Hamilton-Jacobi

Remarques & Nouveautés

Par Camille Laurent-Gengoux

Par Oscar Cosserat

$$\text{“} \quad -\frac{d}{dt} S(t,q,q') = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(t,q,q')\right) \in \mathbb{R}(t) \quad \text{”}$$

?

I • Hamilton-Jacobi “classique”

II • Un peu de géométrie symplectique

III Applications aux intégrateurs de Poisson

I • Hamilton-Jacobi "classique"

Situation : 1 pt se promène dans $\mathbb{R}^n$, $q(t) :=$ position

$v(t) = \dot{q}(t) :=$ vitesse.

Loi donnée par

- Un Lagrangien $L(q, v, t)$

⟶ on pose l'action d'un chemin

$$S(q) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

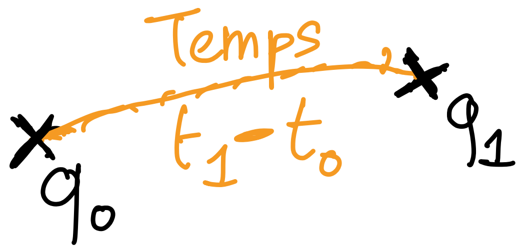
On demande que

- La particule va de (q_0, t_0) à (q_1, t_1)

ssi il existe $q(t)$ qui soit un point stationnaire de S.

$$dS[\delta q(t)] = 0 \quad \text{avec } q(t_0) = q_0 \quad q(t_1) = q_1$$

Idée : ① Si q_0, q_1 sont proches et $|t_1 - t_0|$ petit, il doit exister 1 et 1 seul chemin stationnaire



② Posons

PAS LE MÊMES

... le dit chemin...

$$S(q_0, q_1, t) := S(q(t))$$

Lemme : L convexe $\Rightarrow$ $\exists$nce globale

L lisse $\Rightarrow$ $\exists$nce locale.

Thm $S(q_0, q_1, t)$ vérifie Hamilton-Jacobi, où H est le Hamiltonien associé à L

$$\frac{dS}{dt} = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)$$

Dem : Tableau

Idée : Dérivée $/q$ $/q'$ $/t$ est dériver le long des chemins stationnaires $\boxtimes$

Remarques

* Corde vibrante

(dim 1)

$$x'' - k x = \theta(t)$$

$$S(x(u)) = \int_0^1 \left(\frac{x'(u)^2}{2} + k \frac{x(u)^2}{2} + \theta(t)\, x(t) \right) dt.$$

convexe

Action := énergie qu'il faut pour passer d'un état à un autre...

les extrémales sont des minimales

* Ressort

$$x'' + \omega^2 x = g(t)$$

$$S(x(u)) = \int_0^1 \left[\left(\frac{x'^2}{2} \right) - \omega^2 \frac{x^2}{2} + g(t) x(t) \right] dt$$

Pas convexe

Action := pas de sens clair !

Pas minimal

II • Un peu de géométrie symplectique

Mécanique Hamiltonienne

Lagrangien $L \longmapsto$ Hamiltonien H

Extrémales de $S \longmapsto$ Champs Hamiltoniens

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \right) \text{ Dans } \mathbb{R}^{2n}$$

Soit M une variété

On sait faire le crochet de deux fonctions

- (T^*M, ω_{can}) est <u>symplectique</u>

- $\forall H \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$Gr(dH) := \{ d_x H, x \in M \} \subseteq T^*M$$

est <u>Lagrangienne</u>

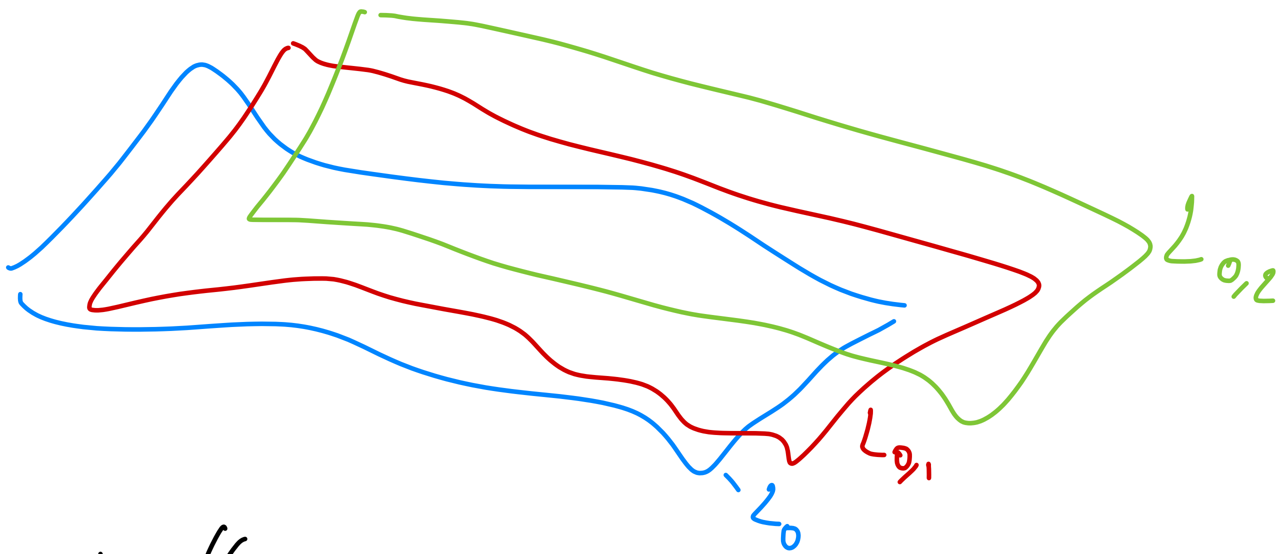
<u>càd</u> localement donnée par $h_1 = \dots = h_n = 0$

avec $\{h_i, h_j\} = 0$.

• Soit ω une forme symplectique dim $2n$

Soit L_t une famille de sous-variétés

Lagrangiennes



Alors " $\frac{\partial L}{\partial t}$ " est une fonction sur L

qui décrit toute la trajectoire.

Q : Qu'est-ce que Hamilton-Jacobi ?
(du point de vue symplectique)

* On joue sur T^*M avec $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$

* La trajectoire au temps t est un graphe L_t dans

$$T^*M \times T^*M, \ (\omega_{can} - \omega_{can})$$

$$\simeq T^*(M \times M)$$

Remarque cruciale

Deux Pts de Vue

sur $\partial L_t / \partial t$

①

C'est le graphe d'une fonction $S_t \in C^\infty(M \times M)$

$$\frac{\partial L_t}{\partial t} = \frac{\partial S_t}{\partial t}$$

②

Varie suivant H

(car on suit H)

$$\frac{\partial L_t}{\partial t} = H$$

Comme c'est unique

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = H(dS) + k(t)$$

III Applications aux intégrateurs de Poisson

Soit $\dot{\gamma} = X_H|_{\gamma(t)}$ une équation Hamiltonienne associée à une structure de Poisson (M, π)

<u>Ex:</u> • Solide Rigide :

$$\dot{x} = Jx \wedge x$$

dans $\mathbb{R}^3$, $J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

• KdV : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\dfrac{\partial u}{\partial x}$

dans $C^\infty(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{X}(\mathbb{R})$

Thm (Karasev / Dazord-Coste-Weinstein) Il existe sur T^*M deux morphismes de Poisson

$$\begin{tikzcd} & T^*M \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ (M,\pi) & & (M,-\pi) \end{tikzcd}$$

et pour tout $S \in \mathcal{C}^\infty(M)$ petit

$$\underline{Gr(dS)} \subseteq T^*M$$

est un difféo de Poisson

Rmq (Oscar Cosserat).

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ \dfrac{\partial S_t}{\partial t} = H(dS_t) + k(t) \end{cases}$$

induit une famille de difféo qui est la solution de $\dot{\gamma} = X_\gamma$.

Idée : C'est une Lagrangienne qui bouge dans T^*M

→ Regardons-la de deux points de vue !

Application : On tronque !

$S_0 = 0 \qquad S_1 = H$

$S_2 = \{\varepsilon^* H, s^* H\} \qquad S_3 = \dots$

Calculable

$$S^{(k)} := S_1 + \Delta t\, S_2 + \frac{\Delta t^2}{2} S_3 + \dots + \frac{\Delta t^k}{k!} S_k$$

$dS^{(k)}$ est une discrétisation ob Poisson de $\dot{\gamma} = X_H / \gamma$.