

Modélisation Géométrique d'un Matériau Micro-structuré

Une modélisation à facteur d'échelle



Mewen Crespo

Encadré par Guy Casale et Loïc Le Marrec

Université de Rennes 1

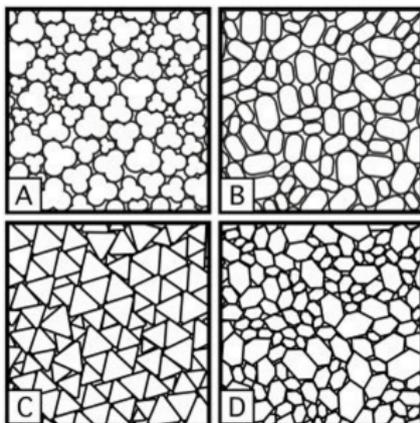
Mercredi 28 juin 2023

réunion plénière du GDR-GDM

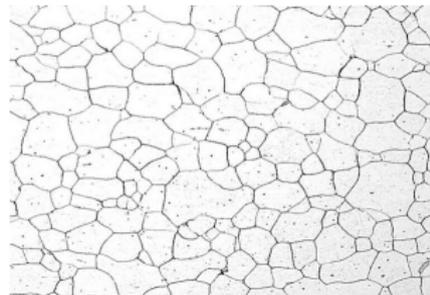
Introduction



coupe transversale de bois
cernée et fissurée



pavage isotrope du plan



échantillon de silicium
polycristallin

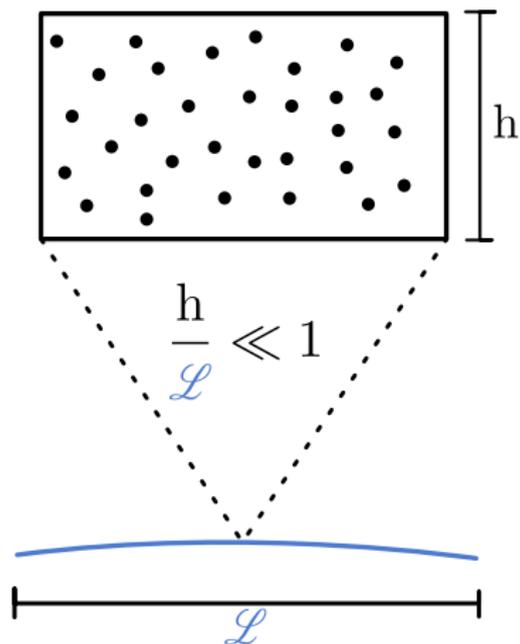
V. H. Nguyen, *Geometric models and applications to material media with defects*, 2021

E. Cartan, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, 1922

E. Cosserat and F. Cosserat, *Sur la théorie des corps déformables*, 1909

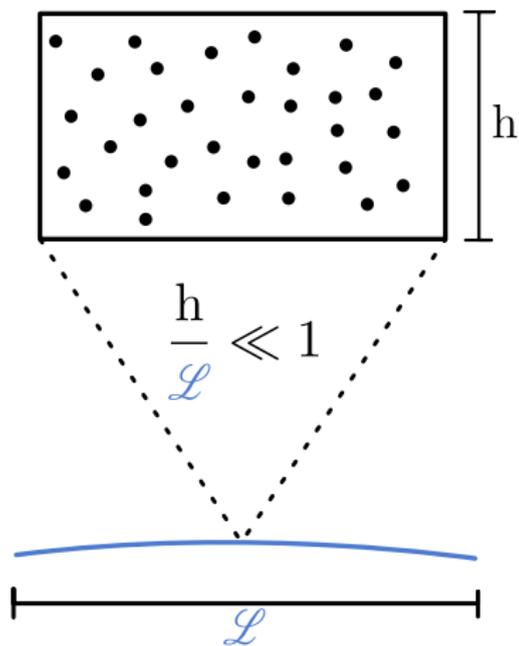
V. H. Nguyen, G. Casale, L. Le Marrec, *On tangent geometry and generalized continuum with defects*, 2021

Un modèle à plusieurs échelles

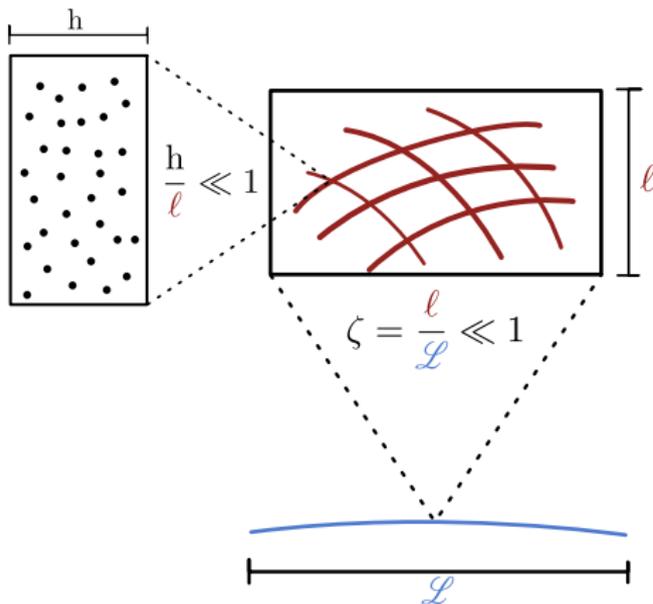


Approximation continue d'un
matériau macroscopique

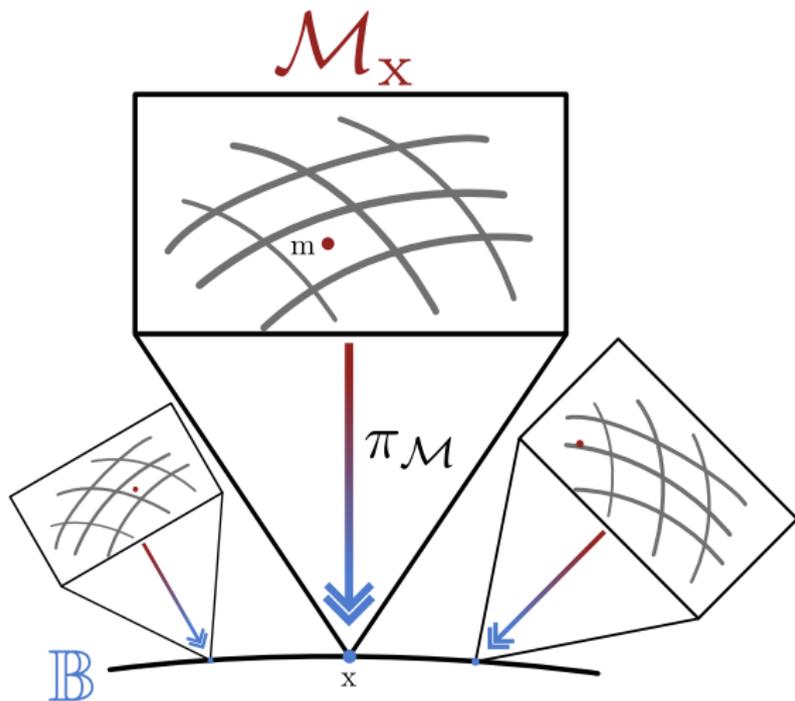
Un modèle à plusieurs échelles



Approximation continue d'un
matériau macroscopique



Approximation continue d'un
matériau micro-structuré



Structure de fibré $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{M}}} \mathbb{B}$ d'un matériau micro-structuré

Définition 5.1 – Fibré

$\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{M}}} \mathbb{B}$ est un fibré. C'est à dire que c'est une

- union disjointe:

$$\mathcal{M} \equiv \bigsqcup_{X \in \mathbb{B}} \mathcal{M}_X$$

- homogène:

$$\exists \mathcal{F}, \forall (X, Y) \in \mathbb{B}^2 \quad \mathcal{M}_X \simeq \mathcal{M}_Y \simeq: \mathcal{F}$$

- localement triviale (i.e. $\mathcal{M} \simeq_{\text{loc.}} \mathbb{B} \times \mathcal{F}$):

$$\forall X \in \mathbb{B}, \exists \mathcal{U} \subset \mathbb{B} \text{ vois. de } X, \quad \text{t.q.} \quad \pi_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U} \times \mathcal{F}$$

M. Epstein, *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*, 2014

Définition 6.1 – Morphisme de fibré

Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}}} \mathbb{A}$ et $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} \mathbb{C}$ deux fibrés. $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ est un morphisme de fibré si et seulement si il existe $\bar{f} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ appelé **ombre** de f tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} \\ \pi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C} \end{array}$$

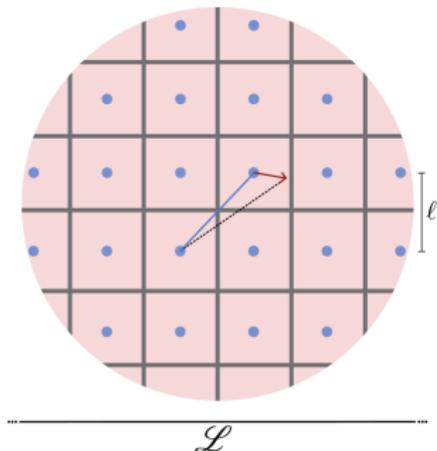
c'est à dire que pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}^2$

$$\pi_{\mathcal{A}}(x) = \pi_{\mathcal{A}}(y) \implies \pi_{\mathcal{C}}(f(x)) = \pi_{\mathcal{C}}(f(y)) =: \bar{f}(\pi_{\mathcal{A}}(x))$$

Axiome 7.1 – Interprétation standard de la μ MMC

Tous les espaces cinématiques de la mécanique des milieux continus micro-structurée (μ MMC) sont des fibrés dont les bases sont des espaces de la mécanique des milieux continus usuelle (MMC).

La projection d'un objet cinématique de la μ MMC sur la base du fibré auquel il appartient, qualifiée de partie macroscopique, est la seule information mesurable par un observateur et peut se formaliser en tant qu'objet de la MMC.



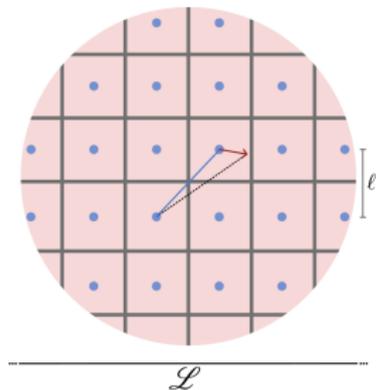
Portion du fibré holonome ambiant discret \mathbb{E}^ζ de facteur d'échelle $\zeta = \frac{\ell}{2}$
issue de l'espace ambiant classique tri-dimensionnel \mathbb{E}

$$\mathbb{E}^\zeta := \bigsqcup_{\mathbf{n} \in \ell \cdot \mathbb{Z}^3} \mathbf{n} + \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} \right]^3$$

$$\mathcal{E} := \varprojlim_{\zeta \rightarrow 0} \mathbb{E}^\zeta$$

$$\mathbb{E} = \varprojlim_{\zeta \rightarrow 0} \ell \cdot \mathbb{Z}^3$$

Une approche holonome – γ



Lorsque $\vec{v} = \mathbf{0}$:

$$\gamma_{(\mathbf{n}, \varepsilon)}^{\zeta} : \ell \cdot \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{T}_{(\mathbf{n}, \varepsilon)} \mathbb{E}^{\zeta}$$

$$\dashrightarrow \quad \mapsto \quad \rightsquigarrow \equiv \dashrightarrow$$

$$\gamma_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} : \mathbb{T}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{T}_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} \mathcal{E}$$

$$= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \gamma^{\zeta} \equiv \begin{bmatrix} \text{Id} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Définition 10.1 – Connexion de Ehresmann

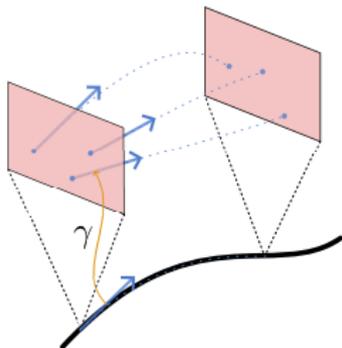
Une connexion (de Ehresmann) sur $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}}} \mathbb{E}$ est la donnée en chaque point $(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{\bar{\mathbf{x}}}$ d'une injection linéaire

$$\gamma_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} : T_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbb{E} \hookrightarrow T_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})}\mathcal{E}$$

qui soit horizontal (i.e. macroscopique). C'est à dire:

$$\forall (\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{\bar{\mathbf{x}}} \quad T\pi_{\mathcal{E}} \circ \gamma_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} = \text{Id}_{T_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbb{E}}$$

C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, 1950

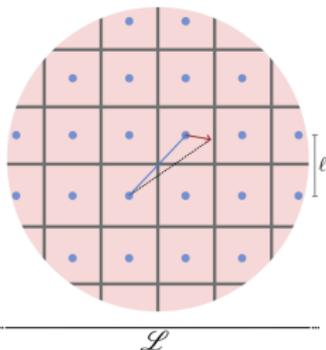


Lorsque γ est linéaire:

$$\gamma|_{(\bar{x}, y^i y_i)} \left(\bar{u}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \right) := \bar{u}^j \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} + \gamma_{ij}^k(\bar{x}) y^i \frac{\partial}{\partial y^k} \right]$$

Pour $\sigma : \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une section de \mathcal{E} ($\pi_{\mathcal{E}} \cdot \sigma = \text{Id}_{\mathbb{E}}$) et $\bar{\mathbf{u}} \in T_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbb{E}$ on a:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{u}}} \sigma := \mathbf{v}_{\gamma} \cdot T_{\bar{\mathbf{x}}} \sigma \cdot \gamma_{\sigma(\bar{\mathbf{x}})} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \left[\frac{\partial \sigma^k}{\partial \bar{x}^j} - \gamma_{ij}^k(\bar{x}) \sigma^i \right] \bar{u}^j \frac{\partial}{\partial y^k}$$



Lorsque $\rightarrow = \mathbf{0}$:

$$\vartheta_{(\mathbf{n}, \varepsilon)}^{\zeta} : \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} \right]^3 \longrightarrow \mathbb{T}_{(\mathbf{n}, \varepsilon)} \mathbb{E}^{\zeta}$$

$\dashrightarrow \quad \longmapsto \rightsquigarrow \equiv \dashrightarrow$

$$\begin{aligned} \vartheta_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} &: \mathbb{T}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{T}_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} \mathcal{E} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \vartheta^{\zeta} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\zeta} \text{Id} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

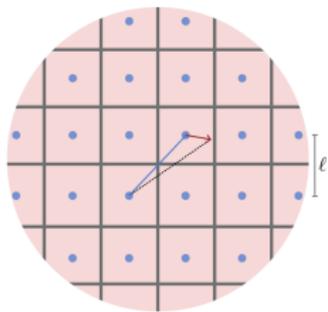
Définition 13.1 – Soudure

Une soudure sur $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}}} \mathbb{E}$ est la donnée en chaque point $(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{\bar{\mathbf{x}}}$ d'une injection linéaire

$$\vartheta_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} : T_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbb{E} \hookrightarrow T_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})}\mathcal{E}$$

qui soit vertical (i.e. microscopique). C'est à dire:

$$\forall (\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}) \in \mathcal{E}_{\bar{\mathbf{x}}} \quad T\pi_{\mathcal{E}} \circ \vartheta_{(\bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x})} = \mathbf{0}_{T_{\bar{\mathbf{x}}}\mathbb{E}}$$



$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{L}} \quad (\gamma^\zeta)^{-1} = T\pi_{\mathcal{E}} : H_\gamma \mathcal{E} \longrightarrow \text{TE} \quad (\vartheta^\zeta)^{-1} : V_\gamma \mathcal{E} \longrightarrow \text{TE}$$

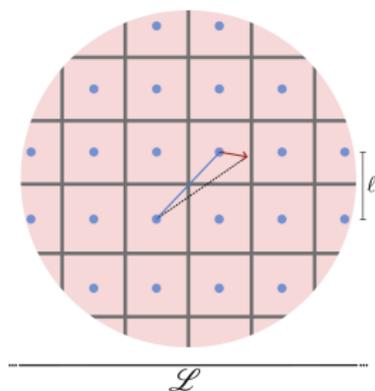
$$T\varpi (\rightsquigarrow + \rightsquigarrow) := \dashrightarrow$$

$$T\varpi : T\mathcal{E} \longrightarrow \text{TE}$$

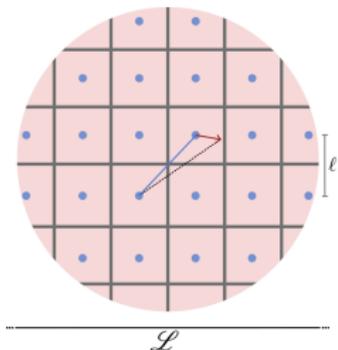
$$:= \gamma^{-1} \cdot h_\gamma + \vartheta^{-1} \cdot v_\gamma$$

$$= T\pi_{\mathcal{E}} + \vartheta^{-1} \cdot v_\gamma$$

$$\equiv [\text{Id} \quad \zeta \cdot \text{Id}]$$



$$\begin{aligned}\ker T\varpi &= \left\{ \mathbf{u} \in T\mathcal{E} \mid T\pi_{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) + \vartheta^{-1}(\mathbf{v}_{\gamma}(\mathbf{u})) = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{u} \in T\mathcal{E} \mid \mathbf{v}_{\gamma}(\mathbf{u}) = -\vartheta(T\pi_{\mathcal{E}}(\mathbf{u})) \right\} \\ &= \left\{ \gamma(\bar{\mathbf{u}}) - \vartheta(\bar{\mathbf{u}}) \mid \bar{\mathbf{u}} \in T\mathbb{E} \right\} \\ &= H_{\gamma - \vartheta}\end{aligned}$$



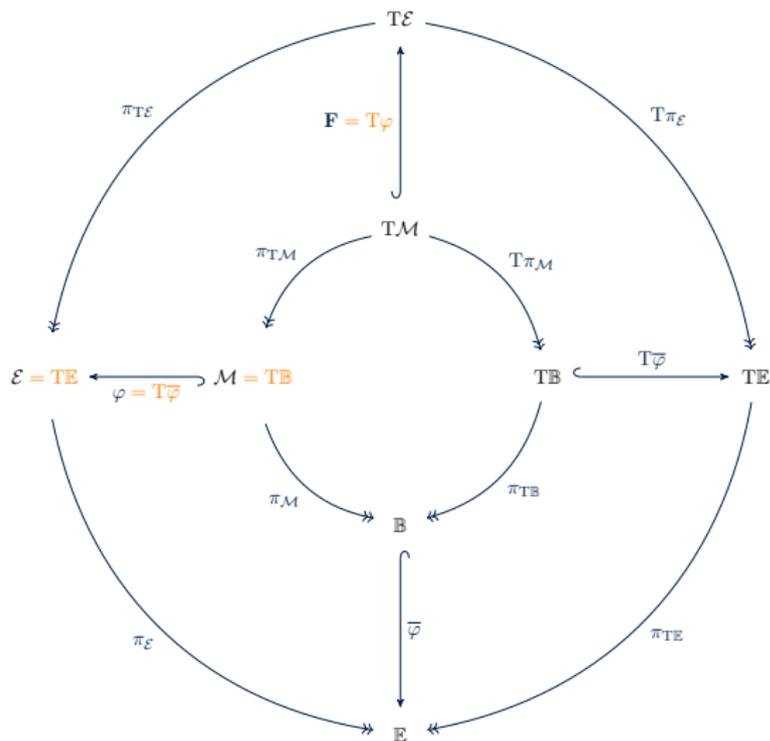
$$\mathbf{g} : T^*\mathcal{E} \longrightarrow T\mathcal{E}$$

$$:= T^*\varpi \cdot g_{\text{eucl}} \cdot T\varpi$$

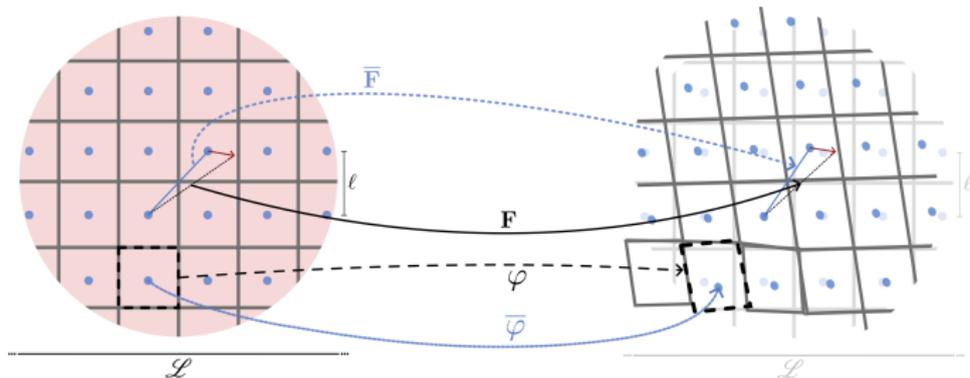
$$\equiv \begin{bmatrix} \text{Id} & \zeta \cdot \text{Id} \\ \zeta \cdot \text{Id} & \zeta^2 \cdot \text{Id} \end{bmatrix}$$

$$\| \rightsquigarrow + \rightsquigarrow \|_{\mathbf{g}} = \| \dashrightarrow \|_{g_{\text{eucl}}}$$

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{g}} = \| T\varpi(\mathbf{u}) \|_{g_{\text{eucl}}}$$



Tirage en arrière

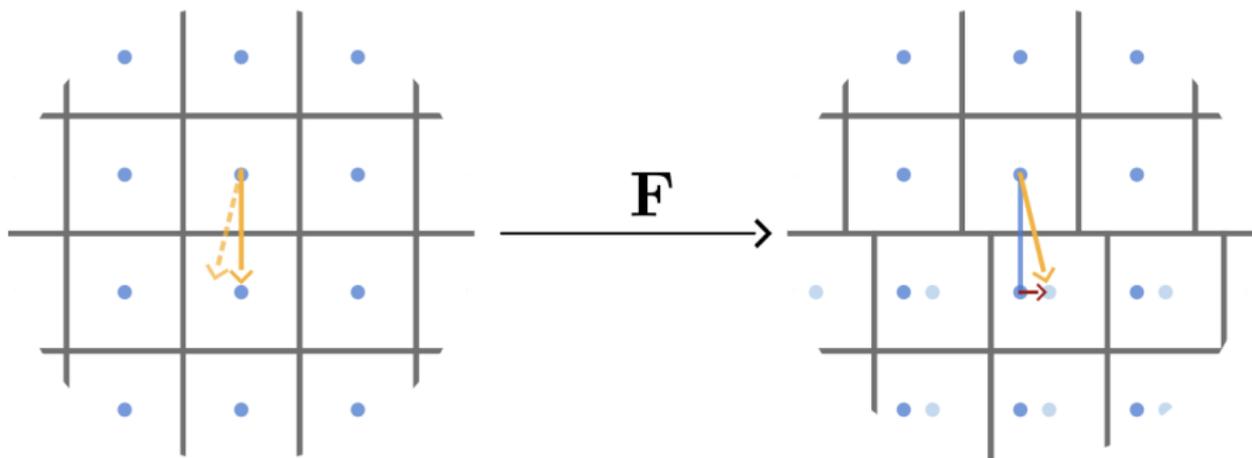


$$\begin{array}{ccc}
 T^*M & \xleftarrow{F^*} & T^*E \\
 \uparrow G & & \uparrow g \\
 TM & \xrightarrow{F} & TE
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 VM & \xrightarrow{F|_{VM}} & VE \\
 \uparrow \Theta & & \downarrow \vartheta^{-1} \uparrow \vartheta \\
 TB & \xrightarrow{T\bar{\varphi}} & TE
 \end{array}$$

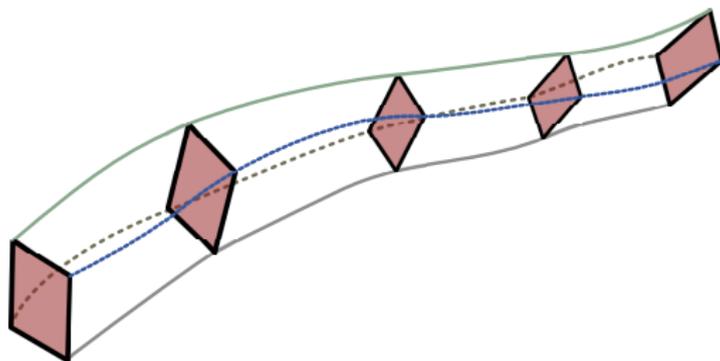
$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{F} & TE \\
 \uparrow \Gamma \downarrow T\pi_M & & T\pi_E \uparrow \gamma \\
 TB & \xrightarrow{T\bar{\varphi}} & TE
 \end{array}$$

Tirage en arrière

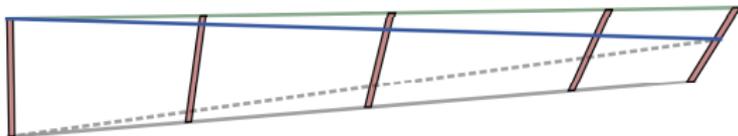


$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}\mathcal{M} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{T}\mathcal{E} \\
 \Gamma \uparrow \downarrow \mathcal{T}\pi_{\mathcal{M}} & & \mathcal{T}\pi_{\mathcal{E}} \updownarrow \gamma \\
 \mathcal{T}\mathcal{B} & \xrightarrow{\mathcal{T}\bar{\varphi}} & \mathcal{T}\mathcal{E}
 \end{array}$$

Exemple: La poutre



Projection isométrique d'une transformation micro-structurée d'une poutre
(un fibré 1×3).



Coupe transversale "le long" de l'axe macroscopique de la même
transformation micro-structurée.

Conclusion

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{Eringen}} : \mathbb{T}\mathcal{M} &\longrightarrow V\mathcal{E} \\ &= \Theta \cdot \mathbb{T}\pi_{\mathcal{M}} \\ &= \mathbb{v}_{\Gamma-\Theta} - \mathbb{v}_{\Gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{Eringen}} : V\mathcal{M} &\longrightarrow V^*\mathcal{M} \\ &= \mathbf{F}|_{V\mathcal{M}}^* \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}|_{V\mathcal{M}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Eringen}} : \mathbb{T}\mathcal{M} &\longrightarrow V\mathcal{M} \\ &= \mathbb{v}_{\Gamma} - \mathbb{v}_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

A. C. Eringen, *Microcontinuum Field Theories I*, 1998

Résultats

- Construction mécanique: pas de thermodynamique, viscosité, etc.
- Fibrés vectoriels génériques: dislocations, disclinaisons, méta-matériaux, etc.
- Mesures d'Eringen (même avec $\dim(\mathbb{B}) \leq 3$ et $\mathbf{F} \neq \mathbb{T}\varphi$)
- Longueur dégénérée: *pseudo*-métriques

Objectifs

- invariances sous l'action d'un groupe
- fonctionnelles énergies
- Retrouver d'autres travaux (Cosserat, etc.)