

Élasticité, limite de linéarité et symétries de matériaux architecturés triangulaires ou tétragonaux

Marc L. M. François*, Christelle Combescure**

*Laboratoire GeM, Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS

**Labo. CREC, Acad. Mil. de Saint-Cyr Coëtquidan — Labo. IRDL, UBS

Mercredi 28/6/2023

Plan

- 1 Pourquoi des matériaux architecturés ?
- 2 Le flambement ou l'enfer de la compression
- 3 Les matériaux poreux et architecturés
- 4 Homogénéisation des architecturés réguliers
- 5 Limite de linéarité
- 6 Autres cas traités
- 7 Conclusions et perspectives

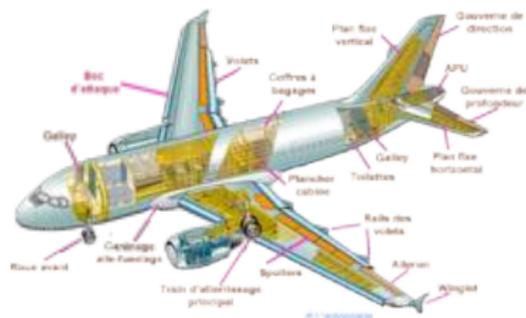
Pourquoi des matériaux architecturés ?

À quoi sert un matériau en ingénierie ?

- à faire des structures, fixes ou mobiles

Qu'est-ce qu'une structure ?

- Quelque chose qui transmet des efforts F sur une distance L



Quelles sont les qualités d'une structure ?

- légèreté, pour les structures mobiles
- à faible coût, pour des structures fixes
- avoir une résistance suffisante
- avoir une rigidité suffisante

Équations-clé, en version 1D avec, en général, (F, L) donnés :

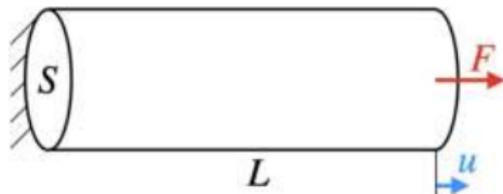
$$\sigma = F/S, \quad < \sigma_y$$

$$\varepsilon = \sigma/E$$

$$u = \int \varepsilon dx, \quad u < u_0$$

$$M = \rho LS$$

$$C = C_m M$$



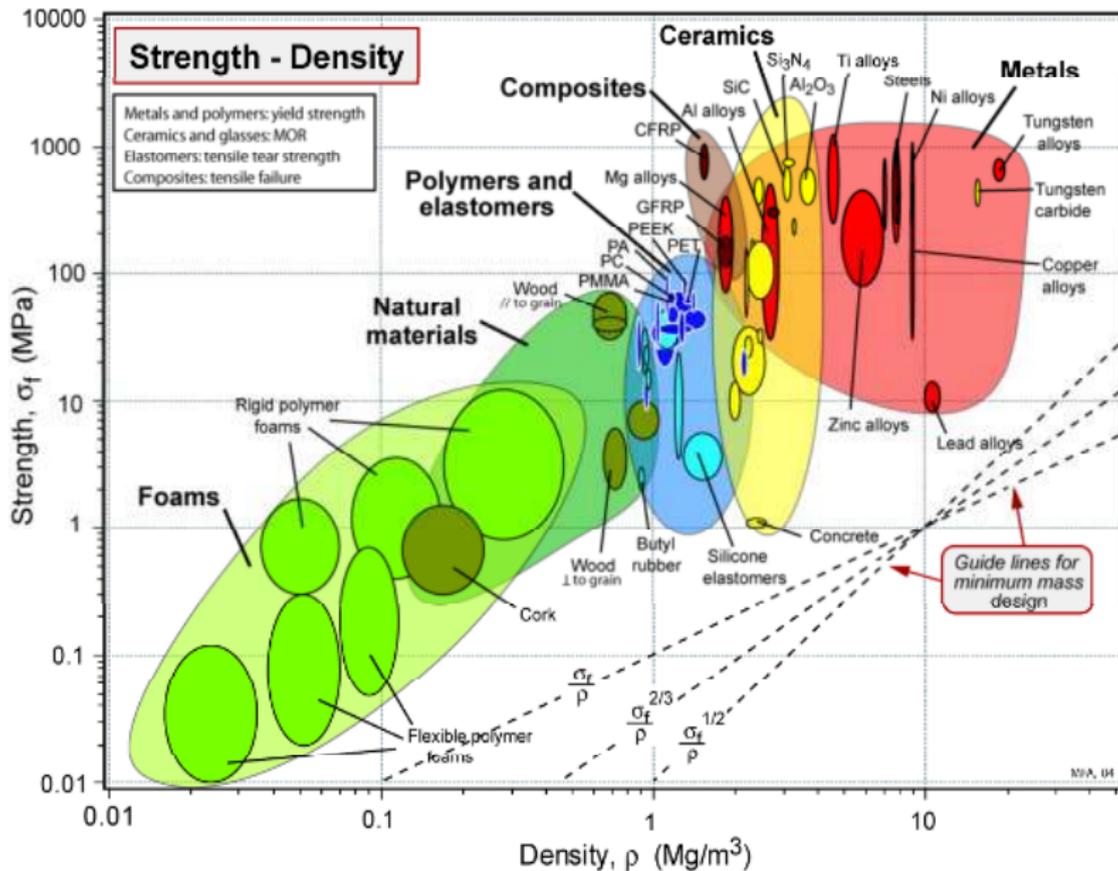
Donc, un bon matériau structurel c'est :

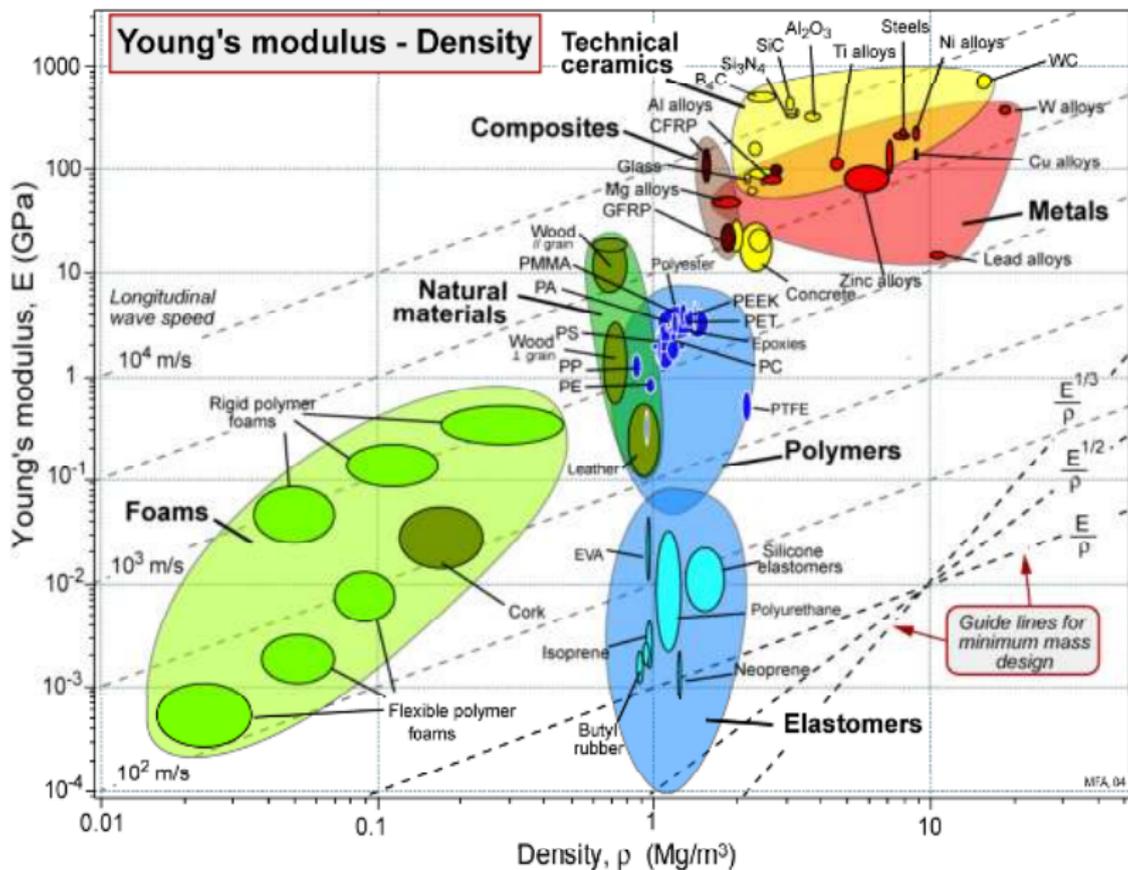
- une grande contrainte admissible σ_y
- une faible masse volumique ρ
- une grande rigidité E
- un faible coût massique C_m

Ashby et Jones [1999] ont tabulé ces grandeurs, pour tous les matériaux.

Le critère à optimiser est une fonction de ces grandeurs, qui dépend du problème :

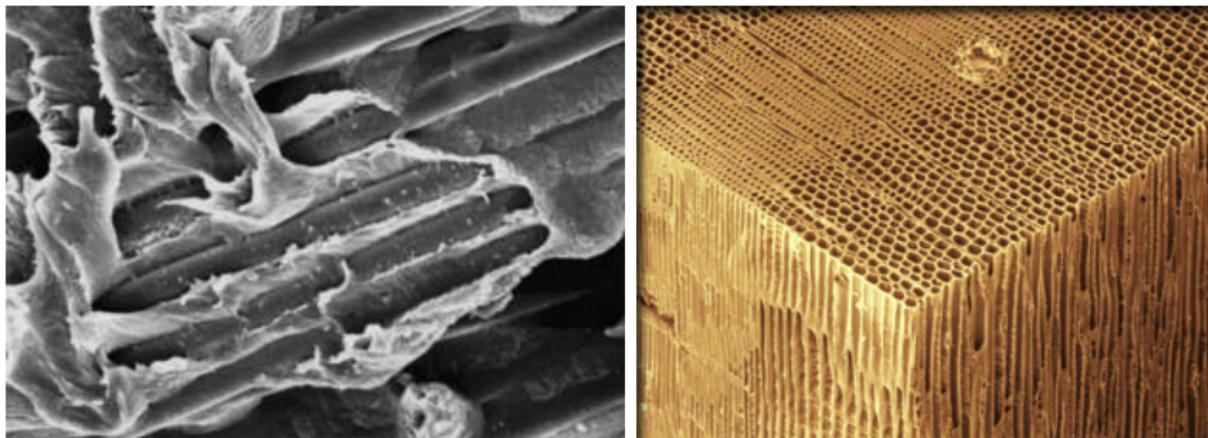
- pour être le plus léger : maximiser σ_y/ρ
- pour être le plus léger, à déflexion donnée : maximiser \sqrt{E}/ρ sous la contrainte $|\sigma| < \sigma_y$
- idem, mais au moindre coût : maximiser $E/\rho C_M$ sous la contrainte $|\sigma| < \sigma_y$
- ...





Qu'est-ce qui rend les bois et les composites si performants ?

- Les fibres ont statistiquement moins de défauts (Weibull)
- Le matériau possède une micro-structure, une architecture

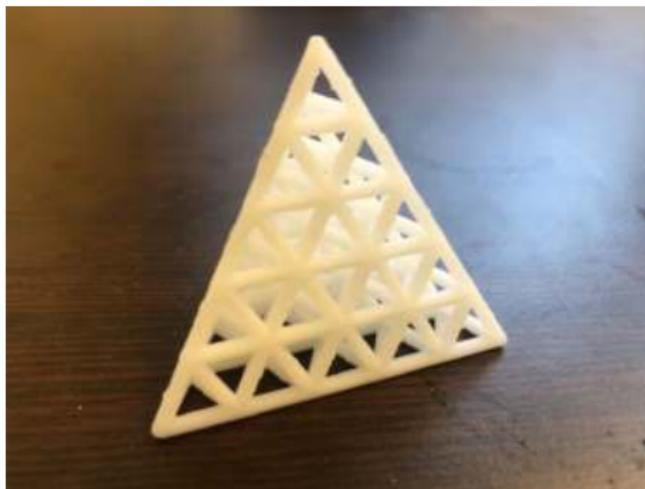
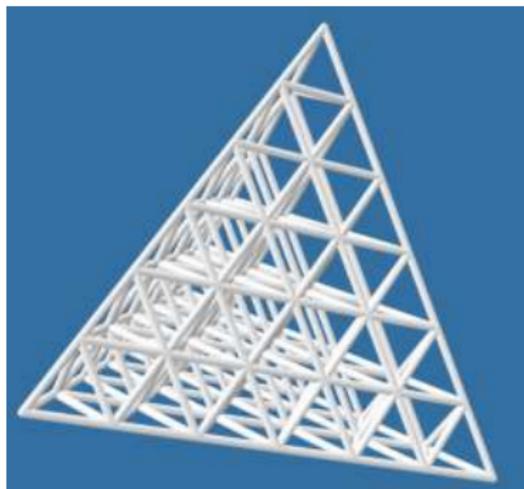


- Composites (depuis 1940 environ) : fibres haute performance et matrice basse performance. Structures élémentaires.
- Architecturés (années 2020) : plus de matrice. Structures plus complexes.

Au sein de l'ANR MoMaP, les architecturés étudiés sont :

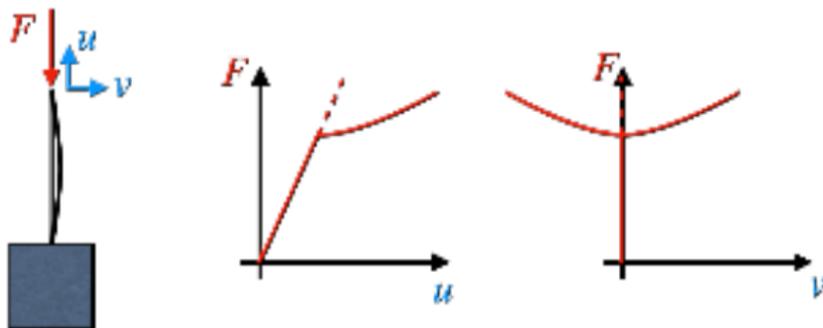
- Structure en treillis, maille tétraédrique (3D) ou triangulaire (en 2D)
- Réalisation par impression 3D plastique ou métal (CEA)

Ce sont des simplex dans les deux cas, choisis afin de maximiser l'énergie de tension par rapport à celle de flexion, afin d'être les plus rigides possibles (applications structurelles).



Le flambement ou l'enfer de la compression

En compression, des modes bifurqués peuvent apparaître alors qu'on est loin de $-\sigma_y$. Pour une poutre droite, [Euler, 1744] :

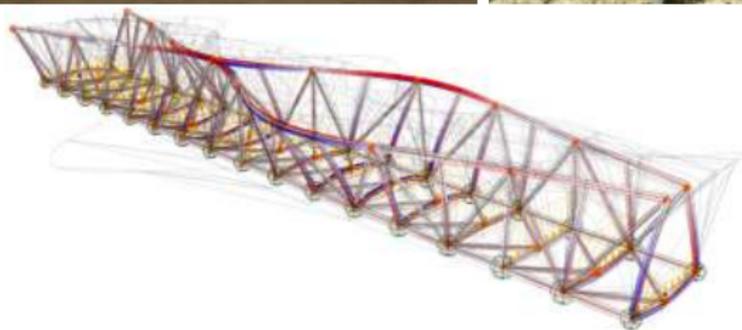


$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{KL^2}$$

Par exemple, pour porter une voiture de 1000 kg à 1m avec des fibres de C il faut :

- en traction : une barre de 3 mm de côté
- en compression : une barre de 19 mm de côté ($M \times 40!$)

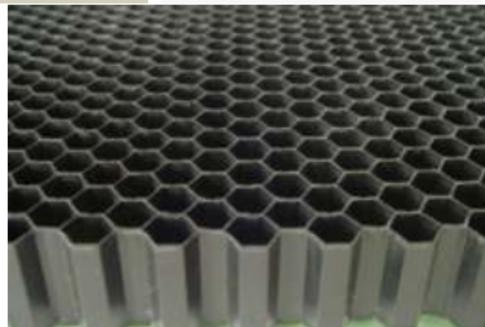
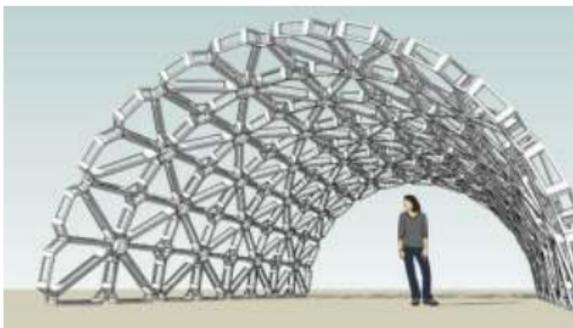
Des phénomènes de flambement apparaissent aussi pour les structures :



Les bureaux de calcul les prévoient encore mal, plusieurs catastrophes récentes (silos, passerelles. . .).

Pour empêcher le flambement, l'ingénieur rajoute de la matière :

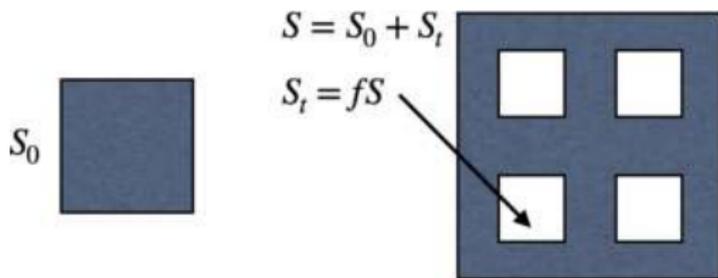
- sur la section des barres (tubes, profils en I)...
- sous forme de contreventements, de treillis



Les matériaux poreux et architecturés

- matériau si nombreux éléments et échelle méso (μm , mm , $\text{cm} \dots$)
- poreux (mousses...) si la méso-structure est aléatoire
- architecturés (treillis...) si la méso-structure est ordonnée

À densité ρ fixée, comparons une solution 0 sans trous et une solution avec une fraction $0 \leq f \leq 1$ trous :



alors on augmente la charge critique d'Euler :

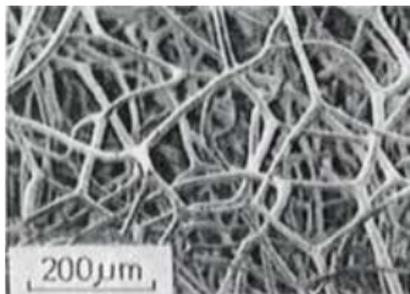
$$\frac{F_c}{F_{c0}} = \frac{1}{(1-f)^2}$$

Des pièces commencent à exister (aéronautique, militaire, spatial).

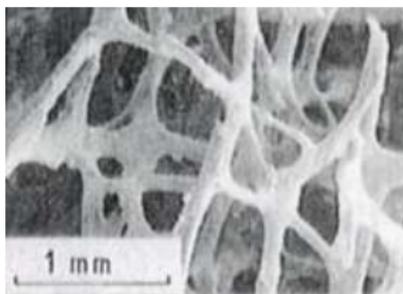


Mais les calculs sont faits en force brute (modélisation de chaque barre). Il y a un besoin de méthodes simplifiées.

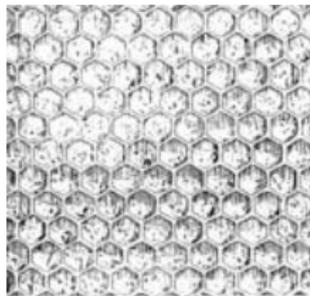
Bien sûr, la nature le fait déjà, et en mieux :



(a) structure aléatoire d'une éponge



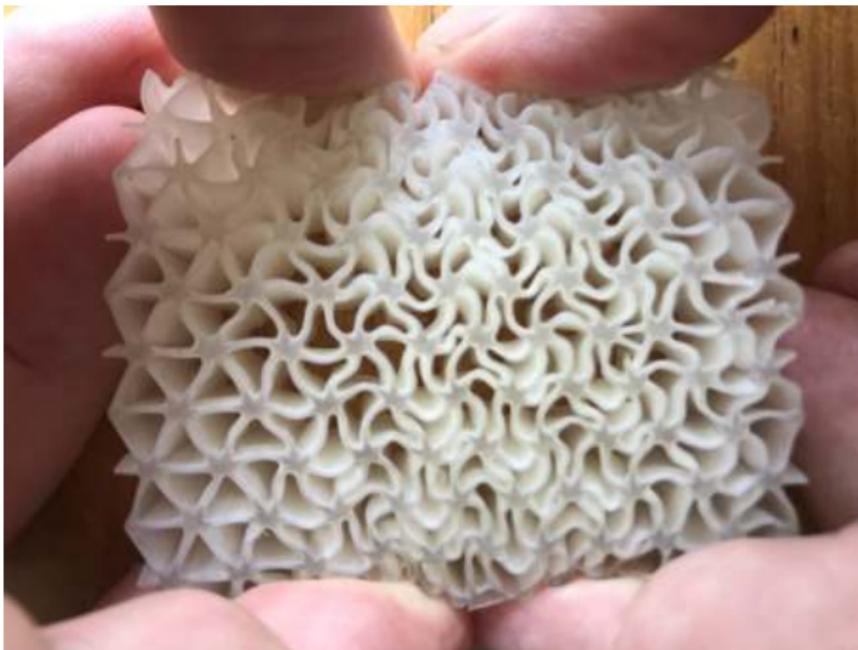
(b) structure aléatoire d'un os spongieux



(c) structure régulière d'un nid d'abeille

[Ashby et Jones, 1999]

car ces matériaux peuvent être en plus vivants, auto-adaptatifs, multi-fonctionnels. . .



Arrivé un certain niveau de compression, des modes de flambement apparaissent néanmoins.



(a) type 1 fibre micro-buckling



(b) type 2 fibre micro-buckling



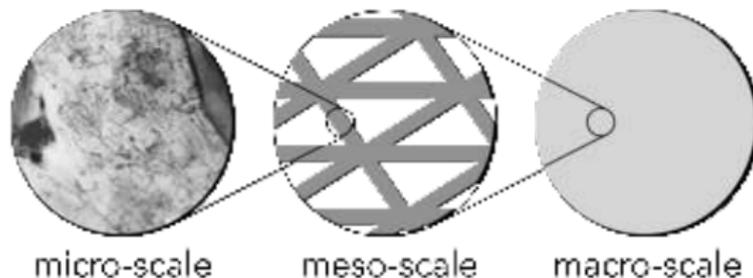
le Parisien

Avoir utilisé un composite en compression pure était certainement une très mauvaise idée ! Les phénomènes de micro-flambement des fibres en compression sont connus [N. Bahlouli], [L. Gornet].

Faudrait-il encore que les *media* interrogent des mécaniciens. . .

Homogénéisation des architectures réguliers

François, Cores, Chen, *Elasticity and symmetry of triangular lattice materials*, IJSS [2017]

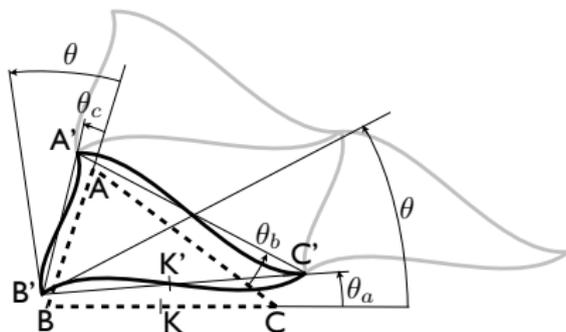


L'élasticité du **MHE** (matériau homogène équivalent) à l'échelle macro est obtenue par homogénéisation de l'échelle méso.

Il faut choisir :

- la cinématique méso (des poutres)
- la cinématique macro (du milieu continu)

Hypothèse de Cauchy-Born [1954] : pour un problème homogène, les points similaires du réseau suivent la cinématique macro.



Le tenseur d'élasticité meso (recherché) est donnée par le lemme de Hill [1963] : les énergies de déformation meso et macro sont égales. Le tenseur d'élasticité est alors donné par :

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 W_{meso}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations macro, homogène.

On paramètre un architecture régulier à cellule triangulaire quelconque par :

- 2 angles (β, γ)
- 3 raideurs en tension k_i
- 3 raideurs en flexion j_i

Remarque : pas d'effet d'échelle : aucune longueur n'intervient.

On obtient une forme analytique du tenseur d'élasticité :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^t + \mathbb{C}^f$$

où

- \mathbb{C}^t est la rigidité liée à l'énergie de tension des poutres
- \mathbb{C}^f est la rigidité liée à l'énergie de flexion des poutres

Pour des poutres classiques, élancées, et avec un abus d'écriture, $\mathbb{C}^f \ll \mathbb{C}^t$.

- La partie \mathbb{C}^t :

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^t \\ C_{2222}^t \\ C_{1122}^t \\ C_{1112}^t \\ C_{2212}^t \end{bmatrix} = \frac{1}{s_\alpha s_\beta s_\gamma} \begin{bmatrix} 1 & c_\gamma^4 & c_\beta^4 \\ 0 & s_\gamma^4 & s_\beta^4 \\ 0 & s_\gamma^2 c_\gamma^2 & s_\beta^2 c_\beta^2 \\ 0 & -s_\gamma c_\gamma^3 & s_\beta c_\beta^3 \\ 0 & -s_\gamma^3 c_\gamma & s_\beta^3 c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_a s_\alpha^2 \\ k_b s_\beta^2 \\ k_c s_\gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{1212}^t = C_{1122}^t$$

- la symétrie indicelle $C_{1122} = C_{1212}$ était prévue par Cauchy [1913], pour des « réseaux d'atomes reliés par des forces centrales ».
- le système est bien défini (5 variables) et est vraisemblablement inversible.

- La partie \mathbb{C}^f :

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^f \\ C_{1112}^f \\ C_{1212}^f \end{bmatrix} = \frac{1}{JS} \begin{bmatrix} (s_\beta c_\beta + s_\gamma c_\gamma)^2 & s_\beta^2 c_\beta^2 & s_\gamma^2 c_\gamma^2 \\ (s_\beta c_\beta + s_\gamma c_\gamma)(s_\beta^2 - s_\gamma^2) & s_\beta^3 c_\beta & -s_\gamma^3 c_\gamma \\ (s_\beta^2 - s_\gamma^2)^2 & s_\beta^4 & s_\gamma^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_b j_c \\ j_c j_a \\ j_a j_b \end{bmatrix}$$

$$C_{2222}^f = C_{1111}^f$$

$$C_{1122}^f = -C_{1111}^f$$

$$C_{2212}^f = -C_{1112}^f$$

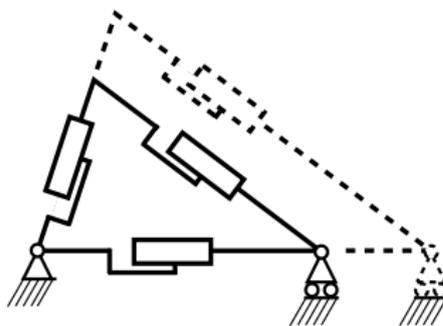
$$J = j_a + j_b + j_c$$

- plusieurs solutions $(\beta, \gamma, j_a, j_b, j_c)$ peuvent donner le même tenseur \mathbb{C}^f .

- L'allure de \mathbb{C}^f est :

$$\mathbb{C}^f = \begin{bmatrix} C_{1111}^f & -C_{1111}^f & C_{1122}^f \\ -C_{1111}^f & C_{1111}^f & -C_{1122}^f \\ C_{1112}^f & -C_{1112}^f & C_{1212}^f \end{bmatrix}$$

- On remarque que le tenseur $\mathbf{I}(1, 1, 0)$ est tenseur propre, de valeur propre 0. En effet, si l'on suppose aucune raideur en tension, on a un mécanisme à dilatation libre :



Le tenseur d'élasticité donne accès à l'expression analytique des invariants. Les résultats de Vianello [1997] (retrouvés par De Saxcé [2013]), donnent le classe de symétrie du tenseur d'élasticité (ici sous une forme non stricte) :

$$\mathbb{C} \in \mathbb{Ela}(D_2) \iff I_5^2 - I_3^2 I_4 = 0$$

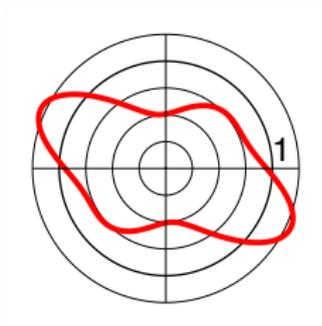
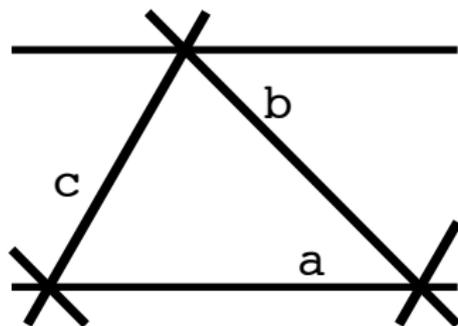
$$\mathbb{C} \in \mathbb{Ela}(D_4) \iff I_3 = 0$$

$$\mathbb{C} \in \mathbb{Ela}(O(2)) \iff \begin{cases} I_3 = 0 \\ I_4 = 0 \end{cases}$$

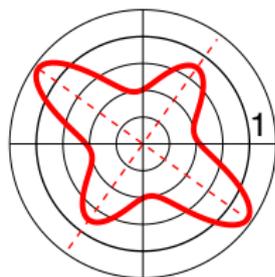
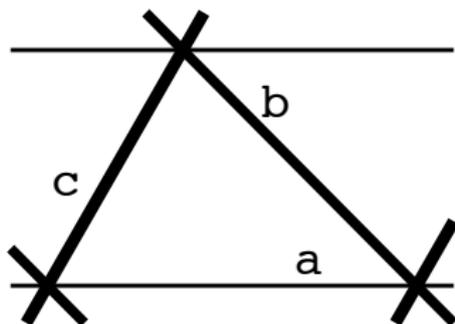
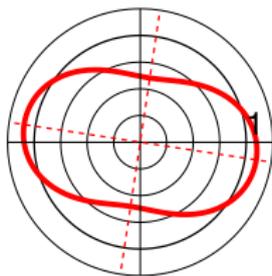
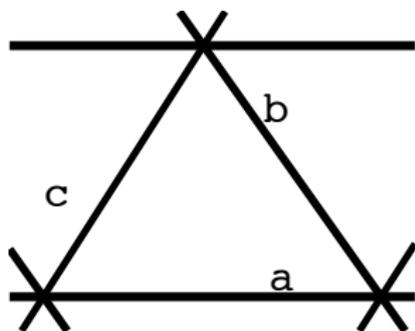
Matériau tensionnel

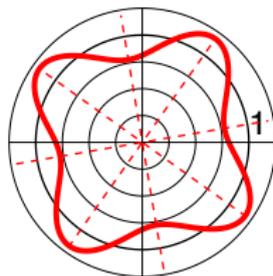
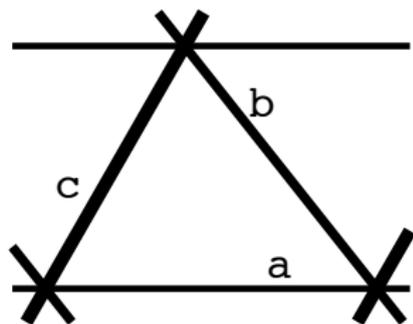
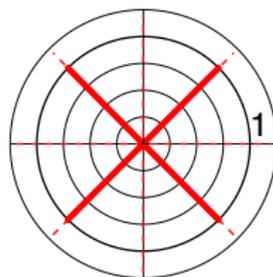
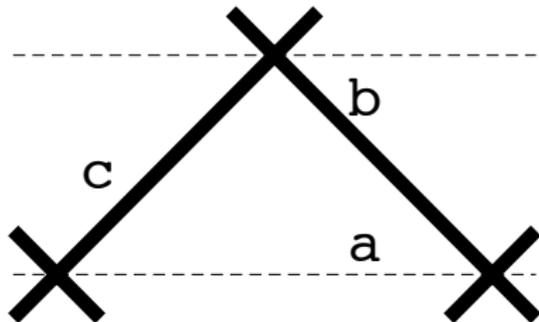
- Le treillis est défini par 2 angles et 3 raideurs
- L'épaisseur des barres est proportionnelle à leur raideur k_i
- L'anisotropie est révélée par la représentation du module d'Young :

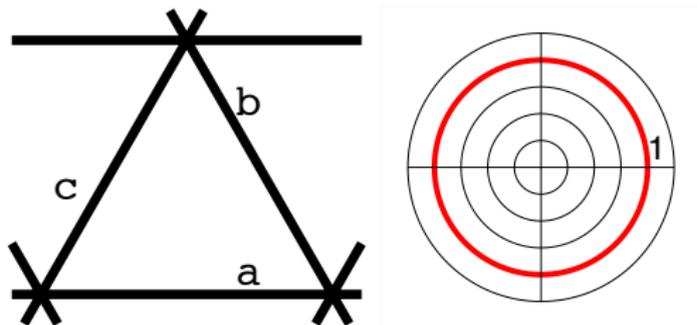
$$E(\vec{n}) = \frac{1}{n_i n_j C_{ijkl}^{-1} n_k n_l}$$



Matériau tensionnel Z_2

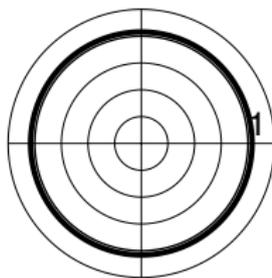
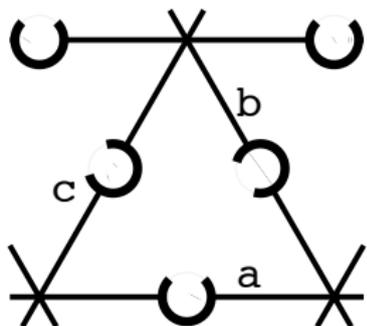
Matériau tensionnel D_2 Matériau tensionnel D_2 , R_0 -orthotrope ($I_4 = I_5 = 0$)
[Vanucci 2002, Auffray 2017]

Matériau tensionnel D_4 Matériau tensionnel D_4 , cas trivial et dégénéré (mécanisme)



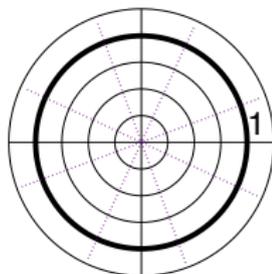
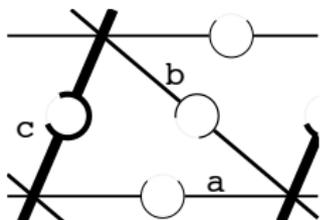
Matériau tensionnel $O(2)$, cas trivial

Matériau flexionnel Les raideurs en flexion sont matérialisées par des C d'épaisseur proportionnelle aux raideur j_i (schématisant un ressort spiral).

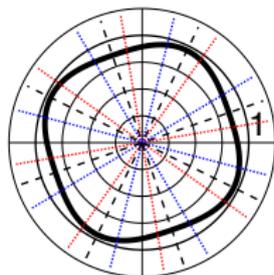
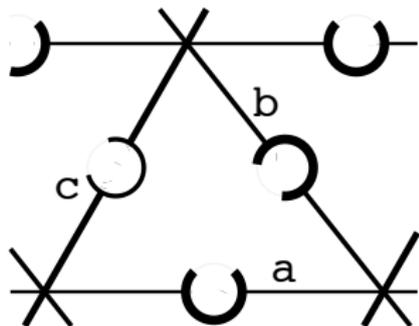


Matériau tensionnel et flexionnel $O(2)$, cas trivial

Matériau flexionnel et tensionnel



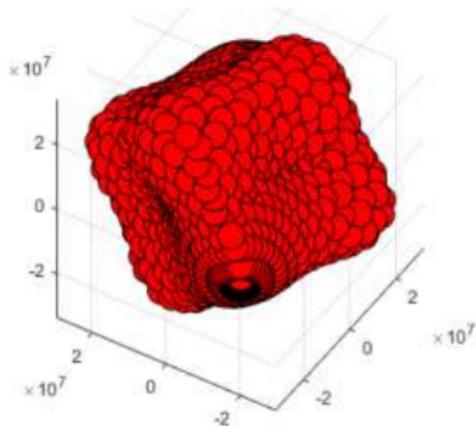
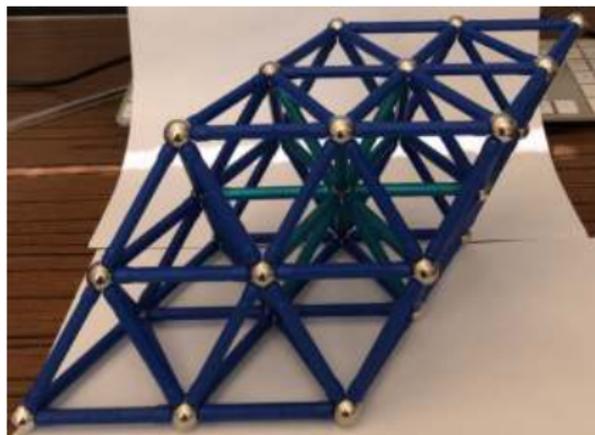
Matériau tensionnel et flexionnel $O(2)$, cas bizarre



Matériau tensionnel et flexionnel D_4 : les groupes de symétrie des deux parties ne coïncident pas (rouge : tensionnel, bleu : flexionnel, noir : total)

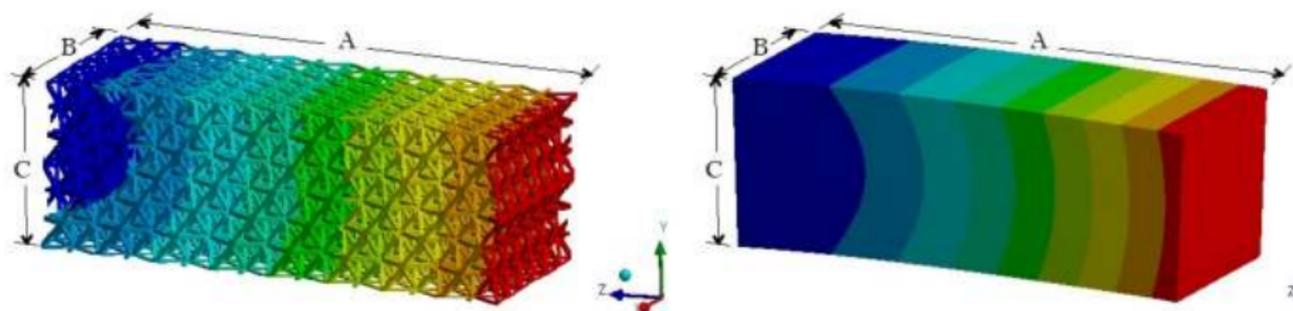
En 3D, calculs numériques (R. Basily, ECN).

Le tenseur obtenu pour une cellule tétragonale régulière, avec des rigidités de tension et de flexion identiques, présente une symétrie cubique.



Maille élémentaire cubique face centrée — Orbite du module d'Young

On vérifie que le matériau homogène équivalent décrit bien le comportement du matériau architecturé :



Vérification sur le déplacement d'une poutre cantilever.
55% d'erreur pour 200 cellules, 5% d'erreur pour 1700 cellules.

N. Auffray et M. Poncelet [2020] ont montré que, au voisinage des frontières, des modèles au second gradient étaient cependant nécessaires.

- L'ingénieur peut choisir l'anisotropie élastique dont il a besoin.
- Par exemple, une grande rigidité dans une direction et une plus faible dans les autres
- Attention, rigidité et résistance ne sont pas les mêmes choses. . .

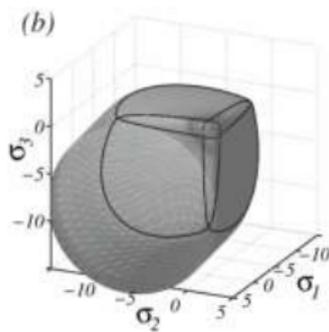


- Nous allons maintenant étudier la résistance, ou plus précisément le domaine de contraintes ou de déformations, dans lequel le matériau a un comportement élastique linéaire.
- Cela inclut la réversibilité : le fait que le matériau ne se dégrade pas
- et la convexité de l'énergie : pas d'évolution à effort constant ou décroissant (ruine)

Limite de linéarité

Jeanneau, Combescure, François, *Homogenized elasticity and domain of linear elasticity of 2D architected materials*, IJSS, [2023]

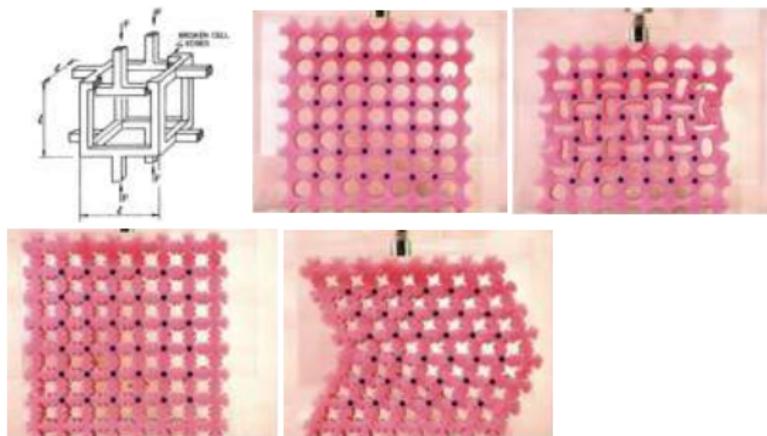
- En 1D, le domaine d'élasticité est un segment : $-\sigma_y < \sigma < \sigma_y$, en contraintes, ou en déformation : $-\sigma_y/E < \varepsilon < \sigma_y/E$
- En 2D ou en 3D, le domaine d'élasticité est un domaine compact dans l'espace des tenseurs du 2nd ordre, contenant O



Ex. : surface limite d'élasticité d'un béton (François, CRAS [2008])

Nous avons vu en introduction que le domaine élastique des matériaux architecturés étaient limité par :

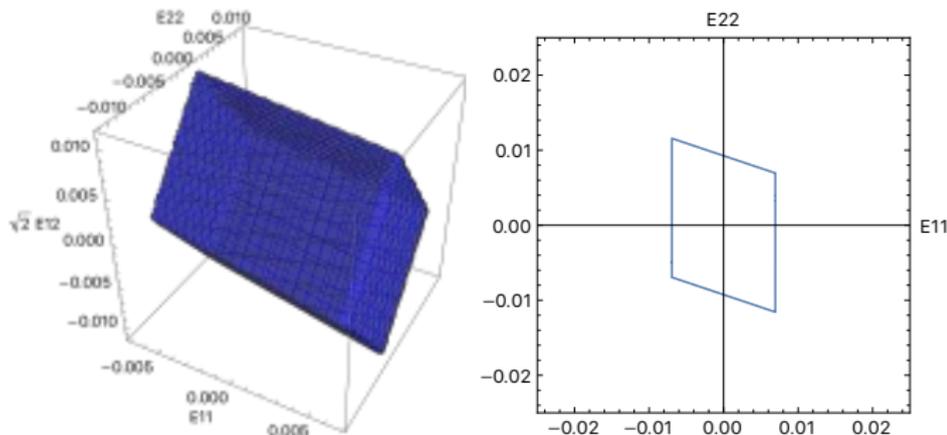
- la limite d'élasticité du matériau constitutif des poutres
- l'apparition d'un flambement périodique
- l'apparition d'un flambement apériodique



[Gibson et Ashby, 1997], [Overvelde, 2012]

Limite de linéarité matérielle

- Le calcul d'homogénéisation donne les contraintes dans les barres
- Limite d'élasticité retenue pour les poutres : $-\sigma_y < \sigma < \sigma_y$.
- Espace des déformations (macroscopiques) est exploré suivant $\varepsilon = \lambda \mathbf{e}$ où \mathbf{e} est une direction normée fixée et λ le facteur de charge



Domaine obtenu pour un architecturé triangulaire équilatéral (D6)

Limite de flambement périodique

- L'instabilité de flambement apparait lorsque un incrément de déplacement peut être obtenu à puissance nulle.
- Il faut introduire une cinématique enrichie, en grand déplacement.
Soit, pour une poutre en 2D :

$$W = \frac{1}{2} \int (ESu'(x)^2 + EI_z v''(x)^2 + Nv'(x)^2) dx$$

Ex., pour le problème d'Euler :

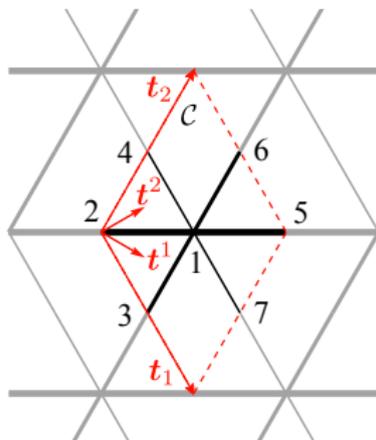
$$u = \varepsilon x \implies u' = \varepsilon = N/ES$$

$$v = v_0 \sin(\pi x/L)$$

$$\partial W / \partial v_0 = 0 \implies N = -\pi^2 EI / L^2$$



Pour l'architureré, le calcul se fait sur une cellule unitaire :



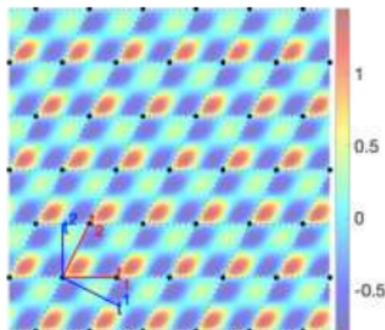
- La cellule est choisie pour couvrir l'espace et ne passe par un nœud physique.
- L'instabilité apparaît lorsqu'il existe une possibilité de déplacement U (généralisé), sans énergie : $U.K.U = 0$, où K est la matrice tangente (symétrique), donc si :

$$\det(K) = 0$$

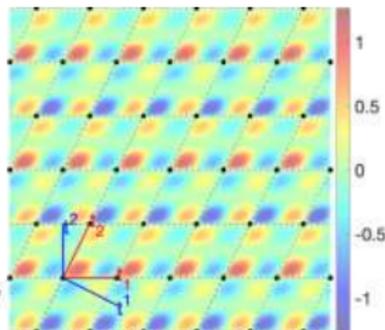
Des conditions de périodicité sont imposées aux nœuds (2...7) : le champ est

- un champ homogène (Cauchy-Born) de type $\varepsilon \cdot \vec{X}$
- + (pré-flambement) : un champ $V(\vec{X})$ qui a la périodicité du réseau.
- en configuration flambée : on module V par une onde de Bloch, de vecteur d'onde $\vec{\eta}$ inconnue :

$$U(\vec{X}) = V(\vec{X}) \cos(2\pi\vec{\eta} \cdot \vec{X})$$



Champ V

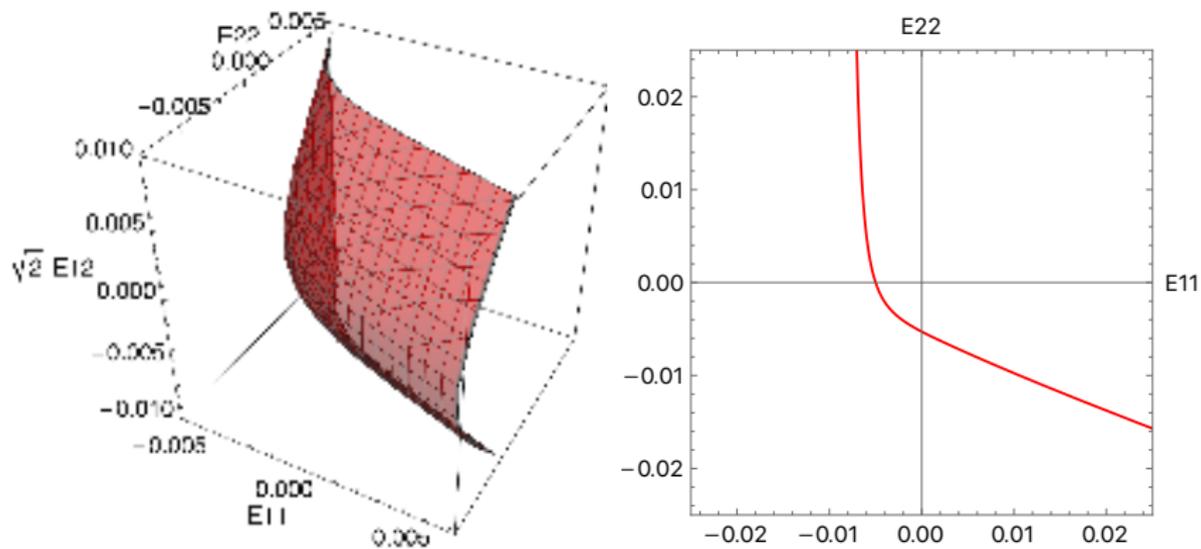


Champ U avec $\vec{\eta} = (0, 1/2)$

Stratégie de recherche [Geymonat et col., 1993], [Triantafyllidis et Schraad, 1998], [Bordiga et col., 2021] :

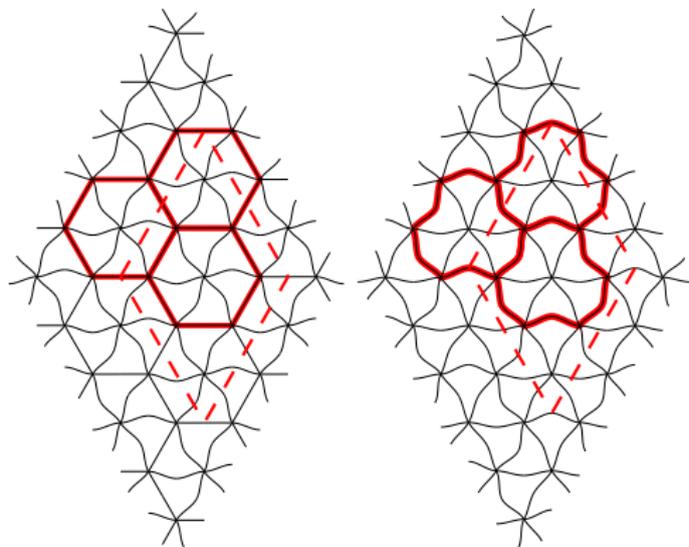
- pour une direction de déformation \mathbf{e} normée
- on cherche le facteur de charge λ tel que $\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \mathbf{e}$ qui annule le déterminant de K . Pour cela :
 - ▶ on calcule les efforts normaux N_i dans les barres avec le modèle de petites perturbations
 - ▶ on en déduit la matrice tangente K , en grande transformations, dans laquelle N intervient.
 - ▶ on calcule le déterminant $\det(K)$.
 - ▶ on en déduit le λ minimal pour lequel $\det(K) = 0$
- éventuellement, on étudie le ou les "vecteur propre" U , qui contiennent l'information sur le mode de flambement

Pour l'architureré 2D à maille triangulaire, on obtient :



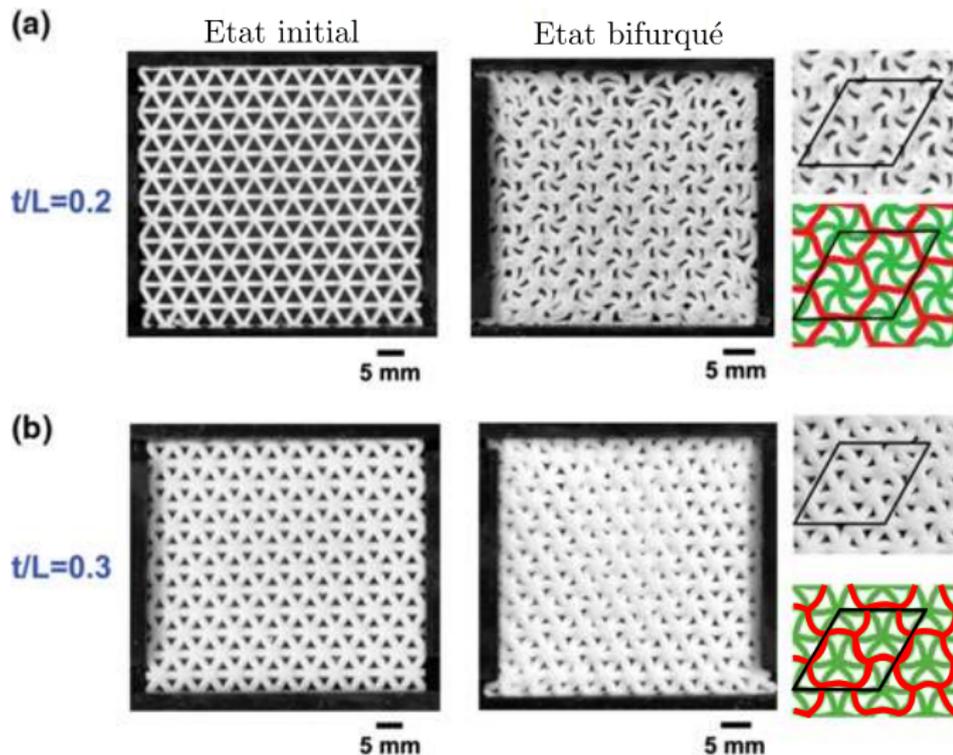
État limite en bi-compression $\sigma_{11} = \sigma_{22} < 0$ et $\sigma_{12} = 0$ obtenu pour pour $\eta = (1/3, 1/3)$.

Le mode de flambement est donné par le vecteur propre U de K et une projection utilisant la théorie des groupes (Combescure [2016])...
 Pour la bi-compression on a deux VP nulles, donc deux modes :



Modes de flambement chiral Z_6 et D_3 . Motif 3×3 : - - -

Le générateur du groupe de papier peint (ici $3\vec{t}_1, 3\vec{t}_2$) est donné par le vecteur d'onde (ici $\eta = (1/3, 1/3)$).

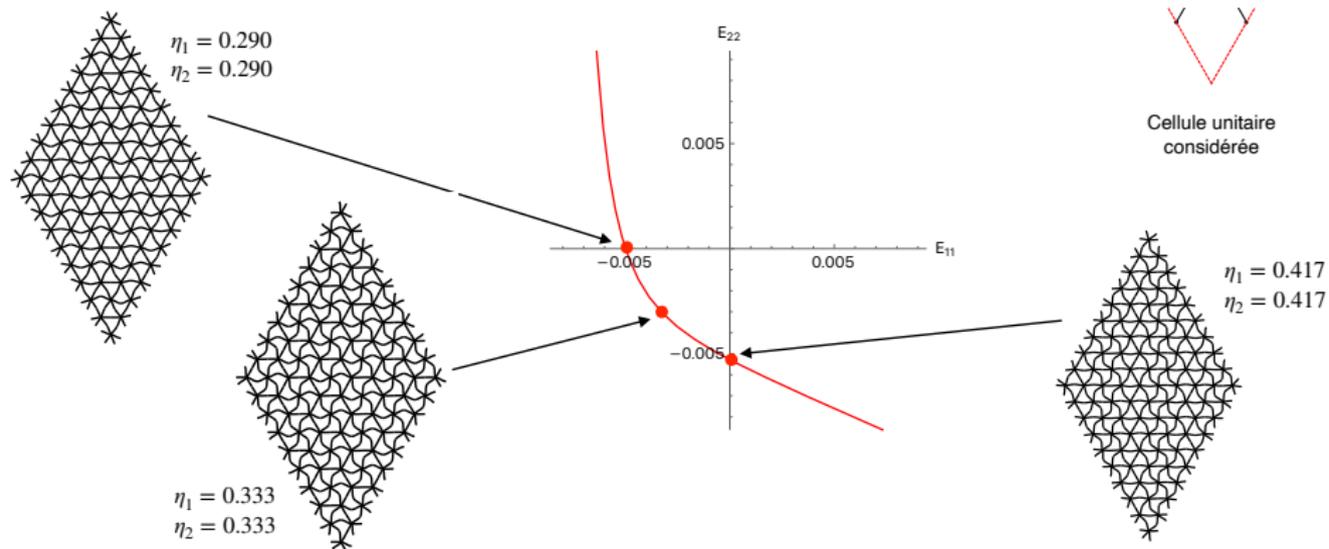


Comparaison avec les résultats de Kang [2014]

Vérifiez vous-même !

Pour la majorité des chargements, on trouve des η_i non triviaux ($\neq 1/3, 2/3, 4/5 \dots$). Compte tenu de l'imprécision numérique, cela peut correspondre à :

- de très grandes longueurs d'onde. Par exemple $\eta \simeq (0,71039; 0,71031)$ correspond à une périodicité de (547, 434) cellules. . .
- des longueurs d'ondes non entières, prévues par Truskinovski [2005]

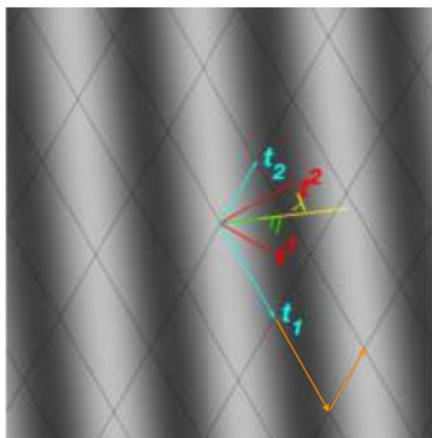


Condition de périodicité finie

- $\cos(2\pi\vec{\eta} \cdot \vec{X})$ a un vecteur d'onde $\vec{\eta}$ et une longueur d'onde $\lambda = 1/\|\vec{\eta}\|$
- elle est périodique sur un nombre fini de cellules si :

$$\vec{\eta} \cdot \overrightarrow{\Delta X} = n \in \mathbb{N}$$

$$\overrightarrow{\Delta X} = k^i \vec{t}_i, \quad \{k^i \in \mathbb{Z} - \{0, 0\}\}$$



Ici $\vec{\eta} = (1/3, 1/3)$, pour $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$, $n = 1$, on saute d'un plan d'onde

Condition de périodicité sur un nombre fini de cellules :

$$\eta_1 k^1 + \eta_2 k^2 = n \in \mathbb{N}, \quad \{k^i \in \mathbb{Z} - \{0, 0\}\}$$

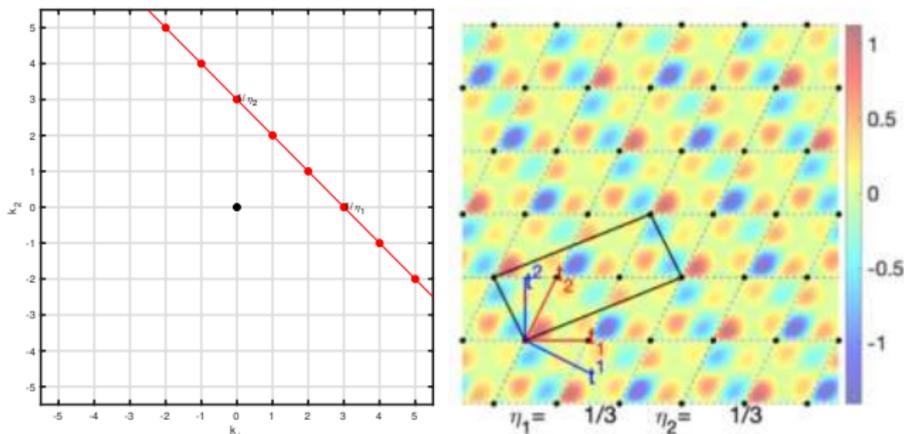
Ce qui est une équation de droite à coefficient réels (η_1, η_2) dont on cherche à savoir si elle passe par des points entiers $(k^1, k^2) \neq (0, 0)$.

Remarques :

- Il faut deux vecteurs indépendants $\overrightarrow{\Delta X} = (k^1, k^2)$ pour définir le motif, donc le groupe de papier peint
- (η_1, η_2) sont les coordonnées covariantes de $\vec{\eta}$
- (k^1, k^2) les coordonnées contravariantes de $\overrightarrow{\Delta X}$

Cas triviaux :

- si $1/\eta_1 + 1/\eta_2 = 1 \implies (k^1, k^2) = (1, 1)$ solution.
- si $\vec{\eta} = (1/p, 1/q) \implies (k^1, k^2) = (p, 0), (0, q)$ solutions.



Cas $\vec{\eta} = (1/3, 1/3)$ et $n = 1$: critère (à g.) et fonction (à d.)

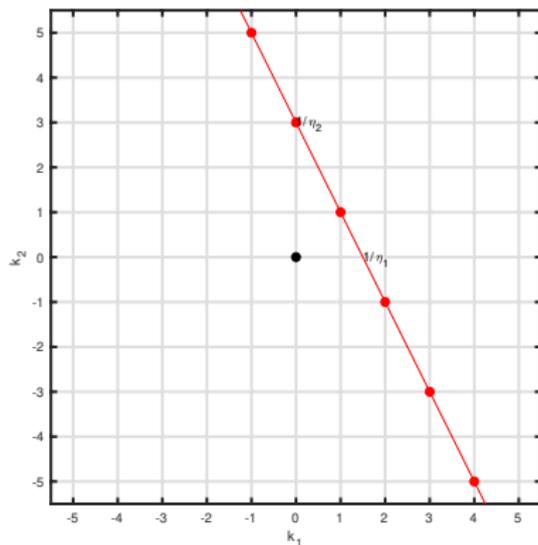
$$1/3 \times 3 + 1/3 \times 0 = 1$$

$$1/3 \times 0 + 1/3 \times 3 = 1$$

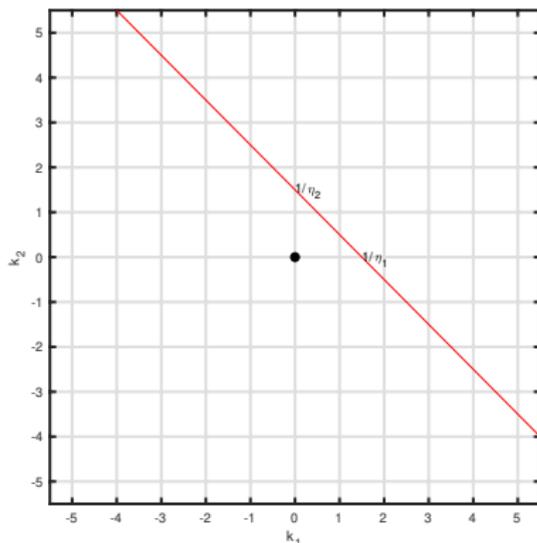
$$1/3 \times 2 + 1/3 \times 1 = 1 \quad (\text{grand côté})$$

$$1/3 \times -1 + 1/3 \times 1 = 0 \quad (\text{petit côté, dans le plan d'onde})$$

$$1/3 \times 3 + 1/3 \times 3 = 2 \quad (\text{passe 2 plans d'onde})$$



Cas $\vec{\eta} = (2/3, 1/3)$



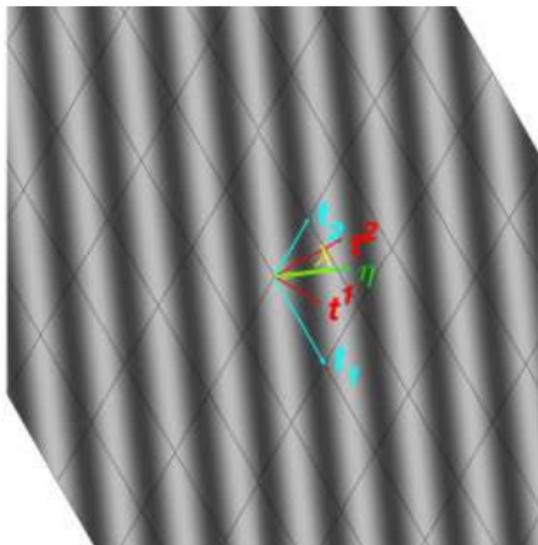
Cas $\vec{\eta} = (2/3, 2/3)$

Remarque : la droite est à -45 degrés, comme pour $(1/3, 1/3)$, mais hors des valeurs entières. Il n'existe pas de solution pour $n = 1$.

Mais il existe des solutions pour $n = 2$:

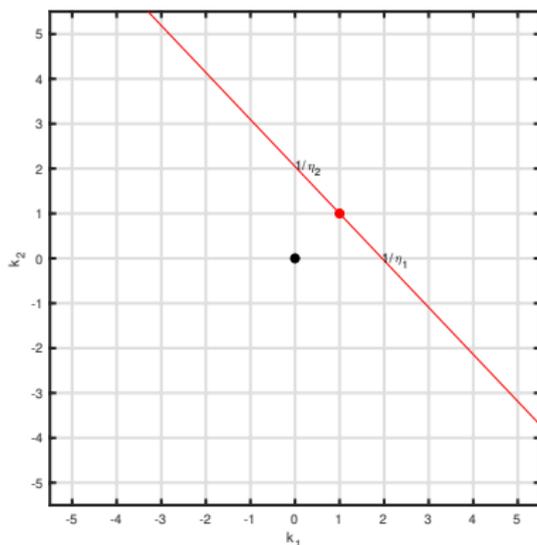
$$2/3 \times 0 + 2/3 \times 3 = 2$$

$$2/3 \times 3 + 2/3 \times 0 = 2$$



Par ce chemin entier, on saute au second plan d'onde.

Cas avec une seule solution (je pense) $\eta = (\pi/(\pi + 3), 3/(\pi + 3))$, où donc on ne peut pas définir de cellule.



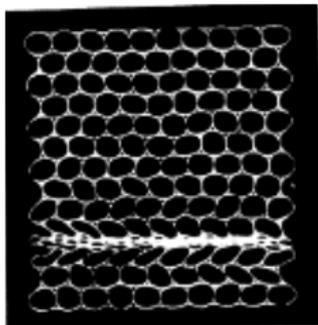
- Une analyse mathématique plus poussée ?
- Cependant la distinction rationnel / irrationnel n'a pas de sens en calcul numérique. . .

Limite de flambement apériodique

Le flambement apériodique : bandes de localisation ou flambement global de la structure [Santisi d'Avila et col., 2016].

Pour une normale \vec{n} donnée, critère de « convexité de rang un » [Elliott et col., 2006 ; Kang et col., 2014], ou « critère d'ellipticité forte » [Truesdell et Noll, 2004], équivalent ici au critère de [Mandel, 1966 ; Rice, 1976] :

$$\det(n_j H_{ijkl} n_l) = 0$$



Bande de localisation [Paka et Kiriakides, 1999]

On recherche, pour une déformation macro de direction \mathbf{e} donnée, la direction \vec{n} qui donne le facteur de charge λ minimal pour lequel une VP tombe à 0.

Remarque : Elliott et coll. [2006] ont montré que le flambement apériodique était aussi détecté par la méthode proposée pour le flambement périodique, pour $\|\eta\| \rightarrow 0$.

Domaine de linéarité

- Le domaine de linéarité final résulte de l'intersection des trois domaines obtenus.
- C'est l'espace des contraintes ou des déformations dans lequel le matériau a un comportement élastique linéaire, le domaine utilisable dans une structure.

Pour l'architecture 2D équilatérale étudié ($L/D = 10$), on obtient :

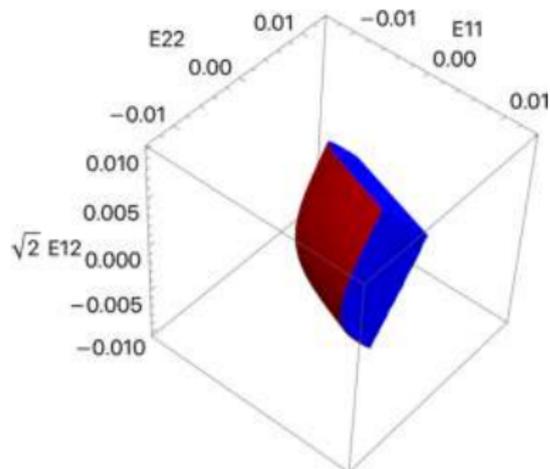
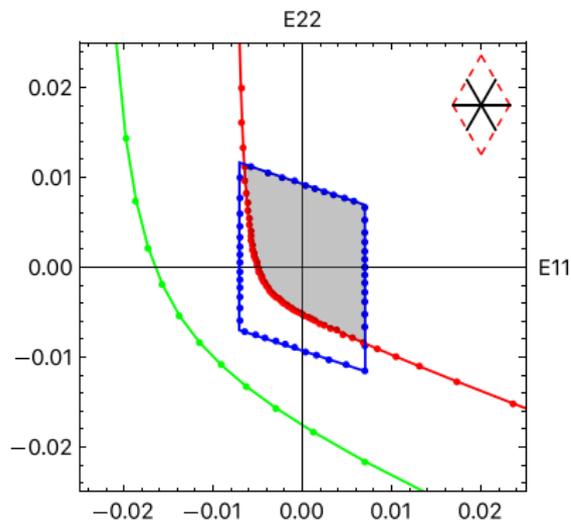


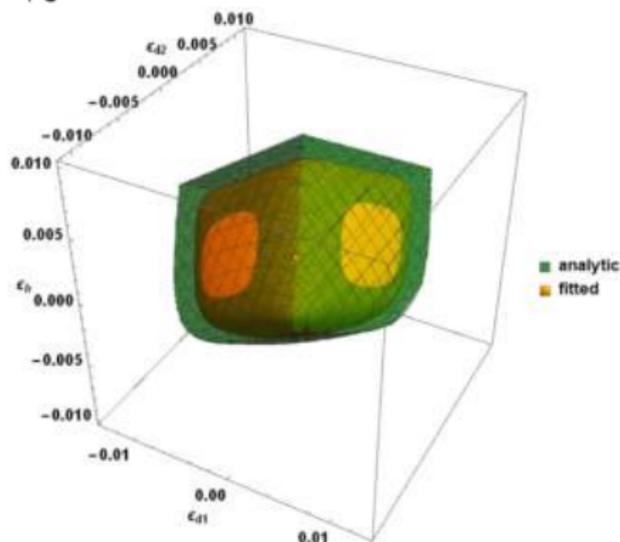
Fig. 10. Domain of linear elasticity for the equilateral triangle lattice limited by material non linearity limit surface (■) and the periodic buckling limit surface (■)

Limites d'élasticité des poutres (bleu), d'apparition des flambements périodiques (rouge) et aperiodiques (vert)

On remarque que, dans ce cas, le flambement aperiodique n'est jamais atteinte.

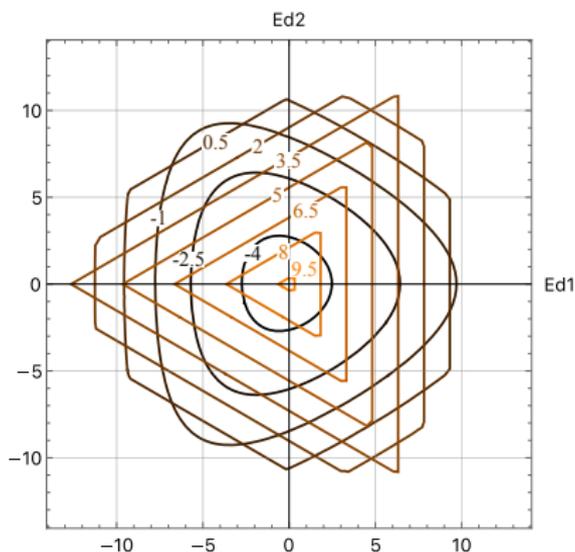
Ce domaine, obtenu numériquement, est difficile à utiliser pour l'ingénieur. Nicolas Auffray et Nassim Kesmia ont proposé un approximant :

$$F(\underline{\sigma}) = \underset{\approx}{\mathbb{A}} \cdot (\underline{\sigma} \otimes \underline{\sigma} \otimes \underline{\sigma} \otimes \underline{\sigma}) + \underset{\approx}{\mathbb{B}} \cdot (\underline{\sigma} \otimes \underline{\sigma} \otimes \underline{\sigma}) + \underset{\approx}{\mathbb{C}} :: (\underline{\sigma} \otimes \underline{\sigma}) + \underset{\approx}{\mathbb{D}} : \underline{\sigma},$$



extension du critère de Tsai-Wu classiquement utilisé pour les composites.

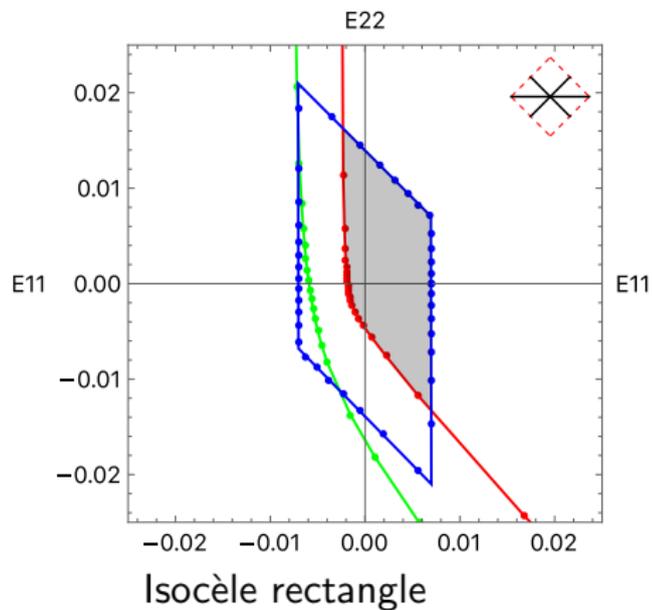
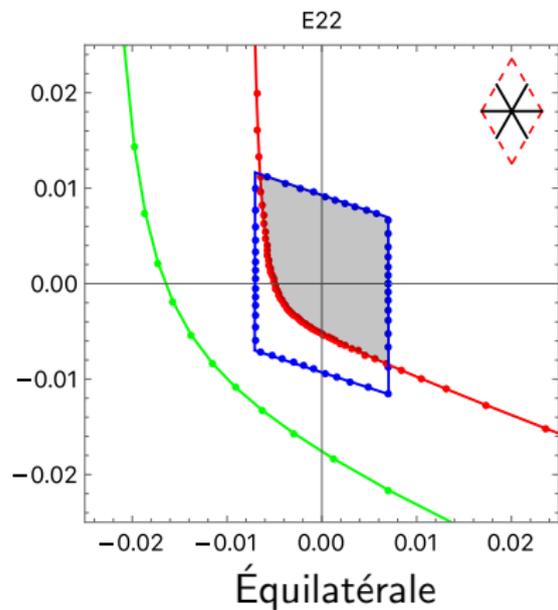
Nassim a aussi remarqué que, projeté dans l'espace déviatorique, la surface du domaine possède une intéressante symétrie $D3$. Nicolas explique cela par la nature des covariants. . .



$$\mathbf{E}_{D1} = (E_{11} - E_{22})/\sqrt{2} \quad \mathbf{E}_{D1} = \sqrt{2}E_{12} \quad \mathbf{E}_H = (E_{11} + E_{22})/\sqrt{2}$$

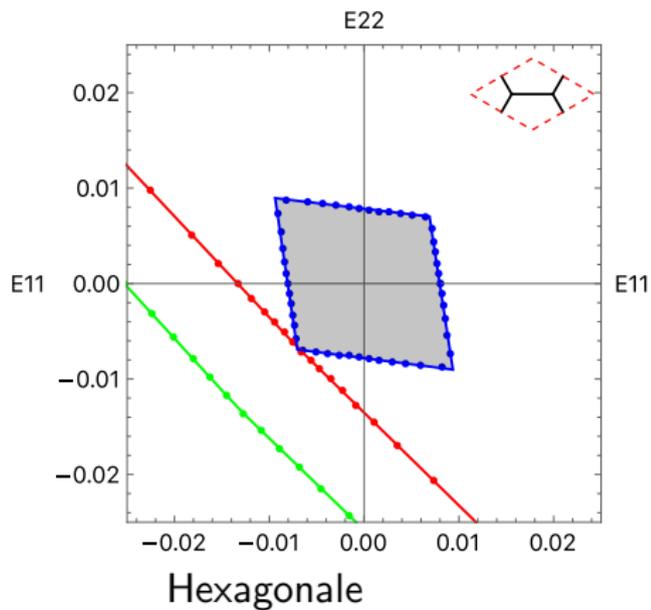
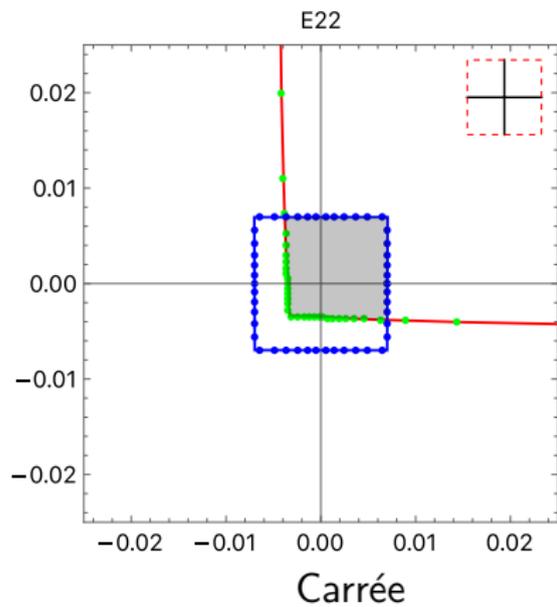
Autres cas traités

Mailles triangulaires 2D



Autres cas traités

Autres mailles 2D

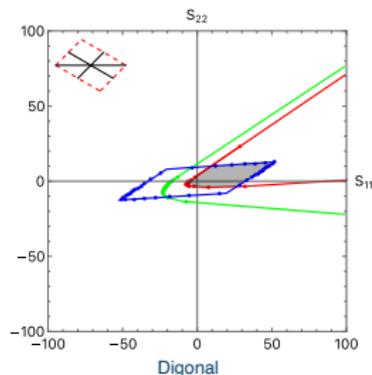
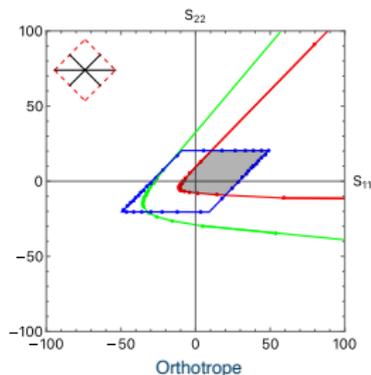
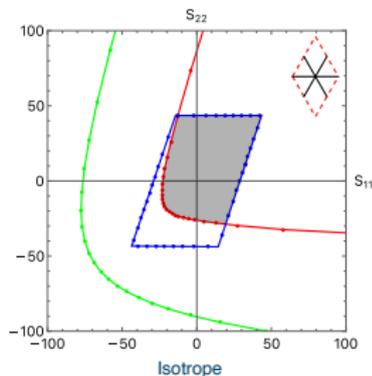


Dans l'espace des contraintes

- Influence de la géométrie
- Même densité relative

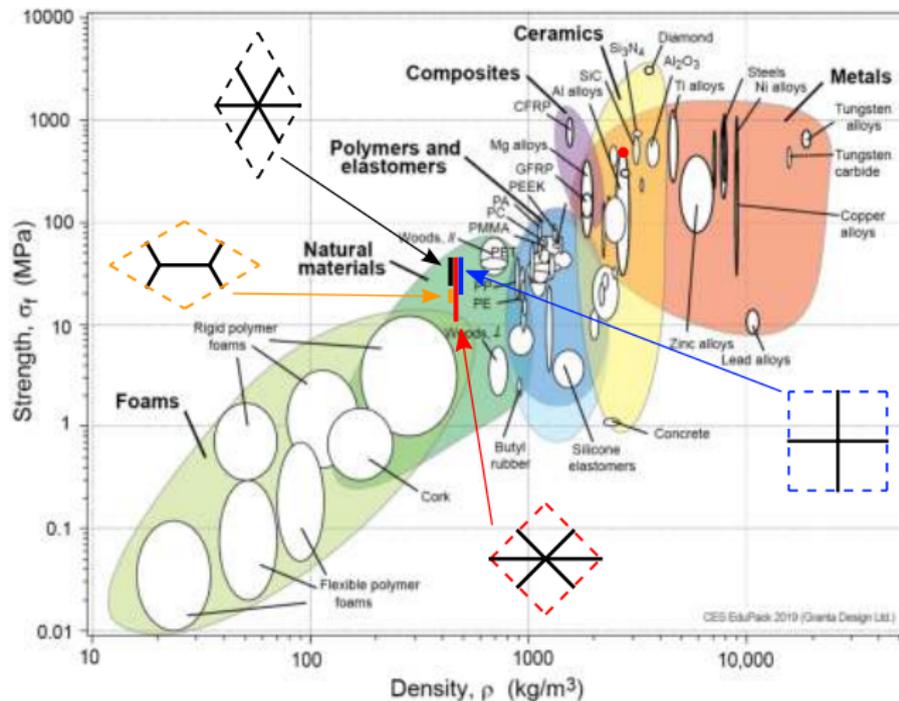
$$E = 72 \text{ GPa}, \sigma_e = 500 \text{ MPa}$$

- Instabilités périodiques
- Instabilités aperiodiques
- Non linéarité matériau constitutif

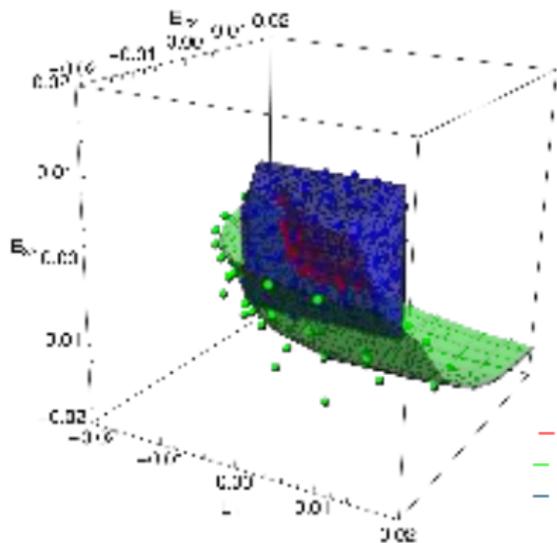
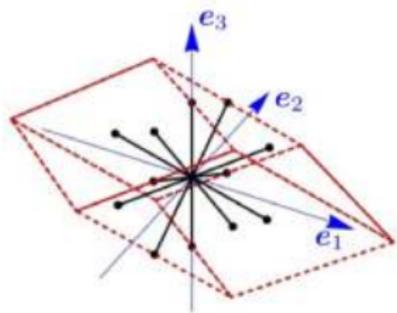


le volume du domaine semble maximal pour la maille isocèle. . .

En utilisant de l'aluminium comme matériau constitutif, on arrive (sans optimisation particulière) à obtenir les performances d'un bois, en sens // aux fibres.



Maille tétraédrique 3D



Conclusions

Pour les matériaux architecturés de type treillis de poutres avec des cellules unitaires simple, nous pouvons calculer :

- les tenseurs d'élasticité du MHE, analytiquement
- les surfaces limite de linéarité, par des calculs numériques
- nous avons pu simuler d'autres géométries 2D (hexagone, carré, ...)
- nous avons pu effectuer des calculs sur les architecturés 3D tétraédriques

Perspectives

Hormis les classiques enrichissements (critères plus complexes, prise en compte de la fatigue, cinématiques plus élaborées. . .), il faudrait :

- des solutions purement analytiques, des calculs plus directs. . .
- traiter des architecturés quasi-périodiques (ex. pavages de Penrose [Réthoré]). ANR QuBasE (G. Rosi) hélas pas passée.
- traiter des architecturés à structure fractale [Eiffel, 1889 !]
- traiter des architecturés cellulaires. . .

