

Modèles Combinatoires et Équations Intégrables

Mattia Cafasso

Laboratoire Angevin de REcherche en MATHématiques (LAREMA), Angers.

Réunion du GDR-GDM
Géométrie Différentielle et Mécanique
29/06/2023

Déterminants, distributions de probabilité, équations intégrables



- Le noyau de Bessel discret et son déterminant
- Applications aux probabilités intégrables
- Connection avec les équations de Toda
- Un mot sur notre méthode : les problèmes de Riemann-Hilbert discrets.

"Integrable equations associated with the finite-temperature deformation of the discrete Bessel point process"
with G. Ruzza, arXiv : 2207.01421.

"Airy kernel determinant solutions to the KdV equation and integro-differential Painlevé equations"
with T. Claeys and G. Ruzza, Comm. in Math. Phys. 2021.

Le noyau de Bessel discret et son déterminant

Soit $J_k(\cdot)$ la fonction de Bessel du premier type :

$$e^{L(z-z^{-1})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(2L) z^k, \quad L > 0.$$

$$\mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + 1/2, \quad \sigma : \mathbb{Z}' \rightarrow [0, 1] \text{ s.t. } \sigma \in \ell^1(\mathbb{Z}'_-).$$

On considère l'opérateur $\mathcal{K}_\sigma^{\text{Be}}$, de noyau $K_\sigma^{\text{Be}}(a, b)$, et son déterminant $Q_\sigma(L, s)$.

$$(\mathcal{K}_\sigma^{\text{Be}} f)(a) := \sum_{b \in \mathbb{Z}'} K_\sigma^{\text{Be}}(a, b) f(b), \quad f \in \ell^2(\mathbb{Z}').$$

$$K_\sigma^{\text{Be}}(a, b) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}'} \sigma(\ell) J_{a+\ell}(2L) J_{b+\ell}(2L), \quad a, b \in \mathbb{Z}'.$$

$$Q_\sigma(L, s) := \det(1 - \pi_s \mathcal{K}_\sigma^{\text{Be}} \pi_s), \quad L > 0, s \in \mathbb{Z}'_.,$$

où π_s est la projection sur le sous-espace $\ell^2(s, s+1, s+2, \dots)$.

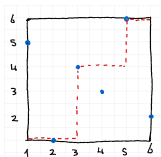
Première Application :

$$\sigma = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}'_+}.$$

Le problème de Ulam

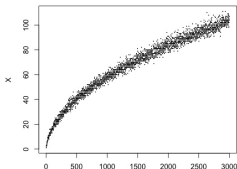
Soit $\pi_N \in \mathfrak{S}_N$ une permutation de $\{1, 2, \dots, N\}$ et $\ell(\pi_N)$ la longueur de sa plus grande sous-suite croissante :

$$\pi_6 := (5 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \quad 2); \quad \ell(\pi_6) = 3.$$



Problème de Ulam :

Quel est le comportement de $\ell(\pi_N)$ lorsque π_N est une permutation aléatoire, lorsque $N \rightarrow \infty$?



De Ulam à Tracy–Widom

- **Ulam (1961)** : $\mathbb{E}[\ell(\pi_N)]/\sqrt{N} \longrightarrow c$.
- **Hammersley (1972)** : Preuve de la conjecture de Ulam.
- **Vershik-Kerov (1977)** : $c = 2$.
- **Odlykzo-Rains, (± 1990)** : $\text{Var}(\ell(\pi_N)) \sim N^\alpha$, $\alpha = 1/3$.
- **Baik-Deift-Johansson (1999)** : Le comportement de $\ell(\pi_N)$, pour N large et après normalization, est décrit par la **distribution de Tracy–Widom**.

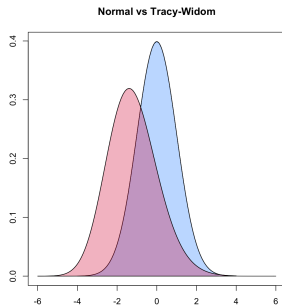
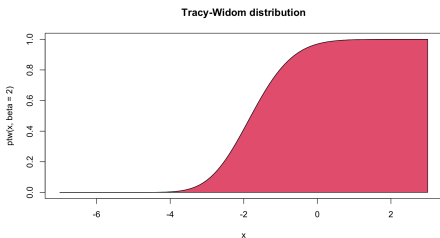
La distribution de Tracy–Widom

Soit X une matrice Hermitienne, de taille N , telle que

$$X_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, N \quad X_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1), \quad i < j.$$

Soient $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_N \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres. Alors

$$F_{\text{GUE}}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(N^{1/6}(\zeta_1 - 2\sqrt{N}) \leq x\right).$$



Quel lien entre les valeurs propres d'une matrice aléatoire et les permutations aléatoires ?!

Permutations et diagrammes de Young

Pour N fixé, il existe une bijection, la **correspondance de Robinson-Shensted**, entre permutations et tableaux de Young standard de la même forme :

$$RS(4236517) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \right)$$

- La longueur de la plus longue sous-suite croissante est égale à la première ligne du tableau.
- Le tiré en avant de la mesure uniforme sur \mathfrak{S}_N , via la correspondance RS, est la mesure de Plancherel sur l'ensemble de diagrammes de Young,

$$\mathbb{P}_{\text{Plan}}(\lambda) = \frac{\dim^2(\lambda)}{N!} = \frac{\dim^2(\lambda)}{|\lambda|!},$$

où $\dim(\lambda) := \#\{\text{Tableaux de Young standard de forme } \lambda\}$

Diagrammes de Maya aléatoires comme processus ponctuels, II

Theorem (Borodin-Okounkov-Olshanski, Johansson, Okounkov) :

Le tiré en avant de la mesure de Plancherel (Poissonisée) donne un **processus ponctuel déterminantal** sur $\mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + 1/2$, dont le noyau de corrélation s'écrit comme

$$K^{\text{Be}}(a, b) := K_{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}'_+}}^{\text{Be}}(a, b) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}'_+} J_{a+\ell}(2L)J_{b+\ell}(2L),$$

En particulier, pour tout $N = \{n_1, \dots, n_k\} \subseteq \mathbb{Z}'$,

$$\mathbb{P}(M \mid N \subseteq M) = \det \left(K^{\text{Be}}(n_i, n_j) \right)_{i,j=1}^k$$

Le théorème de Baik-Deift-Johansson

Théorème (Baik-Deift-Johansson, '99) :

Soit \mathfrak{S}_N le groupe symétrique d'ordre N , avec probabilité uniforme. Pour tout $\pi_N \in \mathfrak{S}_N$, soit $\ell(\pi_N)$ la longueur de la plus long sous-suite croissante de π_N . Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\ell(\pi_N) - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} \leq x \right) = F_{\text{GUE}}(x).$$

□

Remarque : Une certaine équation aux dérivées ordinaires, la deuxième équation de Painlevé, joue un rôle central dans la dérivation de ce résultat.

Les cas discret et continu :

Cas continu :

$(\zeta_i)_{i \geq 1}$ valeurs propres d'une matrice aléatoire (GUE) :

$$K^{\text{Ai}}(\xi, \mu) = \int_0^\infty \text{Ai}(\xi + \eta) \text{Ai}(\mu + \eta) d\eta.$$

$$F_{\text{GUE}}(x) := \mathbb{P}(\zeta_1 \leq x).$$

$$F_{\text{GUE}}(x) = \det \left(I - \mathbf{1}_{(x, +\infty)} \mathcal{K}^{\text{Ai}} \mathbf{1}_{(x, +\infty)} \right).$$

Cas discret :

$(y_i)_{i \geq 1}$ points du diagramme de Maya

$$K^{\text{Be}}(a, b) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}'_+} J_{a+\ell}(2L) J_{b+\ell}(2L),$$

$$Q(s; L) := \mathbb{P}(y_1 \leq s).$$

$$Q(s; L) = \det \left(I - \mathcal{P}_s \mathcal{K}^{\text{Be}} \mathcal{P}_s \right)$$

Formules de Painlevé :

Cas continu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F_{\text{GUE}}(x) = -q^2(x). \quad (1)$$

$$\ddot{q}(x) = 2q^3(x) + xq(x) \quad (2)$$

Cas discret

$$\frac{Q(s-1;L)Q(s+1;L)}{Q^2(s;L)} = 1 - v^2(s;L) \quad (3)$$

$$v(s+1;L) + v(s-1;L) = \frac{(s+1/2)v(s;L)}{L(v^2(s;L) - 1)} \quad (4)$$

Les équations (2) et (4) sont, respectivement, l'équation de Painlevé II et son analogue discret.

La deuxième équation de Painlevé (2) est une réduction auto-similaire de l'équation de Korteweg-de-Vries modifiée :

$$w_t + w_{yyy} - 6w^2w_y = 0, \quad w = w(y, t).$$

$$w(y, t) := \frac{q(x)}{(3t)^{1/3}} \quad \text{avec} \quad x := \frac{y}{(3t)^{1/3}}.$$

De la même manière, l'équation discrète de Painlevé II (4) est une réduction de l'équation de Volterra modifiée :

$$\frac{d}{dT} R_n = (1 - R_n^2)(R_{n+1} - R_{n-1}), \quad R_n = R_n(T).$$

Applications II :

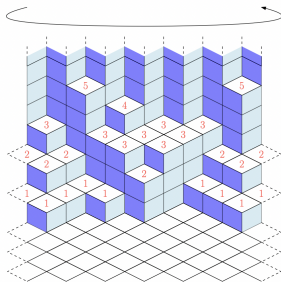
$$\sigma(\ell) = \frac{1}{1 + u^\ell}, \quad u \in [0, 1).$$

La distribution de Plancherel cylindrique

Introduisons (**Borodin, Betea-Bouttier**) une nouvelle distribution de probabilité sur les diagrammes de Young :

$$\mathbb{P}_{\text{cPlan}}(\{\lambda\}) := \frac{1}{Z(u, L)} \sum_{\mu \subset \lambda} u^{|\mu|} \left(\frac{(L(1-u))^{|\lambda|-|\mu|} \dim(\lambda/\mu)}{(|\lambda|-|\mu|)!} \right)^2.$$

$\mathbb{P}_{\text{cPlan}}$ est la loi marginal du processus de Schur cylindrique.



Un nouveau processus ponctuel

Soit C une variable aléatoire à valeurs entiers,

$$\mathbb{P}(C = c) = \frac{u^{c^2/2}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} u^{n^2/2}}, \quad c \in \mathbb{Z}.$$

Considérons l'application

$$(\lambda, C) \mapsto \{\lambda_i - i + 1/2 + C\}. \quad (5)$$

Théorème (Borodin, Betea-Bouttier) :

Si $\lambda \in \mathbb{Y}$ suit la distribution de Plancherel cylindrique, l'application (5) induit un processus ponctuel déterminantal \mathbb{Z}' avec noyau

$$K_{\sigma}^{\text{Be}}(a, b) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}'} \sigma(\ell) J_{a+\ell}(2L) J_{b+\ell}(2L), \quad a, b \in \mathbb{Z}',$$

où $\sigma(\ell) = \frac{1}{1 + u^{\ell}}$.

Un généralisation “à température finie” du Théorème de Baik-Deift-Johansson

Théorème (Betea-Bouttier) :

Supposons que $\lambda \in \mathbb{Y}$ suit la loi de Plancherel cylindrique, et $L \rightarrow \infty, u \rightarrow 1$ de façon telle que $L(1-u)^3 \rightarrow t^{-2}$. Alors

$$\mathbb{P}_{\text{cPlan}} \left(\frac{\lambda_1 - 2L}{L^{1/3}} \leq -\frac{x}{t^{1/3}} \right) \rightarrow F_\zeta(x, t),$$

où

$$F_\zeta(x, t) := \det \left(1 - \mathbf{1}_{(-xt^{-1/3}, +\infty)} \mathcal{K}_\zeta^{\text{Ai}} \mathbf{1}_{(-xt^{-1/3}, +\infty)} \right)$$

et

$$K_\zeta^{\text{Ai}}(\xi, \eta; t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(t^{-2/3}r) \text{Ai}(\xi + r) \text{Ai}(\eta + r) dr; \quad \zeta(r) = \frac{1}{1 + e^{-r}}.$$

F_ζ décrit plusieurs modèles statistiques, comme la solution “narrow wedge” de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang, des modèles fermioniques en physique quantique, etc. etc.

Applications III :

$\sigma : \mathbb{Z}' \rightarrow [0, 1]$ arbitraire.

Statistiques multiplicatives

Soit $\sigma : \mathbb{Z}' \rightarrow [0, 1]$, $\sigma \in \ell^1(\mathbb{Z}'_-)$, alors

$$Q_\sigma(L, s) = \mathbb{E}_{\text{Plan}} \left[\prod_{i \geq 1} (1 - \sigma(y_i - s - 1/2)) \right]$$

où $\{y_i, i \geq 1\}$ est une réalisation du processus ponctuel associé un noyau discret de Bessel "classique" $K^{\text{Be}}(a, b) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}'_+} J_{a+\ell}(2L) J_{b+\ell}(2L)$.

De façon analogue, étant donné $\varsigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ arbitraire (sous certaines hypothèses plutôt faibles)

$$F_\varsigma(x, t) = \mathbb{E}_{\text{Ai}} \left[\prod_{i \geq 1} (1 - \varsigma(t^{-2/3} \zeta_i + x/t)) \right]$$

où $\{\zeta_i, i \geq 1\}$ est une réalisation du processus d'Airy.

2D-Toda et le noyau de Bessel à température finie

Theorem (M.C., G. Ruzza) :

Pour tout $s \in \mathbb{Z}'$ tel que $Q_\sigma(L, s) > 0$,

$$\frac{\partial^2}{\partial L^2} \log Q_\sigma(L, s) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} \log Q_\sigma(L, s) + 4 = 4 \frac{Q_\sigma(L, s+1)Q_\sigma(L, s-1)}{Q_\sigma^2(L, s)}. \quad (6)$$

Supposons de plus que

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \sigma(-i - s)) > 0.$$

Alors il existe $L_* = L_*(s) > 0$ tel que $Q_\sigma(L, s) > 0$ for $0 \leq L < L_*$ et

$$\log Q_\sigma(L, s) = \log \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \sigma(-i - s)) \right) - L^2 \frac{\sigma(-s) - \sigma(-s-1)}{1 - \sigma(-1-s)} + \mathcal{O}(L^4), \quad L \rightarrow 0.$$

Remarques

1. L'équation (6) est une réduction de 2D-Toda (**cylindrical Toda equation**),
puisque

$$\tau_s(\theta_+, \theta_-) := e^{\theta_+ + \theta_-} Q_\sigma(\sqrt{\theta_+ \theta_-}, s)$$

est une solution de

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_+ \partial \theta_-} \log \tau_s(\theta_+, \theta_-) = \frac{\tau_{s+1}(\theta_+, \theta_-) \tau_{s-1}(\theta_+, \theta_-)}{\tau_s(\theta_+, \theta_-)^2}.$$

2. La forme classique de cette équation est donnée par

$$\frac{\partial^2}{\partial L^2} q_s(L) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} q_s(L) = 4 \left(e^{q_{s+1}(L) - q_s(L)} - e^{q_s(L) - q_{s-1}(L)} \right)$$

$$q_s(L) := \log \left(\frac{Q_\sigma(L, s)}{Q_\sigma(L, s-1)} \right)$$

3. Des solutions de cette équation en terme de déterminants de Fredholm ont été étudiés aussi en (**Widom, '97**) et (**Tracy-Widom, '98**).

Korteweg - de Vries et le noyau de Airy à température finie

Théorème (M.C., T. Claeys, G. Ruzza) :

Sous certain hypothèses,

$$F_{\zeta}(x, t) = \mathbb{E}_{\text{Ai}} \left[\prod_{i \geq 1} \left(1 - \zeta \left(t^{-2/3} \zeta_i + x/t \right) \right) \right]$$

est telle que $F_{\zeta}(x, t) \exp\left(\frac{x^3}{12t}\right)$ est une fonction tau pour KdV, i.e.

$$U_{\zeta}(t, x) := \partial_x^2 \log F(t, x) + \frac{x}{2t}$$

est solution de

$$U_t + 2UU_x + \frac{U_{xxx}}{6} = 0.$$

La solution est singulière pour $t \rightarrow 0$, et son comportement asymptotique est décrit en (M.C.-Claeys-Ruzza), (Charlier-Claeys-Ruzza).

Transition du discret au continu

$$L(x, t; \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^3 t^2}, \quad s(x, t; \epsilon) = \frac{2}{\epsilon^3 t^2} - \frac{x}{\epsilon t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial L^2} \log Q_\sigma(L, s) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} \log Q_\sigma(L, s) + 4 = 4 \frac{Q_\sigma(L, s+1) Q_\sigma(L, s-1)}{Q_\sigma^2(L, s)}$$

$$\downarrow \epsilon \rightarrow 0^+$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \log F_\zeta(x, t) + \frac{x}{t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F_\zeta(x, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_\zeta(x, t) \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \log F_\zeta(x, t) = 0.$$

ce qui implique l'équation de KdV pour

$$U_\zeta(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F_\zeta(x, t) + \frac{x}{2t},$$

où

$$Q_\sigma(L(x, t; \epsilon), s(x, t; \epsilon)) = F_\zeta(x, t) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

(T. Masuda, 1995).

Notre approche, les problèmes de Riemann-Hilbert discrets

On utilise

$$Q_\sigma(L, s) = \mathbb{E}_{\text{Plan}} \left[\prod_{i \geq 1} (1 - \sigma(y_i - s - 1/2)) \right]$$

et le fait que

$$K^{\text{Be}}(a, b) = L \frac{J_{a-1/2}(2L)J_{b+1/2}(2L) - J_{a+1/2}(2L)J_{b-1/2}(2L)}{a - b} = \frac{f^T(a)g(b)}{a - b},$$

$$f(a) := \begin{pmatrix} J_{a-1/2}(2L) \\ LJ_{a+1/2}(2L) \end{pmatrix}, \quad g(b) := \begin{pmatrix} LJ_{b+1/2}(2L) \\ -J_{b-1/2}(2L) \end{pmatrix}$$

est un “noyau discret intégrable” ((Borodin-Deift, 2000).

Problème de RH discret pour Y :

$Y = Y(z)$ 2×2 matrice (qui depend de L, s, σ) telle que :

1. Y est méromorphe sur \mathbb{C}/\mathbb{Z}' , avec des pôles simple en \mathbb{Z}' .

2. Pour tout $a \in \mathbb{Z}'$

$$Y(z) \left(I - \frac{W(a)}{z - a} \right)$$

a une singularité apparente à $z = a$, avec

$$W(a) = \frac{f(a)g^T(a)\sigma(a - s - 1/2)}{1 + K^{\text{Be}}(a, a)\sigma(a - s - 1/2)}$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z|=n} |Y(z) - I| = 0.$$

Quelques résultats admis

1. La solution $Y(z)$ existe et est unique si et seulement si $Q_\sigma(L, s) > 0$,

2.

$$Y(z) = I + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \alpha(L, s) & \beta(L, s) \\ \gamma(L, s) & -\alpha(L, s) \end{pmatrix} + \cdots, \quad |z| = n \rightarrow \infty.$$

Proposition :

$$\alpha(L, s) = -\frac{L}{2} \frac{\partial}{\partial L} \log Q_\sigma(L, s); \quad \beta(L, s) = \frac{Q_\sigma(L, s-1)}{Q_\sigma(L, s)} - 1.$$

Dressing

$$\Phi(z) := \begin{pmatrix} J_{z-1/2}(2L) & i\pi H_{z-1/2}^{(1)}(2L) \\ LJ_{z+1/2}(2L) & i\pi LH_{z+1/2}^{(1)}(2L) \end{pmatrix}.$$

- $\det(\Phi(z)) \equiv 1$
- $f(a) = \Phi(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g^T(b) = (0 \quad 1) \Phi^{-1}(b)$

-

$$\Phi(z+1) = L^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L^2 & z+1/2 \end{pmatrix} \Phi(z), \quad \frac{\partial}{\partial L} \Phi(z) = L^{-1} \begin{pmatrix} z-1/2 & -2 \\ 2L^2 & -z+1/2 \end{pmatrix} \Phi(z).$$

$$\Downarrow$$

$$\Psi_\sigma(z; L, s) := Y_\sigma(z+s+1/2; L, s) \Phi(z+s+1/2; L)$$

satisfait un problème de RH plus simple

→

Problème de RH pour Ψ_σ

1. $\Psi_\sigma(z)$ est une fonction (matricielle) méromorphe en z avec des pôles simple en \mathbb{Z}' .
2. Pour tout $a \in \mathbb{Z}'$, la fonction

$$\Psi_a^{\text{reg}}(z) := \Psi(z) \left(I - \frac{W_\Psi(a)}{z - a} \right)$$

a une singularité apparente en $z = a$, où

$$W_\Psi(a) := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Z}'.$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|z|=n} |\Psi_\sigma(z) \Phi^{-1}(z + s + 1/2) - I| = 0$.

La compatibilité à la Lax

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial L} \Psi_\sigma(z; L, s) &= A(z; L, s) \Psi_\sigma(z; L, s) \\ \Psi(z; L, s+1) &= B(z; L, s) \Psi_\sigma(z; L, s) \end{cases}$$



$$\frac{\partial}{\partial L} A(z; L, s) = B(z; L, s+1)A(z; L, s) - A(z; L, s)B(z; L, s).$$



$$\frac{\partial^2}{\partial L^2} \log Q_\sigma(L, s) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial L} \log Q_\sigma(L, s) + 4 = 4 \frac{Q_\sigma(L, s+1)Q_\sigma(L, s-1)}{Q_\sigma^2(L, s)}.$$

