Discrétisation des structures de Poisson

Oscar Cosserat avec Vladimir Salnikov et Camille Laurent-Gengoux

Collaboration entre les universités de Lorraine(Metz), La Rochelle, Angers, Poitiers, Hradec Kràlové (République Tchèque), Göttingen (Allemagne) et INSA de Lyon

Juillet 2021

Projet CNRS 80Prime GraNum

Pour un hamiltonien sur l'espace des phases donné, comment discrétiser les équations du mouvement ?
$\rightarrow$ Ok pour la mécanique symplectique
$\rightarrow$ Comment faire dans le cadre plus général de la géométrie de Poisson ?

Définition

Definition

P une variété, une structure de Poisson $\{.,.\}$ est un crochet de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(P)$ vérifiant la règle de Leibniz, c'est-à-dire :
(i) $\{.,.\}$ est bilinéaire, antisymétrique et vérifie la relation de Jacobi $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$
(ii) $\{f,gh\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$

Example

1. Structure symplectique
2. Dual d'une algèbre de Lie
3. Mécanique des solides

Géométrie d'une structure de Poisson

Theorem

Toute structure de Poisson induit un feuilletage de l'espace en variétés symplectiques.

Il implique l'existence de Casimirs.

Definition

$\phi : (P_1, \{.,.\}_1) \rightarrow (P_2, \{.,.\}_2)$ est un morphisme de Poisson si :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(P_2), \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \phi$$

Réalisation symplectique

Theorem

Il existe une variété symplectique M de dimension $2 \dim P$ et une projection $M \to P$ telles que :

1. *la projection soit un morphisme de Poisson*
2. *P est une sous-variété lagrangienne de M*

Intégrateurs symplectiques

Definition

(M, ω) une variété symplectique, un intégrateur symplectique est une famille $\phi_\epsilon : M \to M, \epsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ telle que :

1. $\forall \epsilon, \phi_\epsilon^* \omega = \omega$
2. $\phi_0 = \mathrm{id}$

Example

Euler symplectique

Deux remarques

1. Son graphe est *lagrangien* dans $M \times M$
2. ϕ admet une intégrale première formelle

Intégrateurs de Poisson sur le dual d'une algèbre de Lie

Definition

Un intégrateur de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ est une famille lisse de sous-variétés $(\Sigma_\epsilon), \epsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ de T^*G telles que :

1. $\Sigma_0 = \mathfrak{g}^*$
2. $\forall \epsilon, \Sigma_\epsilon$ est lagrangienne dans T^*G
3. $\Sigma_\epsilon \simeq \mathfrak{g}^*$ par translation à gauche et par translation à droite

Pourquoi toute cette histoire ?

Theorem

Si on note $J_L : T^*G \to \mathfrak{g}^*$ et $J_R : T^*G \to \mathfrak{g}^*$ les translations à gauche et à droite,

$$\phi_\epsilon = J_L \circ (J_{R|\Sigma})^{-1}$$

est une famille d'isomorphismes de Poisson préservant le feuilletage et tel que $\phi_0 = id$.
De plus, de même que dans le cas symplectique, elle admet une intégrale première formelle.

Le schéma numérique associé est : $x_{n+1} = J_L \circ (J_{R|\Sigma})^{-1}(x_n)$

Question

Une fois qu'on se donne un hamiltonien, comment le préserver avec un tel schéma numérique ?

Idée générale

On cherche ces sous-variétés lagrangiennes sous forme de graphes de 1-formes fermées d'un certain fibré cotangent.

Merci pour votre attention.