Rationalité des formes normales de strates d'isotropies attachées aux représentations linéaires d'un groupe de Lie compact

Julien GRIVAUX

Sorbonne Université

Journées du GDR "géométrie différentielle et mécanique", La Rochelle

Travail en commun avec P. Azzi, R. Desmorat et B. Kolev

28 juin 2023

Plan

Présentation du cadre géométrique

Isotropie et classes de symétrie

G un groupe de Lie compact, V espace vectoriel réel

$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire continue de G

Définition

Un sous-groupe de Lie H de G est un sous-groupe d'isotropie si $H = G_v$ pour un certain vecteur v de V

Deux vecteurs de v dans la même orbite ont des groupes d'isotropie conjugués : $G_{g.v} = g\, G_v\, g^{-1}$

Définition

Une classe de symétrie pour ρ est une classe de conjugaison de groupe d'isotropie.

Présentation du cadre géométrique

Stratification d'isotropie

On dispose du résultat de finitude suivant :

Théorème

L'ensemble des classes de symétrie d'une représentation d'un groupe de Lie compact est fini.

Il est alors possible de partitionner V en strates d'isotropie.

Définition

Si H est un sous-groupe d'isotropie, on définit la strate Σ_H comme les points de V d'isotropie *conjuguée* à H

Les strates d'isotropies sont des sous-variétés G-invariantes de V, qui partitionnent l'espace selon les différentes symétries possibles

On considère l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur les matrices symétriques 3×3 par conjugaison, soit $\rho(g).M = gMg^{-1} = gMg^T$

On a alors 3 classes d'isotropie :

- La classe générique $[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2]$, correspondant à l'isotropie d'une matrice symétrique diagonalisable avec 3 valeurs propres distinctes
- La classe $[\mathrm{O}(2)]$, correspondant à l'isotropie d'une matrice diagonalisable avec exactement 2 valeurs propres égales
- La classe $[\mathrm{SO}(3)]$, correspondant à l'isotropie de toutes les matrices proportionnelles à l'identité.

Présentation du cadre géométrique

Strates fermées

Pour des raisons techniques, il est parfois préférable de considérér les strates fermées $\overline{\Sigma}_H$, qui sont l'adhérence des strates ouvertes. On peut montrer la description suivante :

Proposition

Si H est un groupe d'isotropie, $\overline{\Sigma}_H$ est l'ensemble des points de V dont l'isotropie contient un conjugué de H

- En d'autres termes, $\overline{\Sigma}_H$ est formé des points de classe d'isotropie *au moins* H, à conjugaison près
- Les strates fermées sont également G-invariantes mais ne sont plus en général des sous-variétés de V

Présentation du cadre géométrique

Formes normales

Pour comprendre cet strates, on introduit la notion de forme normale, qui correspond à travailler avec un représentant de la classe de symétrie.

Définition

Si H est un sous-groupe isotropie, V^H est le sous-espace vectoriel des éléments de V fixés par H

On note Ω_H l'ensemble des points d'isotropie exactement H, c'est un ouvert de V^H

- Σ_H (resp. $\overline{\Sigma}_H$) est l'orbite de Ω_H (resp. V^H).
- Le groupe de monodromie $\Gamma_H = \mathrm{N}(H)/H$ agit linéairement sur V^H et laisse stable Ω_H
- On a une bijection $\Sigma_H/G \overset{\sim}{\longleftarrow} \Omega_H/\Gamma_H$

Présentation du cadre géométrique

Formes normales - exemple

On reprend l'exemple précédent, avec par exemple $H = \mathrm{O}(2)$.

- $V^{\mathrm{O}(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \right\}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\Omega_{\mathrm{O}(2)} = V^{\mathrm{O}(2)} \cap \{\lambda \neq \mu\}$, $\Gamma_{\mathrm{O}(2)} = \{e\}$
- Les martices symétriques à symétrie $\mathrm{O}(2)$ sont donc paramétrées par leur forme normale, donc par $\Omega_{\mathrm{O}(2)}$
- La strate $\overline{\Sigma}_{\mathrm{O}(2)}$ se décrit explicitement par l'équation algébrique

$$\{M \in \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}), \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 = 0\}$$

où $P_{\mathrm{car}}(M) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$

Le but de l'étude est de répondre aux deux problèmes suivants :

(A) Comment peut-on décrire l'orbite d'un point de V, et quelle structure a-t-elle ?

(B) Comment peut-on décrire la strate fermée $\overline{\Sigma}_H$, et à nouveau quelle structure a-t-elle ?

- Le problème (A) est très bien compris théoriquement, et nous servira de guide pour le problème (B).
- Le problème (B) revient à classifier les vecteurs de V ayant symétrie *au moins* H.
- Application mécanique : $G = \mathrm{SO}(3)$, classification de tenseurs ayant une symétrie donnée.

Algébricité des groupes compacts et orbites

Un petit résumé

- On considérera toujours un groupe de Lie compact comme groupe de matrices, c.-à-d. comme sous-groupe d'un $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
- Dans cette section, on va voir que toutes les orbites de représentations de groupes compacts sont des *ensembles algébriques*
- En particulier, un groupe de Lie compact est lui-même est un ensemble algébrique
- Enfin, on expliquera dans la section suivante que toute représentation continue d'un groupe de Lie compact est automatiquement polynômiale, c'est-à-dire que ses coefficients sont des restrictions de polynômes sur $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$

V espace vectoriel réel de dimension finie

Définition

Un fermé de Zariski de V, aussi appelé ensemble algébrique, est un sous-ensemble de V de la forme $\{v \in V, P(v) = 0 \text{ si } P \in S\}$, où S est un ensemble quelconque de polynômes.

- Comme tout idéal de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ est de type fini, on peut choisir S fini dans la définition
- Les fermés de Zariski définissent une topologie (appelée topologie de Zariski)
- Les ouverts de Zariski non vides sont denses pour la topologie usuelle

On considère toujours G un groupe de Lie compact muni d'une représentation continue ρ sur un espace vectoriel réel V.

Définition

Étant donné (G, V, ρ), on note $\mathbb{R}[V]^G$ l'algèbre des polynômes sur V qui sont G-invariants.

L'un des résultats fondamental de la théorie est le suivant :

Théorème (Hilbert)

L'algèbre $\mathbb{R}[V]^G$ est une algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments.

Ceci signifie que tout invariant sur V s'exprime comme un polynôme en un nombre fini d'invariants $J_1, \ldots, J_N$

Algébricité des groupes compacts et orbites

Séparation des orbites (1)

Théorème (Séminaire Bourbaki 1968, Abud-Sartori 1983, ...)

Étant donné (G, V, ρ), *les polynômes invariants séparent les orbites de la représentation*

Démonstration.

Par le théorème de densité Weierstrass, il existe un polynôme P qui est inférieur à $1/3$ sur une orbite et supérieur à $2/3$ sur une autre.

On applique ensuite l'opérateur de moyennisation (aussi appelé opérateur de Reynolds)

$$R\colon \mathscr{C}(V, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^G(V, \mathbb{R})$$

qui fournit un polynôme avec les mêmes propriétés. $\square$

Algébricité des groupes compacts et orbites

Séparation des orbites (2)

Corollaire (1)

Les orbites de ρ sont des ensembles algébriques

Démonstration.

Soit $\mathcal{O}$ une orbite. Pour tout point y hors de $\mathcal{O}$, il existe un polynôme P_y tel que P_y est nulle sur $\mathcal{O}$ et $P_y(y) \neq 0$.

On a alors $\mathcal{O} = \{v \in V, \forall y \notin \mathcal{O}, P_y(v) = 0\}$ donc $\mathcal{O}$ est bien un ensemble algébrique $\square$

À l'aide des invariants, on peut trouver des équations algébriques explicites en écrivant

$$\mathcal{O}_x = \{v \in V, \forall k \in [\![1, N]\!], J_k(v) = J_k(x)\}$$

Algébricité des groupes compacts et orbites

Séparation des orbites (3)

Corollaire (2)

Le groupe G est un ensemble algébrique dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$

Démonstration.

On considère la représentation de G sur $\mathrm{End}\,(\mathbb{R}^n)$ donnée par multiplication à gauche. Le groupe G est l'orbite de l'identité

Il suffit alors d'appliquer le corollaire 1 à cette représentation □

En fait la structure algébrique de G est encore bien plus forte : les point de G sont les points réels d'un groupe algébrique réel (même encore mieux, d'un schéma en groupes sur $\mathbb{R}$)

Le problème de trouver un espace qui paramètre les orbites est plus compliqué, mais il est totalement résolu

On considère

$$\begin{aligned} \sigma \colon V/G &\to \mathbb{R}^N \\ v &\mapsto (J_1(v), \ldots, J_N(v)) \end{aligned}$$

- σ est un homéomorphisme sur son image
- La connaissance des invariants permet de déterminer si deux points sont dans une même orbite
- L'image de σ est incluse dans un ensemble algébrique naturel, qui est l'ensemble algébrique Z défini par les relations entre les J_k

Algébricité des groupes compacts et orbites

Matrice de Gram

- On considère la matrice

$$\widetilde{G}(v) = \left(\langle \nabla J_k(v) \,|\, \nabla J_\ell(v) \rangle\right)_{1 \leq k, \ell \leq N}$$

pour un produit scalaire invariant

- Comme $\nabla J_k(g.x) = g.\nabla J_k(x)$, les coefficients de $\widetilde{G}(v)$ sont invariants, donc s'expriment comme polynomes en les invariants J_q
- On en déduit qu'on peut écrire

$$\widetilde{G}(v) = G(\sigma(v))$$

pour une matrice G à coefficients polynomiaux en N variables appelée matrice de Gram

Algébricité des groupes compacts et orbites

Image de l'application classifiante

Théorème (Procesi, Schwarz 1985)

L'image de σ consiste en les points de Z où la matrice de Gram est positive.

- La positivité de la matrice de Gram sur l'image a été découverte par Abud et Sartori : si $z \in \mathbb{R}^N$ s'écrit $\sigma(v)$, alors

$$X^T G(z) X = X^T G(\sigma(v)) X = X^T \widetilde{G}(v) X = \left\| \sum_k X_k \nabla J_k(v) \right\|^2$$

- L'image de σ est un ensemble *semi-algébrique*, c.-à-d. défini à l'aide d'un nombre fini d'égalités et d'inégalités polynomiales

Algébricité des groupes compacts et orbites

Un exemple (I)

On fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur le plan $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

- Les invariants sont

$$\begin{cases} p = \sigma_2 = -x^2 - y^2 - xy \\ q = \sigma_3 = -x^2y - xy^2 \end{cases}$$

- On prend p pour produit scalaire invariant, de sorte que

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^{-1} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- On a

$$\nabla p = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla q = 2/3 \begin{pmatrix} x^2 - 2y^2 - 2xy \\ y^2 - 2x^2 - 2xy \end{pmatrix}$$

Algébricité des groupes compacts et orbites

Un exemple (II)

- On en déduit

$$\widetilde{G}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4(x^2+y^2+xy) & 6(xy^2+x^2y) \\ 6(xy^2+x^2y) & 4/3(x^2+y^2+xy)^2 \end{pmatrix}$$

- La matrice de Gram peut donc s'exprimer très simplement par la formule

$$G(p,q) = \begin{pmatrix} 4p & 6q \\ 6q & 4p^2/3 \end{pmatrix}$$

- On a $\det G(p,q) = \frac{4}{3}(4p^3 - 27q^2)$, on retrouve donc la condition $4p^3 - 27q^2 \geq 0$ pour que le polynôme $X^3 - px + q$ ait toutes ses racines réelles

Coefficients matriciels et algébricité des représentations

Programme des réjouissances

- Dans cette partie, on va expliquer pourquoi les représentations de groupes compacts sont polynomiales (c.-à-d. que les coefficients matriciels sont des polynômes en les coefficients de la matrice)
- Ce résultat doit être pensé comme un analogue du théorème GAGA (Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique de Serre) au sens où la compacité force l'algébricité
- Grâce au théorème de Tarski-Seidenberg, on pourra en déduire que la majorité des objets que l'on considère (comme les strates fermées) sont semi-algébriques
- Enfin on verra les limites de cette approche à l'aide d'exemples concrets

On rappelle que la représentation régulière de G est $(\mathscr{C}^0(G,\mathbb{R}), L)$ où $L(g)(f)(h) = f(g^{-1}h)$

Définition

On définit une fonction coefficient de G de la manière comme une fonction de G dans $\mathbb{R}$ qui est un coefficient matriciel d'une représentation linéaire de dimension finie de G

- De manière équivalente, une fonction coefficient f est une fonction telle que la sous-représentation $\langle f \rangle$ de $(\mathscr{C}^0(G,\mathbb{R}), L)$ engendrée par f est de dimension finie
- Les fonctions coefficients forment une algèbre $\mathcal{A}(G,\mathbb{R})$
- Exemple : si $G = \mathbb{S}^1$, les fonctions $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des fonctions coefficients, ainsi donc que tous les polynômes trigonométriques.

Proposition

Si M est une sous-représentation de $\mathcal{A}(G,\mathbb{R})$, alors M est fermé dans $\mathcal{A}(G,\mathbb{R})$ pour la norme $||\,.\,||_\infty$

Démonstration.

Pour toute représentation irréductible λ de G, si $(V_\lambda, \rho_\lambda)$ est la représentation associée, on a une application injective

$$\begin{aligned} V_\lambda \otimes V_\lambda^* &\to \mathcal{A}(G,\mathbb{R}) \\ v \otimes \varphi &\mapsto (g \mapsto \varphi(\rho_\lambda(g)(v))) \end{aligned}$$

On note S_λ l'image de la représentation précédente, c'est la composante λ-isotypique de $\mathcal{A}(G,\mathbb{R})$. $\square$

Démonstration (suite).

On peut alors décomposer M en composantes isotypiques

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}\,(G)}^{\perp} M \cap S_{\lambda}$$

Les projecteurs sur les M_{λ} sont continus pour la norme L^2 par les relations d'orthogonalité de Schur. De plus les M_{λ} sont de dimension finie.

On en déduit que M est fermé dans $\mathcal{A}(G, \mathbb{R})$ pour $||.||_2$, donc également pour $||.||_{\infty}$. $\square$

Corollaire

Si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$*, les fonctions coefficients* $g \mapsto c_{ij}(g)$ *engendrent* $\mathcal{A}(G, \mathbb{R})$

Démonstration.

La sous-algèbre A engendrée par les fonctions $g \mapsto c_{ij}(g)$ sépare les points et contient les constantes. Par le théorème de Stone Weierstrass, elle est dense dans $\mathcal{C}^0(G, \mathbb{R})$ pour la norme $||\,.\,||_\infty$. Comme A est G-invariante, la proposition précédente implique que $A = \mathcal{A}(G, \mathbb{R})$. □

Exemple

L'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ est l'algèbre des polynômes trigonométriques $\mathbb{R}[\cos\theta, \sin\theta]$

Coefficients matriciels et algébricité des représentations

Le théorème d'algébricité

Théorème

Si (V, ρ) est une représentation de $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, alors les coefficients de ρ sont des restrictions de polynômes sur $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ à G.

Démonstration.

Les coefficients de ρ sont des fonctions coefficients, donc dans $\mathcal{A}(G, \mathbb{R})$. Ce sont donc des polynômes en les fonctions $g \mapsto c_{ij}(g)$, d'où le résultat. $\square$

On voit donc que non seulement le groupe G est un ensemble algébrique dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, mais de surcroît toute représentation de G est à nouveau algébrique et même polynomiale

L'approche que l'on a présenté permet de retrouver par une approche différente (plus difficile) l'algébricité de G.

Théorème (dualité de Tannaka)

Le groupe G est l'ensemble algébrique donné par l'idéal des relations entre les fonctions coefficients $g \mapsto c_{ij}(g)$

Nous ne donnerons pas la preuve de ce théorème ici, elle nous entraînerait trop loin. L'idée est essentiellement une idée de bidualité : il s'agit de montrer que tous les caractères de l'algèbre $\mathcal{A}(G, \mathbb{R})$ sont les évaluations en un point de G.

Coefficients matriciels et algébricité des représentations

Bonus : dualité de Tannaka (II)

Exemple

Pour $G = \mathbb{S}^1$, l'idéal des relations entre les 4 fonctions

$$c_{11} = \cos\theta \quad c_{21} = \sin\theta \quad c_{12} = -\sin\theta \quad c_{22} = \cos\theta$$

est engendré par

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 - 1 \quad c_{12} + c_{21} \quad c_{11} - c_{22}$$

On en déduit donc que

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1, b + c = 0 \text{ et } a - d = 0 \right\}$$

Théorème (Tarski-Saidenberg)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application polynomiale, alors l'image par f de tout ensemble (semi)-algébrique est semi-algébrique

On a vu qu'une représentation d'un groupe compact G est polynomiale, et que G est lui-même algébrique dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$. On en déduit :

Corollaire

Étant donné (G, V, ρ), l'orbite de tout ensemble (semi)-algébrique est semi-algébrique.

Corollaire

Si H est un sous-groupe d'isotropie, la strate $\overline{\Sigma}_H$ est semi-algébrique

- Le théorème de Tarski-Saidenberg ne peut pas démontrer l'algébricité d'une image (même si l'ensemble source est algébrique)
- Dans le cas d'une représentation d'un groupe compact, l'algébricité des orbites est un résultat plus fin qui ne peut donc pas se démontrer en utilisant cet outil
- Dans certains cas, l'orbite d'un ensemble algébrique n'est pas algébrique. Par exemple, pour la représentation standard de $\mathrm{SO}(2)$ dans $\mathbb{R}^2$, l'orbite du cercle $\mathscr{C}((1,0),1)$ est le disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,2)$. Ce disque est bien semi-algébrique car donné par l'inéquation $x^2+y^2 \leq 4$, mais il n'est pas algébrique

On se donne (G, V, ρ), ainsi qu'un sous-groupe d'isotropie H. On note $\Gamma_H = N(H)/H$ le groupe de monodromie associé.

Théorème (ADGK)

- *La strate fermée $\overline{\Sigma}_H$ est un ensemble algébrique dans V*
- *Tout polynôme Γ_H-invariant sur V^H peut s'exprimer comme la restriction d'une fraction rationnelle G-invariante sur V*

- Comme rappelé précédemment, on sait que $\overline{\Sigma}_H$ est semi-algébrique par des arguments généraux, mais le point est qu'il n'y a pas d'inégalités qui apparaissent

Résultat principal

Formes normales (I)

Soient $J_1, \ldots, J_N$ les invariants de (V, G), $(j_1, \ldots, j_N)$ leur restriction à V^H, et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ les invariants de (V^H, Γ_H).

- On peut écrire $\sigma_k = R_k(j_1, \ldots, j_N)$, où R_k est une fraction rationnelle.
- Si v est générique dans Σ_H, on peut écrire $v = g.v'$ où $v' \in V^H$ est la forme normale de v.
- On a alors $\sigma_k(v') = R_k(j_1(v'), \ldots, j_N(v')) = R_k(J_1(v), \ldots, J_N(v))$ ce qui permet de calculer $\sigma_k(v')$.
- Les $\sigma_k(v')$ déterminent uniquement v' modulo une ambiguité donnée par l'action du groupe de monodromie Γ_H.

Auffray-Kolev-Petitot ont remarqué très tôt que la rationalité permettait une paramétrisation effective des strates via leurs formes normales.

Théorème (AKP)

Soit $A = \{(\sigma_1(w), ..., \sigma_m(w)), w \in V^H\}$. *La strate* $\overline{\Sigma}_H$ *est génériquement donnée par deux systèmes d'équations / inéquations :*

$$\begin{cases} S_j(J_1, \dots, J_N) = 0 & 1 \leq j \leq d \\ (R_k(J_1, \dots, J_N))_{1 \leq k \leq m} \in A \end{cases}$$

où $S_1, \dots, S_d$ *sont les polynômes dans* $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ *qui engendrent les relations entre les invariants restreints* $j_1, \dots, j_N$.

Résultat principal

Formes normales (III)

- Les polynômes S_j s'appellent les Syzygies, ils sont obtenus en pratique avec des algorithmes de type bases de Gröbner
- Cette méthode produit des équations algébriques pour les strates (modulo une condition de généricité qui peut créer des problèmes pour les strates fermées), mais aussi des inéquations dans le cas où un groupe de monodromie apparait
- Ces inéquations correspondent aux conditions de Procesi-Schwarz pour (V^H, Γ_H)

Résultat principal

Un exemple simple

On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{R}^3$.

- Les invariants sont engendrés par les fonctions symétriques $(\sigma_i)_{1\leq i\leq 3}$
- Le sous-groups $H = \mathfrak{S}_2 \times \{1\}$ est un sous-groupe d'isotropie, correspondant à l'isotropie de n'importe quel vecteur du type (x, x, z) avec $x \neq z$
- La forme normale d'un vecteur d'isotropie $\mathfrak{S}_2$ est donnée par les coefficients x et z, et on a

$$x = \frac{\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3}{2\sigma_1^2 - 6\sigma_2} \quad \text{and} \quad z = \frac{\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3}{\sigma_1^2 - 3\sigma_2}$$

Preuve de l'algébricité

Complexification

L'idée principale est de complexifier la situation

- Si G est un sous-groupe de Lie d'un groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, on pose

$$G^{\mathbb{C}} = \{g \exp(\mathbf{i}Z), g \in G, Z \in \mathfrak{g}\}$$

- $G^{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe de Lie complexe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, appelé le complexifié de G
- $G^{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, et toute représentation linéaire complexe de G s'étend en une représentation algébrique complexe de $G^{\mathbb{C}}$

Preuve de l'algébricité

Ensembles constructibles (I)

En géométrie algébrique complexe, la notion la plus flexible (l'analogue d'un ensemble semi-algébrique en géométrie algébrique réelle) est celle d'ensemble constructible

Définition

Un sous-ensemble de $\mathbb{C}^N$ est constructible s'il s'écrit comme intersection et union finie de fermés et d'ouverts de Zariski

De manière équivalente, un ensemble constructible est une réunion finie d'ensembles localement fermés (pour la topologie de Zariski)

Un ensemble constructible est très proche d'un ensemble algébrique, par exemple il est dense (pour la topologie usuelle) dans son adhérence de Zariski

Preuve de l'algébricité

Ensembles constructibles (II)

- On peut montrer qu'un ensemble constructible peut s'écrire comme une réunion finie *disjointe* d'ensembles localement fermés.
- Un ensemble constructible contient toujours un ouvert Zariski dense de son adhérence
- Un ensemble constructible est très proche d'un ensemble algébrique, par exemple il est dense (pour la topologie usuelle) dans son adhérence de Zariski
- Un exemple un peu pathologique pour faire réfléchir : dans $\mathbb{C}^2$, $(\mathbb{C}^2 \setminus \{w = 0\}) \cup (0, 0)$ est constructible. C'est l'image de l'application $(z, w) \mapsto (zw, w)$ définie de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$

Preuve de l'algébricité

Théorème de Chevalley

L'analogue du théorème de Tarski-Saidenberg en géométrie algébrique complexe est le théorème de constructibilité de Chevalley

Théorème (Chevalley)

Si $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est une polynomiale, alors l'image par f de tout ensemble constructible est constructible

- Ce théorème est très efficace pour montrer l'algébricité d'un sous-ensemble.
- La preuve de l'algébricité va procéder en un jeu réel / complexe : on complexifie et on prend ensuite le lieu réel des orbites.

Preuve de l'algébricité

Les étapes de la preuve

- Il existe un ouvert de Zariski U de $(V^{\mathbb{C}})^{H^{\mathbb{C}}}$ pour lequel tout point de U a isotropie $H^{\mathbb{C}}$ pour la représentation complexifiée.
- Soit X la $G^{\mathbb{C}}$-orbite de U dans $V^{\mathbb{C}}$, X est constructible dans $V^{\mathbb{C}}$. Quitte à restreindre U, on peut supposer que X est localement fermé.
- **Partie délicate** : on a $X \cap V \subset \Sigma_H$. La difficulté vient du fait que X est une orbite complexe.
- $\overline{X \cap V} = \overline{\Sigma}_H$. La première inclusion vient du point précédent. Dans l'autre sens, $U \cap V^H$ est un ouvert de Zariski de V^H, donc $V^H \subset \overline{U \cap V^H} \subset \overline{X \cap V}$.

Preuve de l'algébricité

Fin de la preuve

- X est ouvert de Zariski dans $\overline{X}$ donc $X \cap V$ est un ouvert de Zariski dans $\overline{X} \cap V$
- $\overline{X \cap V} = \overline{\Sigma}_H$ est donc un ensemble algébrique, qui est une réunion finie de composantes irréductibles de $\overline{X} \cap V$.

Remarque

La description des points réels de l'orbite complexe nécessite de comparer complexifié du normalisateur de H dans G et le normalisateur de $H^{\mathbb{C}}$ dans $G^{\mathbb{C}}$. Le résultat technique principal est qu'ils sont égaux.

Preuve de l'algébricité

Descriptions des équations (I)

Corollaire

La strate $\overline{\Sigma}_H$ est donnée par des équations polynomiales en les J_k.

Démonstration.

Soit I l'idéal des fonctions qui s'annulent sur $\overline{\Sigma}_H$ et $P_1, \ldots, P_d$ des générateurs. Alors pour tout k, $(P_k^2)^G$ est également dans I. On a alors

$$\overline{\Sigma}_H = \{(P_1^2)^G = 0, \ldots, (P_d^2)^G = 0\}$$

Il suffit alors d'exprimer les polynômes moyennés $(P_k^2)^G$ comme des polynômes en les J_ℓ. $\square$

Preuve de l'algébricité

Descriptions des équations (II)

Avec cette technique, on peut renforcer le résultat d'AKP

Théorème (G)

La strate $\overline{\Sigma}_H$ *est explicitement décrite par les équations polynomiales* $S(J_1, \ldots, J_N) = 0$ *où* S *parcours l'idéal des relations (syzygies) entre les invariants restreints* $j_1, \ldots, j_N$.

Démonstration.

Ces relations sont évidemment satisfaites pour la strate, reste à montrer qu'elles définissent la strate. Soit v un point hors de la strate. Il existe alors un polynôme P tel que $P(v) \neq 0$ et $\overline{\Sigma}_H \subset \{P = 0\}$. Quitte à remplacer P par $(P^2)^G$, on peut supposer P invariant. On écrit alors $P = S(J_1, \ldots, J_N)$, et S est dans l'idéal des syzygies. $\square$

Preuve de l'algébricité

Exemple

On reprend l'exemple de l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3, x + y + z = 0\}$

- Les invariants restreints sont

$$\begin{cases} j_1(x, x, -2x) = \sigma_2(x, x, -2x) = -3x^2 \\ j_2(x, x, -2x) = \sigma_3(x, x, -2x) = -2x^3 \end{cases}$$

- On a donc une seule relation, à savoir $4j_1^3 = 27j_2^2$

Merci pour votre attention

References

Auffray-Kolev-Petitot
On Anisotropic Polynomial Relations for the Elasticity Tensor
Journal of Elasticity 115, 77–103.

Abud-Sartori (1983)
The geometry of spontaneous symmetry breaking
Annals of Physics 150(2), 307–372.

Luna-Richardson (1979)
A generalisation of the Chevalley restriction theorem
Duke Math. Journal 46(3), 486–496.

Serre (1993)
Gèbres
L'Enseignement Mathématique 39 (1-2), 733–85.