x, t)\dot{x} + h(x, t) = 0$, si $t = t^*$.

Quant à $t > t^*$ - on ne sait pas s'il y aura un impact.

2) Application du frottement visqueux anisotrope?

1.3 Théorèmes - annonce

1) Dans le cas général, en présence de contraintes différentielles unilatérales, sortir sur frontière des contraintes se produit sans saut de vitesse (le mouvement est sans impact)

2) Avec grossissement degré d'anisotropie à la limite, on passe d'un système à un visqueux anisotrope frottement à un système avec des contraintes différentielles unilatérales

1.4 Contraintes idéales - généralisation

Mouvements virtuels $\delta x = (\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N)$.

$A(x, t)\delta x = 0$, $W(x, t)\delta x \leq 0$

Déplacements tangents - déplacements pour lesquels

$W(x, t)\delta x = 0$

En entrant à la frontière des contraintes unilatérales, des réactions d'impact se produisent $R^{(p)} = (R_1^{(p)}, \dots, R_N^{(p)})$.

Les contraintes seront dites **idéales** si pour des déplacements virtuels quelconques

$$(R^{(p)}, \delta x) \geq 0 \quad (1)$$

Si δx - déplacements tangentiels, alors $-\delta x$ est déplacements tangentiels aussi. Par conséquent, pour déplacements tangentiels dans le cas de contraintes idéales $(R^{(p)}, \delta x) = 0$.

1.5 Le principe des mouvements virtuels - généralisation

Soit $t = t^*$, et soit des limites des vitesses des points du système existent et sont inégales à droite et à gauche:

$V^- = \dot{x}(t^* - 0)$, $V^+ = \dot{x}(t^* + 0)$. Alors

$$A(x, t^*)V^+ + b(x, t^*) = 0, \quad W(x, t^*)V^+ + h(x, t^*) \leq 0$$

$$A(x, t^*)V^- + b(x, t^*) = 0, \quad W(x, t^*)V^- + h(x, t^*) = 0.$$

Au moment d'atteindre la frontière:

$$MV^+ = MV^- + R^{(p)}, \quad M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, \dots, m_{N-1}, m_N, m_N, m_N)$$

Soit $\Delta V = V^+ - V^-$, alors $R^{(p)} = M\Delta V$.

La condition des contraintes idéales:

$$(M\Delta V, \delta x) \geq 0 \tag{2}$$

1.6 Le principe des mouvements virtuels - généralisation

Satisfaction $(M\Delta V, \delta x) \geq 0$ pour tout mouvements virtuels

$$A\delta x = 0, \quad W\delta x \leq 0 \quad (3)$$

s'appellera **Le principe des déplacements virtuels.**

Pour les déplacements tangentiels,

$$(M\Delta V, \delta x) = 0, \quad \forall \delta x : A\delta x = 0, \quad W\delta x = 0 \quad (4)$$

Conformément à la règle du multiplicateur de Lagrange, on obtient il existe donc des vecteurs $\lambda^{(p)} \in R^k$, $\mu^{(p)} \in R^s$ tels que

$$M\Delta V = A^T \lambda^{(p)} + W^T \mu^{(p)}. \quad (5)$$

2.1 Absence des impacts

Soit matrice Φ ($3N \times (k + s)$), et vecteur $\nu^{(p)}$ tels que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A \\ W \end{pmatrix} \quad \nu^{(p)} = (\lambda_1^{(p)}, \dots, \lambda_k^{(p)}, \mu_1^{(p)}, \dots, \mu_s^{(p)})$$

Puis sous forme matricielle

$$M\Delta V = \Phi^T \nu^{(p)}, \quad \Phi \Delta V \leq 0$$

Nous obtenons un système linéaire pour $\nu^{(p)}$

$$\Phi M^{-1} \Phi^T \nu^{(p)} \leq 0. \tag{6}$$

2.2 Absence des impacts

THÉORÈME 1

Soit le rang de Φ est maximal, alors il n'y a pas d'impacts dans le système avec des contraintes différentielles unilatérales.

Démonstration:

$\Phi M^{-1} \Phi^T$ - non dégénérée, car la forme quadratique symétrique correspondante

$$(\Phi M^{-1} \Phi^T \xi, \xi) = (M^{-1} \Phi^T \xi, \Phi^T \xi) = (M^{-1} \zeta, \zeta) > 0,$$

si $\zeta \neq 0$ (le rang de Φ est maximal).

Donc $\nu^p = 0$ et $\Delta V = 0$.

2.3 Absence des impacts

Commentaire.

La condition "le rang de Φ est maximal" est essentielle!

Contre-exemple:

Mouvement d'inertie d'un point sur un plan (x, y) .

Contrainte: $x\dot{x} \leq 0$.

Matrice W est dégénérée sur la frontière $x = 0$, et $V^- \neq V^+$
(impact!)

3.1 Realisation des contraintes différentielles unilatérales par frottement visqueux anisotrope

Considérons un système mécanique naturel avec Lagrangien

$$L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{(M(q)\dot{q}, \dot{q})}{2} - V(q).$$

Laissez seulement unilatérales contraintes différentielles

$$W(q)\dot{q} + h(q) \leq 0.$$

Soit la fonction $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

3.2 Realisation des contraintes différentielles unilatérales par frottement visqueux anisotrope

THÉORÈME 2

Soit α tel que $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. Écartons les contraintes $W\dot{q} + h \leq 0$ et ajoutons au système les forces généralisées de frottement visqueux linéaire anisotrope

$$Q_\alpha = -\alpha \sum_{j=1}^s \xi(u_j \dot{q} + h_j)(u_j, \dot{q}) u_j.$$

Soit les conditions initiales fixées $(q^*(0), \dot{q}^*(0))$ et $(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ est le mouvement du système sur le segment $0 \leq t \leq a$.

Pour suffisamment petit $a > 0$, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ les solutions $q_\alpha(t)$ et les vitesses $\dot{q}_\alpha(t)$ convergent uniformément en t vers la solution $q(t)$ et vers la vitesse $\dot{q}(t)$.

3.3 Realisation des contraintes différentielles unilatéral par frottement visqueux anisotrope

Démonstration:

Le critère d'Arzela est appliqué à la famille des fonctions équicontinues.

Puisque les fonctions \dot{q}_α sont bornée uniformément en t , alors selon le critère d'Arzela d'une séquence de fonctions q_α peut être choisi sous-suite uniformément convergente.

Où on peut alors choisir une sous-suite pour laquelle aussi et les dérivées \dot{q}_α convergeront, mais faiblement.

4.1 Exemple: Le traîneau de Chaplygin dans le cas symétrique

Oxy , (x, y, φ) , le mouvement du disque est contraint

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0; \quad \text{OU} \quad \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi \leq 0.$$

Lagrangien du système $L = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + J\dot{\varphi}^2)$.

Les équations du mouvement ont la forme

$$m\ddot{x} = \mu \sin \varphi, \quad m\ddot{y} = -\mu \cos \varphi, \quad (\mu = -mV\omega), \quad \ddot{\varphi} = 0$$



4.2 Traîneau unilatéral de Chaplygin

Nous avons

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad \text{où} \quad \omega = \dot{\varphi}(0), \quad \varphi_0 = \varphi(0)$$

Il résulte de l'intégrale d'énergie que le centre du disque se déplace avec vitesse

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 = \text{const}$$

De la condition $\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0$ on obtient

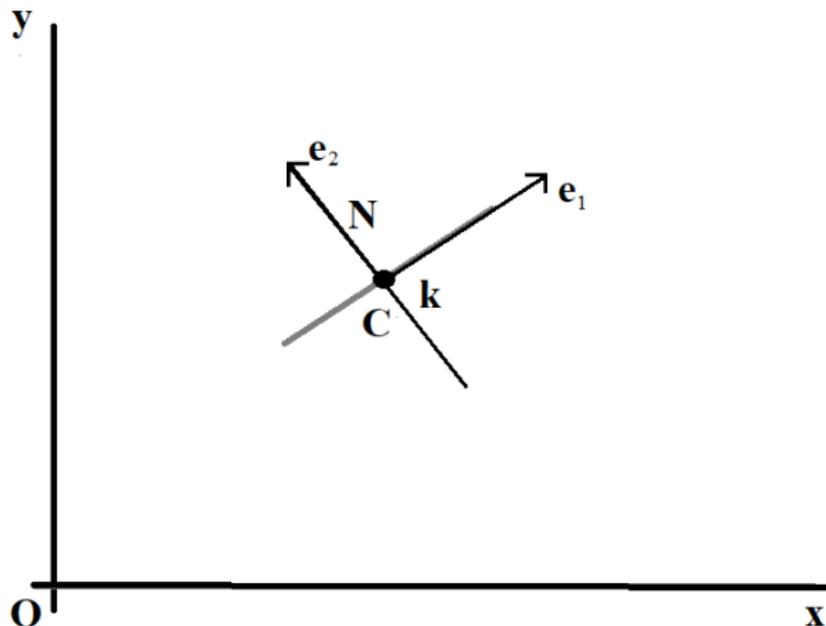
$$\dot{x} = V \cos \varphi = V \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \dot{y} = V \sin \varphi = V \sin(\omega t + \varphi_0).$$

En intégrant ces équations, on trouve $\rho^2 = \frac{V^2}{\omega^2} = \frac{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}{\dot{\varphi}^2(0)}$.

4.3 Simulation numérique

Modèle de frottement anisotrope: $V = V_C = v\mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_2$;

$$F^{fr} = -Nu, \quad u > 0; \quad F^{fr} = -ku, \quad u < 0; \quad F^{fr} = 0, \quad u = 0$$



4.4 Simulation numérique (frottement isotrope)

Conditions initiales:

$$u(0) = 0, v(0) = 1, \omega(0) = 1, x(0) = y(0) = 0, \varphi(0) = 0, t \in [0, 10]$$

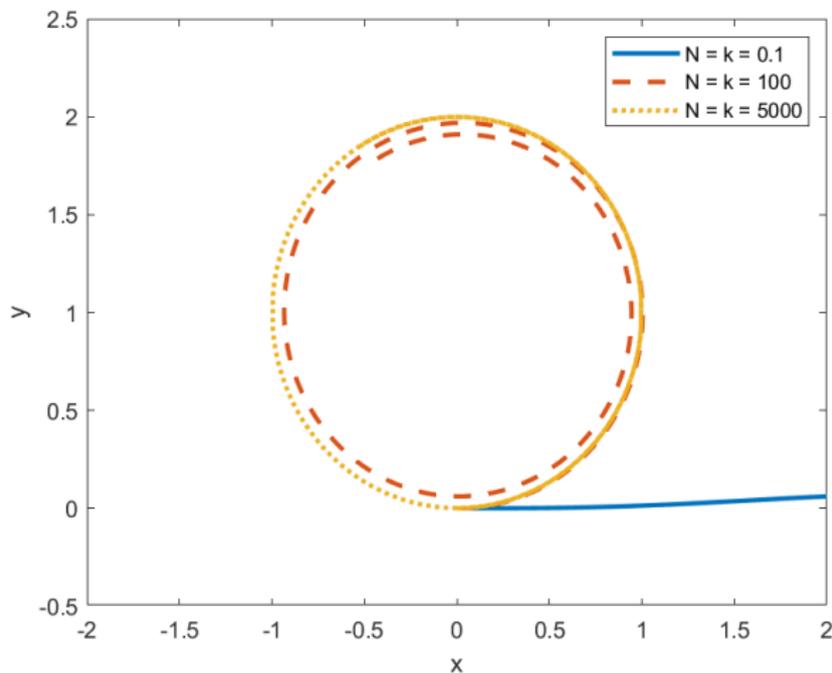


Рис.: Les mêmes valeurs des coefficients de frottement

4.5 Simulation numérique (frottement anisotrope)

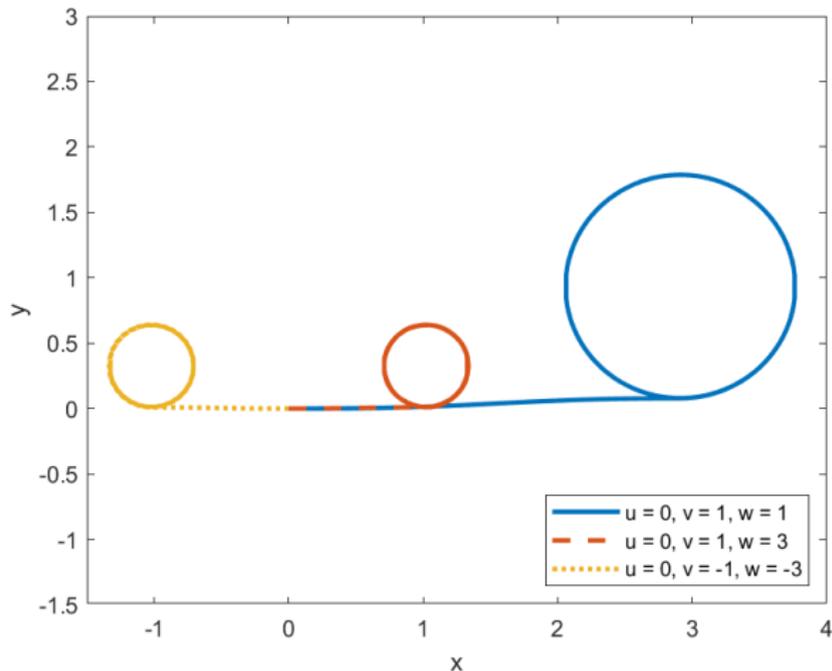


Рис.: Modification des projections initiales des vitesses u, v et de la vitesse angulaire initiale w , $N = 5000$, $k = 0.1$, $\varphi(0) = 0$

4.6 Simulation numérique

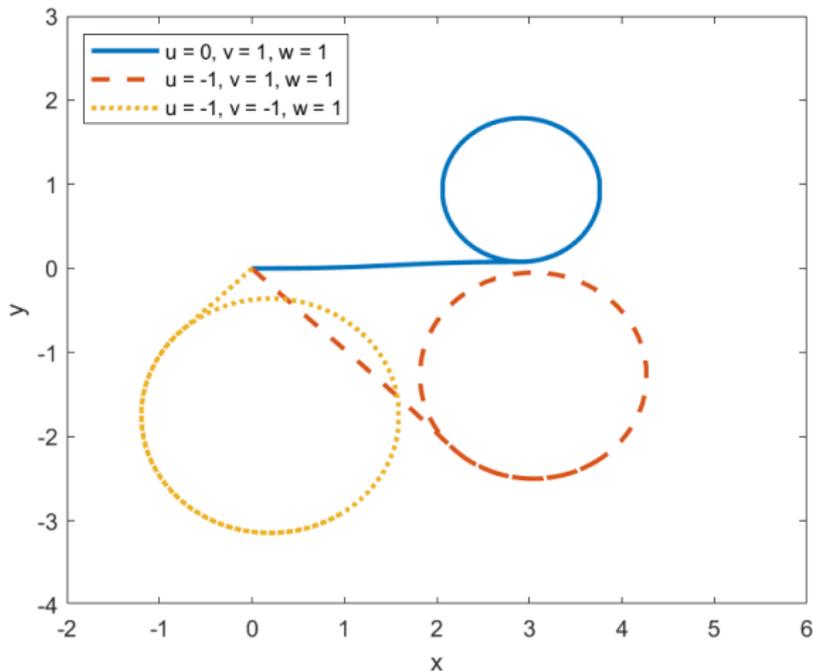


Рис.: Modification des projections initiales des vitesses u, v et de la vitesse angulaire initiale ω , $N = 5000$, $k = 0.1$, $\varphi(0) \neq 0$

4.7 Simulation numérique

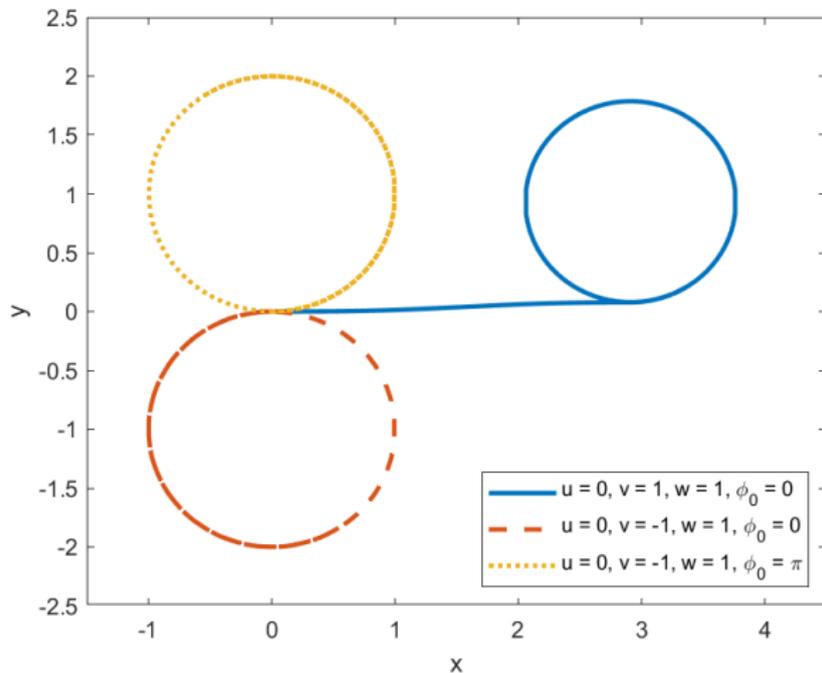


Рис.: $\varphi(0) = 0, \varphi(0) = 0, \varphi(0) = \pi, N=5000, k=0.1$

4.8 Simulation numérique

Conditions initiales:

$$u(0) = 0, v(0) = -1, \omega(0) = 1, x(0) = y(0) = 0, t \in [0, 10], k = 0.1$$

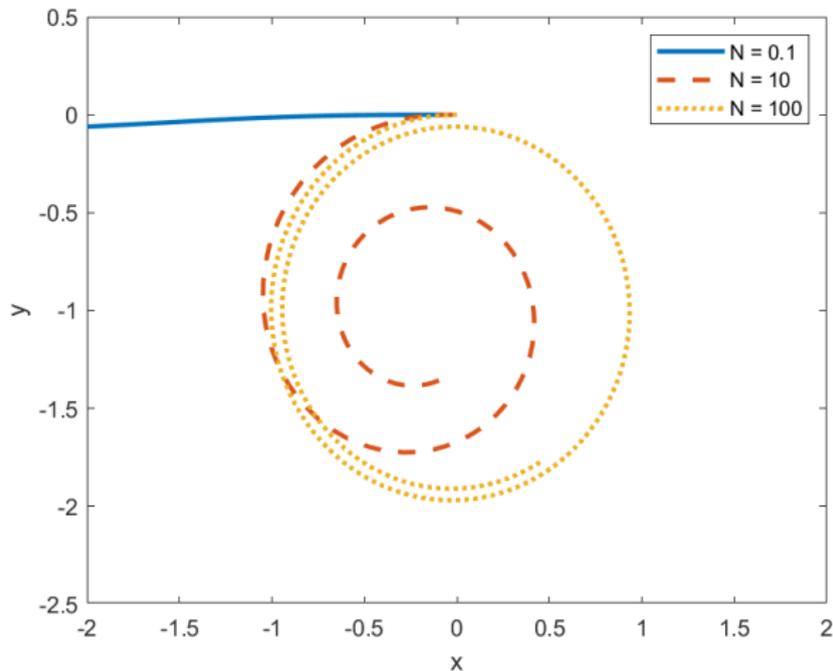


Рис.: Modification du paramètre N

5. Conclusion

On considère un système dynamique avec des contraintes sous forme d'inégalités différentielles linéaires.

Il est prouvé que dans le cas général, en présence de telles contraintes, le mouvement est sans impact.

La possibilité de réaliser de telles contraintes par des forces de frottement visqueux est montrée.

Un exemple de système non holonomique est donné, pour lequel, à l'aide d'une simulation numérique, on montre comment, avec une augmentation du degré d'anisotropie, la transition d'un système à frottement visqueux anisotrope à un système à contraintes différentielles unilatérales se produit.

GRAND MERCI POUR VOTRE ATTENTION !