Une brève introduction aux connexions lagrangiennes

Patrick Verovic

LAMA – UMR 5127 (CNRS) – Université Savoie Mont Blanc (France)

GDR « Géométrie différentielle et mécanique » (n° 2043)
La Rochelle, 7 – 9 juillet 2021

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Soient E, M, F des variétés lisses et $\pi : E \longrightarrow M$ une application lisse.

Soient E, M, F des variétés lisses et $\pi : E \longrightarrow M$ une application lisse.

Définition

On dit que (E, M, π, F) *est un* fibré *lorsqu'on se donne un recouvrement ouvert* $\mathcal{R}$ *de* M *et une famille* $(\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F)_{U \in \mathcal{R}}$ *de difféomorphismes (*cartes*) tels que pour chaque* $U \in \mathcal{R}$ *on ait*
$\pi(\varphi_U^{-1}(p, s)) = p$ *pour tout* $(p, s) \in U \times F$
(commutation de φ_U *avec la projection* $\mathrm{proj}_1 : U \times F \longrightarrow U$*).*

Soient E, M, F des variétés lisses et $\pi : E \longrightarrow M$ une application lisse.

Définition

On dit que (E, M, π, F) est un fibré lorsqu'on se donne un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de M et une famille $(\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F)_{U \in \mathcal{R}}$ de difféomorphismes (cartes) tels que pour chaque $U \in \mathcal{R}$ on ait $\pi(\varphi_U^{-1}(p, s)) = p$ pour tout $(p, s) \in U \times F$ (commutation de φ_U avec la projection $\mathrm{proj}_1 : U \times F \longrightarrow U$).

On a donc $\dim(E) = \dim(M) + \dim(F)$.

On dit que E et M sont respectivement l'espace total et la base du fibré.

On dit que E et M sont respectivement l'espace total et la base du fibré.

Par ailleurs, π est une submersion surjective qui est appelée la projection associée au fibré.

On dit que E et M sont respectivement l'espace total et la base du fibré.

Par ailleurs, π est une submersion surjective qui est appelée la projection associée au fibré.

En outre, on dit que F est la fibre type du fibré.

On dit que E et M sont respectivement l'espace total et la base du fibré.

Par ailleurs, π est une submersion surjective qui est appelée la projection associée au fibré.

En outre, on dit que F est la fibre type du fibré.

Enfin, pour chaque point $p \in M$, la fibre $\boxed{E_p \coloneqq \pi^{-1}(p)}$ de π au-dessus de p est une sous-variété lisse de E et pour toute carte φ_U vérifiant $p \in U$ l'application $s \longmapsto \varphi_U^{-1}(p, s)$ de F dans E_p est un difféomorphisme.

Soient $k \geqslant 0$ un entier et (E, M, π, F) un fibré dont on désigne par $(\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F)_{U \in \mathcal{R}}$ une famille de cartes.

Soient $k \geqslant 0$ un entier et (E, M, π, F) un fibré dont on désigne par $(\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F)_{U \in \mathcal{R}}$ une famille de cartes.

Définition

On dit que (E, M, π, F) est un fibré vectoriel *de rang k lorsque F est l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^k$ et qu'on se donne une famille $(\theta_{(U,V)} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}(F))_{(U,V) \in \mathcal{R}^2}$ d'applications lisses telle que pour chaque $(U, V) \in \mathcal{R}^2$ on ait $\varphi_U[\varphi_V^{-1}(p, s)] = (p\,,\, \theta_{(U,V)}(p) \cdot s)$ pour tout $(p, s) \in (U \cap V) \times F$ ($\theta_{(U,V)}$ est l'*application de transition* de φ_U vers φ_V).*
On note alors $(E, M, \pi, F) \eqqcolon (E, M, \pi)$.

Soient $k \geqslant 0$ un entier et (E, M, π, F) un fibré dont on désigne par $(\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F)_{U \in \mathcal{R}}$ une famille de cartes.

Définition

On dit que (E, M, π, F) est un fibré vectoriel de rang k lorsque F est l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^k$ et qu'on se donne une famille $(\theta_{(U,V)} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}(F))_{(U,V) \in \mathcal{R}^2}$ d'applications lisses telle que pour chaque $(U, V) \in \mathcal{R}^2$ on ait $\varphi_U[\varphi_V^{-1}(p, s)] = (p\,,\, \theta_{(U,V)}(p) \cdot s)$ pour tout $(p, s) \in (U \cap V) \times F$ ($\theta_{(U,V)}$ est l'application de transition de φ_U vers φ_V).
On note alors $(E, M, \pi, F) \eqqcolon (E, M, \pi)$.

Il s'ensuit que pour chaque point $p \in M$ la fibre $E_p \coloneqq \pi^{-1}(p)$ de π au-dessus de p est munie d'une unique structure d'espace vectoriel (qui dépend de p) telle que pour toute carte φ_U vérifiant $p \in U$ l'application $s \longmapsto \varphi_U^{-1}(p, s)$ de F dans E_p soit un isomorphisme linéaire.

Exemple (fibré tangent)

Soit M *une variété lisse de dimension finie* $n \geqslant 1$.
On considère l'ensemble $TM \coloneqq \bigcup_{p \in M} T_p M$ *et l'application* $\tau_M : TM \longrightarrow M$ *qui à chaque* $v \in TM$ *associe l'unique point* $p \in M$ *tel qu'on ait* $v \in T_p M$.
Étant donné un atlas $\mathcal{A}$ *sur* M, *chaque carte* $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ *permet de définir* $T\psi : \tau_M^{-1}(U) \longrightarrow \psi(U) \times \mathbf{R}^n$ *par* $T\psi(v) \coloneqq (\psi(\pi(v)), T_{\pi(v)}\psi \cdot v)$.
L'ensemble $\{(\tau_M^{-1}(U), T\psi) \mid (U, \psi) \in \mathcal{A}\}$ *est alors un atlas sur* TM *qui définit ainsi une structure de variété lisse sur* TM.

Exemple (fibré tangent)

Soit M une variété lisse de dimension finie $n \geqslant 1$.
On considère l'ensemble $TM \coloneqq \bigcup_{p \in M} T_p M$ et l'application $\tau_M : TM \longrightarrow M$ qui à chaque $v \in TM$ associe l'unique point $p \in M$ tel qu'on ait $v \in T_p M$.
Étant donné un atlas $\mathcal{A}$ sur M, chaque carte $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ permet de définir $T\psi : \tau_M^{-1}(U) \longrightarrow \psi(U) \times \mathbf{R}^n$ par $T\psi(v) \coloneqq (\psi(\pi(v)), T_{\pi(v)}\psi \cdot v)$.
L'ensemble $\{(\tau_M^{-1}(U), T\psi) \mid (U, \psi) \in \mathcal{A}\}$ est alors un atlas sur TM qui définit ainsi une structure de variété lisse sur TM.

En outre, (TM, M, τ_M) est un fibré vectoriel de rang n lorsque $\mathcal{R}$ est l'ensemble de tous les domaines U des cartes $(U, \psi) \in \mathcal{A}$, que la famille $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{R}}$ est définie par $\varphi_U(v) \coloneqq (\pi(v), T_{\pi(v)}\psi \cdot v)$ (valable pour toute ψ vérifiant $(U, \psi) \in \mathcal{A}$) et que la famille $(\theta_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{R}^2}$ des applications de transition est définie par $\theta_{(U,V)}(p) \coloneqq (T_p\gamma) \circ (T_p\psi)^{-1}$ (valable pour toutes ψ et γ vérifiant $(U, \psi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \gamma) \in \mathcal{A}$).
On dit que (TM, M, τ_M) est le fibré tangent de M.

Soient (E, M, π, F) un fibré et (TE, E, τ_E) le fibré tangent de E.

Soient (E, M, π, F) un fibré et (TE, E, τ_E) le fibré tangent de E.

Proposition

En désignant par 0_M la section nulle du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M, l'ensemble $V(E) \coloneqq (T\pi)^{-1}(0_M(M))$ est une sous-variété lisse de TE de dimension $\dim(E)$ et $(V(E), E, (\tau_E)_{|V(E)})$ est un sous-fibré vectoriel de (TE, E, τ_E) dont le rang est égal à $\dim(F)$ et qu'on appelle le fibré vertical *de (E, M, π, F).*

Soient (E, M, π, F) un fibré et (TE, E, τ_E) le fibré tangent de E.

Proposition

En désignant par 0_M la section nulle du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M, l'ensemble $V(E) \coloneqq (T\pi)^{-1}(0_M(M))$ est une sous-variété lisse de TE de dimension $\dim(E)$ et $(V(E), E, (\tau_E)_{|V(E)})$ est un sous-fibré vectoriel de (TE, E, τ_E) dont le rang est égal à $\dim(F)$ et qu'on appelle le fibré vertical *de (E, M, π, F).*

Pour tout $x \in E$, on a donc $V_x(E) = \mathrm{Ker}(T_x\pi) = T_x E_{\pi(x)} \subseteq T_x E$.

Soient (E, M, π, F) un fibré et (TE, E, τ_E) le fibré tangent de E.

Proposition

En désignant par 0_M la section nulle du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M, l'ensemble $V(E) \coloneqq (T\pi)^{-1}(0_M(M))$ est une sous-variété lisse de TE de dimension $\dim(E)$ et $(V(E), E, (\tau_E)_{|V(E)})$ est un sous-fibré vectoriel de (TE, E, τ_E) dont le rang est égal à $\dim(F)$ et qu'on appelle le fibré vertical de (E, M, π, F).

Pour tout $x \in E$, on a donc $V_x(E) = \mathrm{Ker}(T_x\pi) = T_xE_{\pi(x)} \subseteq T_xE$.

Définition

On dit qu'un sous-fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ de (TE, E, τ_E) est un fibré horizontal de (E, M, π, F) lorsqu'il vérifie $H_x \oplus V_x(E) = T_xE$ pour tout $x \in E$.

Soient (E, M, π, F) un fibré et (TE, E, τ_E) le fibré tangent de E.

Proposition

En désignant par 0_M la section nulle du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M, l'ensemble $V(E) \coloneqq (T\pi)^{-1}(0_M(M))$ est une sous-variété lisse de TE de dimension $\dim(E)$ et $(V(E), E, (\tau_E)_{|V(E)})$ est un sous-fibré vectoriel de (TE, E, τ_E) dont le rang est égal à $\dim(F)$ et qu'on appelle le fibré vertical *de (E, M, π, F).*

Pour tout $x \in E$, on a donc $V_x(E) = \mathrm{Ker}(T_x\pi) = T_x E_{\pi(x)} \subseteq T_x E$.

Définition

On dit qu'un sous-fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ de (TE, E, τ_E) est un fibré horizontal *de (E, M, π, F) lorsqu'il vérifie $H_x \oplus V_x(E) = T_x E$ pour tout $x \in E$.*

Le rang de $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ est donc égal à $\dim(M)$.

Soit $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ un fibré horizontal de (E, M, π, F).

Soit $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ un fibré horizontal de (E, M, π, F).

Définition

L'application $C : TE \longrightarrow TE$ qui à chaque $\xi \in TE$ associe la projection de ξ sur $V_{\tau_E(\xi)}(E)$ parallèlement à $H_{\tau_E(\xi)}$ s'appelle la connexion d'Ehresmann *sur (E, M, π, F) associée à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.*

Soit $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ un fibré horizontal de (E, M, π, F).

Définition

L'application $C : TE \longrightarrow TE$ qui à chaque $\xi \in TE$ associe la projection de ξ sur $V_{\tau_E(\xi)}(E)$ parallèlement à $H_{\tau_E(\xi)}$ s'appelle la connexion d'Ehresmann *sur (E, M, π, F) associée à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.*

On vérifie que C est lisse.

L'application $(T\pi)_{|H} : H \longrightarrow TM$ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ sur le fibré vectoriel (TM, M, τ_M) au-dessus de π.

L'application $(T\pi)_{|H} : H \longrightarrow TM$ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ sur le fibré vectoriel (TM, M, τ_M) au-dessus de π.

Ceci entraîne d'une part qu'on a $\dim(H) = \dim(TM) = 2\dim(M)$ et d'autre part que pour tous $v \in TM$ et $x \in E_{\tau_M(v)}$, il existe un unique vecteur $\xi \in H_x$ vérifiant $T_x\pi \cdot \xi = v$ qu'on appelle le relèvement horizontal de v en x associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ et qu'on note $\Lambda(v, x)$.

L'application $(T\pi)_{|H} : H \longrightarrow TM$ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ sur le fibré vectoriel (TM, M, τ_M) au-dessus de π.

Ceci entraîne d'une part qu'on a $\dim(H) = \dim(TM) = 2\dim(M)$ et d'autre part que pour tous $v \in TM$ et $x \in E_{\tau_M(v)}$, il existe un unique vecteur $\xi \in H_x$ vérifiant $T_x\pi \cdot \xi = v$ qu'on appelle le relèvement horizontal de v en x associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ et qu'on note $\Lambda(v, x)$.

Considérons la variété lisse $TM \times_M E \coloneqq \{(v, x) \in TM \times E \mid \tau_M(v) = \pi(x)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par τ_M).

L'application $(T\pi)_{|H} : H \longrightarrow TM$ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ sur le fibré vectoriel (TM, M, τ_M) au-dessus de π.

Ceci entraîne d'une part qu'on a $\dim(H) = \dim(TM) = 2\dim(M)$ et d'autre part que pour tous $v \in TM$ et $x \in E_{\tau_M(v)}$, il existe un unique vecteur $\xi \in H_x$ vérifiant $T_x\pi \cdot \xi = v$ qu'on appelle le relèvement horizontal de v en x associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ et qu'on note $\Lambda(v, x)$.

Considérons la variété lisse $TM \times_M E \coloneqq \{(v, x) \in TM \times E \mid \tau_M(v) = \pi(x)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par τ_M).

Définition

L'application $\Lambda : TM \times_M E \longrightarrow TE$ qui envoie chaque $(v, x) \in TM \times_M E$ sur $\Lambda(v, x)$ s'appelle le relèvement horizontal sur (E, M, π, F) associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.

L'application $(T\pi)_{|H} : H \longrightarrow TM$ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ sur le fibré vectoriel (TM, M, τ_M) au-dessus de π.

Ceci entraîne d'une part qu'on a $\dim(H) = \dim(TM) = 2\dim(M)$ et d'autre part que pour tous $v \in TM$ et $x \in E_{\tau_M(v)}$, il existe un unique vecteur $\xi \in H_x$ vérifiant $T_x\pi\cdot\xi = v$ qu'on appelle le relèvement horizontal de v en x associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ et qu'on note $\Lambda(v, x)$.

Considérons la variété lisse $TM \times_M E \coloneqq \{(v, x) \in TM \times E \mid \tau_M(v) = \pi(x)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par τ_M).

Définition

L'application $\Lambda : TM \times_M E \longrightarrow TE$ qui envoie chaque $(v, x) \in TM \times_M E$ sur $\Lambda(v, x)$ s'appelle le relèvement horizontal sur (E, M, π, F) associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.

On vérifie que Λ est lisse.

Caractérisation des connexions d'Ehresmann.

Proposition

Pour toute application $C : TE \longrightarrow TE$ *et tout sous-fibré vectoriel* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *de* (TE, E, τ_E)*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *est un fibré horizontal de* (E, M, π, F) *et* C *est la connexion d'Ehresmann sur* (E, M, π, F) *associée à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.
- *On a* $V(E) = C(TE)$, $H = C^{-1}(0_E(E))$ *et* C *est un endomorphisme du fibré vectoriel* (TE, E, τ_E) *qui vérifie* $C \circ C = C$.

Caractérisation des relèvements horizontaux.

Proposition

Pour toute application $\Lambda : TM \times_M E \longrightarrow TE$ *et tout sous-fibré vectoriel* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *de* (TE, E, τ_E)*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *est un fibré horizontal de* (E, M, π, F) *et* Λ *est le relèvement horizontal sur* (E, M, π, F) *associé à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.
- *L'égalité* $(T\pi\,,\,\tau_E) \circ \Lambda = \mathrm{I}_{TM \times_M E}$ *est satisfaite et on a* $\Lambda(T_x\pi \cdot \xi\,,\,x) = \xi$ *pour tous* $x \in E$ *et* $\xi \in H_x$.

Caractérisation des relèvements horizontaux.

Proposition

Pour toute application $\Lambda : TM \times_M E \longrightarrow TE$ et tout sous-fibré vectoriel $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ de (TE, E, τ_E), les assertions suivantes sont équivalentes :

- *$(H, E, (\tau_E)_{|H})$ est un fibré horizontal de (E, M, π, F) et Λ est le relèvement horizontal sur (E, M, π, F) associé à $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.*
- *L'égalité $(T\pi \, , \, \tau_E) \circ \Lambda = \mathrm{I}_{TM \times_M E}$ est satisfaite et on a $\Lambda(T_x\pi \cdot \xi \, , \, x) = \xi$ pour tous $x \in E$ et $\xi \in H_x$.*

Lorsque ces assertions sont satisfaites, on a donc $H = \Lambda(TM \times_M E)$.

Le lien entre relèvements horizontaux et connexions d'Ehresmann est donné par le résultat suivant.

Proposition

Soient $\Lambda : TM \times_M E \longrightarrow TE$ *et* $C : TE \longrightarrow TE$ *des applications qui vérifient la relation* $C = \mathrm{I}_{TE} - \Lambda \circ (T\pi\,,\,\tau_E)$ *.*
Pour tout fibré horizontal $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *de* (E, M, π, F)*, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- Λ *est le relèvement horizontal sur* (E, M, π, F) *associé à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$*.*
- C *est la connexion d'Ehresmann sur* (E, M, π, F) *associée à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$*.*

Lorsque ces assertions sont satisfaites, on dit que Λ *et* C *sont* associés*.*

Le lien entre relèvements horizontaux et connexions d'Ehresmann est donné par le résultat suivant.

Proposition

Soient $\Lambda : TM \times_M E \longrightarrow TE$ *et* $C : TE \longrightarrow TE$ *des applications qui vérifient la relation* $C = \mathrm{I}_{TE} - \Lambda \circ (T\pi\,,\,\tau_E)$.
Pour tout fibré horizontal $(H, E, (\tau_E)_{|H})$ *de* (E, M, π, F)*, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- Λ *est le relèvement horizontal sur* (E, M, π, F) *associé à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.
- C *est la connexion d'Ehresmann sur* (E, M, π, F) *associée à* $(H, E, (\tau_E)_{|H})$.

Lorsque ces assertions sont satisfaites, on dit que Λ *et* C *sont* associés.

Lorsqu'elles sont satisfaites, ces assertions montrent que C mesure le défaut de Λ à être un inverse à gauche de $(T\pi\,,\,\tau_E)$ sachant que Λ est un inverse à droite de $(T\pi\,,\,\tau_E)$.

Plan de l'exposé

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné un point $p \in M$ ainsi que des vecteurs x et y de l'espace vectoriel E_p, on a $x + t\,y \in E_p \subseteq E$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ce qui entraîne $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(x + t\,y) \in T_x E$.

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné un point $p \in M$ ainsi que des vecteurs x et y de l'espace vectoriel E_p, on a $x + ty \in E_p \subseteq E$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ce qui entraîne $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(x + ty) \in T_xE$.

Il en résulte que pour chaque $x \in E$ on peut considérer l'application $\iota_x : E_{\pi(x)} \longrightarrow T_xE$ définie par $\boxed{\iota_x(y) \coloneqq \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(x + ty)}$.

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné un point $p \in M$ ainsi que des vecteurs x et y de l'espace vectoriel E_p, on a $x + t\,y \in E_p \subseteq E$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ce qui entraîne $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (x + t\,y) \in T_x E$.

Il en résulte que pour chaque $x \in E$ on peut considérer l'application $\iota_x : E_{\pi(x)} \longrightarrow T_x E$ définie par $\boxed{\iota_x(y) \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (x + t\,y)}$.

On vérifie que ι_x est linéaire et injective d'image égale à $V_x(E)$.

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel.

Étant donné un point $p \in M$ ainsi que des vecteurs x et y de l'espace vectoriel E_p, on a $x + t\,y \in E_p \subseteq E$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ce qui entraîne $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(x + t\,y) \in T_xE$.

Il en résulte que pour chaque $x \in E$ on peut considérer l'application $\iota_x : E_{\pi(x)} \longrightarrow T_xE$ définie par $\boxed{\iota_x(y) \coloneqq \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(x + t\,y)}$.

On vérifie que ι_x est linéaire et injective d'image égale à $V_x(E)$.

On l'appelle le *relèvement vertical* de (E, M, π) en x.

Considérons la variété lisse $E \times_M E \coloneqq \{(x, y) \in E \times E \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par π).

Considérons la variété lisse $E \times_M E \coloneqq \{(x, y) \in E \times E \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par π).

Définition

L'application $\Phi : E \times_M E \longrightarrow V(E)$ définie par $\Phi(x, y) \coloneqq \iota_x(y)$ s'appelle le relèvement vertical de (E, M, π).

Considérons la variété lisse $E \times_M E \coloneqq \{(x, y) \in E \times E \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par π).

Définition

L'application $\Phi : E \times_M E \longrightarrow V(E)$ définie par $\Phi(x, y) \coloneqq \iota_x(y)$ s'appelle le relèvement vertical *de (E, M, π).*

On vérifie que Φ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(E \times_M E, E, \mathrm{proj}_1)$ sur le fibré vertical de (E, M, π).

Considérons la variété lisse $E \times_M E \coloneqq \{(x, y) \in E \times E \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par π).

Définition

L'application $\Phi : E \times_M E \longrightarrow V(E)$ définie par $\Phi(x, y) \coloneqq \iota_x(y)$ s'appelle le relèvement vertical *de (E, M, π).*

On vérifie que Φ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(E \times_M E, E, \mathrm{proj}_1)$ sur le fibré vertical de (E, M, π).

Définition

Le champ de vecteurs V sur E défini par $V(x) \coloneqq \Phi(x, x)$ s'appelle le champ de vecteur canonique *de (E, M, π).*

Considérons la variété lisse $E \times_M E \coloneqq \{(x,y) \in E \times E \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ (appelé le pullback de (E, M, π) par π).

Définition

L'application $\Phi : E \times_M E \longrightarrow V(E)$ définie par $\Phi(x,y) \coloneqq \iota_x(y)$ s'appelle le relèvement vertical *de (E, M, π).*

On vérifie que Φ est un isomorphisme du fibré vectoriel $(E \times_M E, E, \mathrm{proj}_1)$ sur le fibré vertical de (E, M, π).

Définition

Le champ de vecteurs V sur E défini par $V(x) \coloneqq \Phi(x,x)$ s'appelle le champ de vecteur canonique *de (E, M, π).*

On vérifie que V est le champ de vecteurs fondamental sur E associé à $1 \in \mathbf{R}$ pour l'action lisse de $\mathbf{R}^*$ sur E définie par $\lambda * x \coloneqq \lambda x$ (dans $E_{\pi(x)}$).

Définition

Un homomorphisme $K : TE \longrightarrow E$ *du fibré vectoriel* (TE, E, τ_E) *dans le fibré vectoriel* (E, M, π) *au-dessus de* π *qui vérifie* $K(\Phi(x, y)) = y$ *pour tout* $(x, y) \in E \times_M E$ *s'appelle un* connecteur *sur* (E, M, π).

Définition

Un homomorphisme $K : TE \longrightarrow E$ du fibré vectoriel (TE, E, τ_E) dans le fibré vectoriel (E, M, π) au-dessus de π qui vérifie $K(\Phi(x, y)) = y$ *pour tout $(x, y) \in E \times_M E$ s'appelle un* connecteur *sur (E, M, π).*

Proposition

Pour toutes applications $C : TE \longrightarrow TE$ et $K : TE \longrightarrow E$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- *C est une connexion d'Ehresmann sur (E, M, π) et on a* $K(\xi) = \mathrm{proj}_2(\Phi^{-1}(C(\xi)))$ *pour tout $\xi \in TE$.*
- *K est un connecteur sur (E, M, π) et on a* $C(\xi) = \Phi(\tau_E(\xi), K(\xi))$ *pour tout $\xi \in TE$.*

Lorsque ces assertions sont satisfaites, on dit que C et K sont associés.

Plan de l'exposé

Soient M une variété lisse de dimension finie $n \geqslant 1$,
$\Phi : TM \times_M TM \longrightarrow V(TM)$ le relèvement vertical du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M et V le champ de vecteur canonique de (TM, M, τ_M).

Soient M une variété lisse de dimension finie $n \geqslant 1$,
$\Phi : TM \times_M TM \longrightarrow V(TM)$ le relèvement vertical du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M et V le champ de vecteur canonique de (TM, M, τ_M).

Définition

L'application $J : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ définie par $J(\xi) \coloneqq \Phi(\tau_{TM}(\xi)\,, T\tau_M(\xi))$ *s'appelle la* structure tangente *de (TM, M, τ_M).*

Soient M une variété lisse de dimension finie $n \geqslant 1$,
$\Phi : TM \times_M TM \longrightarrow V(TM)$ le relèvement vertical du fibré tangent (TM, M, τ_M) de M et V le champ de vecteur canonique de (TM, M, τ_M).

Définition

L'application $J : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ définie par $J(\xi) \coloneqq \Phi(\tau_{TM}(\xi)\,, T\tau_M(\xi))$ *s'appelle la* structure tangente *de (TM, M, τ_M).*

On vérifie que J est un endomorphisme du fibré tangent $(T(TM), TM, \tau_{TM})$ de TM et qu'on a $J(T(TM)) = V(TM) = J^{-1}(0_{TM}(TM))$.

Définition

Un champ de vecteurs lisse S sur TM qui vérifie la relation $\boxed{T_{\tau_M} \circ S = \mathrm{I}_{TM}}$ *s'appelle un* semi-spray *sur M.*

Définition

Un champ de vecteurs lisse S sur TM qui vérifie la relation $T\tau_M \circ S = \mathrm{I}_{TM}$ *s'appelle un* semi-spray *sur M.*

Ceci signifie que S est une section du fibré vectoriel $(T(TM), TM, T\tau_M)$ en plus d'être une section du fibré tangent $(T(TM), TM, \tau_{TM})$ de TM.

Proposition

Pour tout champ de vecteurs lisse S sur TM, les assertions suivantes sont équivalentes :

- *S est un semi-spray sur M.*
- *On a $\boxed{J \circ S = V}$.*
- *Pour chaque carte (U, φ) sur M, il existe une fonction $F = (F_1, \ldots, F_n) : \tau_M^{-1}(U) = TU \longrightarrow \mathbf{R}^n$ telle qu'en écrivant $T\varphi = (x_1, \ldots, x_n\,, y_1, \ldots, y_n)$ on ait l'égalité*

$$\boxed{S(v) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(v) \frac{\partial}{\partial x_i}(v) + F_i(v) \frac{\partial}{\partial y_i}(v) \right]} \text{ pour tout } v \in TU.$$

Étant donné un semi-spray S sur M, une carte (U, φ) sur M et une courbe $\sigma : I \longrightarrow U$ de classe C^2, la courbe $\overset{\bullet}{\sigma} : I \longrightarrow TU$ est une courbe intégrale de S si, et seulement si, la courbe $c \coloneqq \varphi \circ \sigma$ de I dans $\varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ vérifie l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d} t^2} = f(c\,,\,\overset{\bullet}{c})\,,$$

où on a posé $f \coloneqq F \circ (T\varphi)^{-1}$.

Proposition

Pour tout semi-spray S sur M, l'application $C : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ définie par $C \coloneqq \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{T(TM)} + \mathcal{L}_S J)$ *est une connexion d'Ehresmann sur le fibré tangent (TM, M, τ_M) de M qu'on appelle la* connexion associée *à S.*

Proposition

Pour tout semi-spray S sur M, l'application $C : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ définie par $C \coloneqq \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{T(TM)} + \mathcal{L}_S J)$ *est une connexion d'Ehresmann sur le fibré tangent (TM, M, τ_M) de M qu'on appelle la* connexion associée *à S.*

Ici, on considère J comme une 1-forme sur TM à valeurs dans $T(TM)$.

Proposition

Pour tout semi-spray S sur M, l'application $C : T(TM) \longrightarrow T(TM)$ définie par $C \coloneqq \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{T(TM)} + \mathcal{L}_S J)$ est une connexion d'Ehresmann sur le fibré tangent (TM, M, τ_M) de M qu'on appelle la connexion associée *à S.*

Ici, on considère J comme une 1-forme sur TM à valeurs dans $T(TM)$.

On vérifie qu'on a $C \circ X = \frac{1}{2}(X + [S, J \circ X] + J \circ [X, S])$ pour tout champ de vecteurs lisse X sur TM.

Plan de l'exposé

Soit $L : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ un lagrangien régulier, c'est-à-dire une fonction lisse telle que la *dérivée fibrée* $\mathfrak{T} : TM \longrightarrow T^*M$ de L, définie par $\mathfrak{T}(v) \in T_p^*M$ et $\mathfrak{T}(v)\cdot w \coloneqq (L_{|T_pM})'(v)\cdot w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} L(v + s\,w) = T_v L\cdot\Phi(v, w)$ pour tous $p \in M$ et $v, w \in T_pM$, soit un difféomorphisme local.

Soit $L : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ un lagrangien régulier, c'est-à-dire une fonction lisse telle que la *dérivée fibrée* $\mathfrak{T} : TM \longrightarrow T^*M$ de L, définie par $\mathfrak{T}(v) \in T_p^*M$ et $\mathfrak{T}(v)\cdot w \coloneqq (L_{|T_pM})'(v)\cdot w = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} L(v + s\,w) = T_vL\cdot\Phi(v, w)$ pour tous $p \in M$ et $v, w \in T_pM$, soit un difféomorphisme local.

- En désignant par ω la forme symplectique canonique sur T^*M, ceci entraîne que le *pullback* $\omega_L \coloneqq \mathfrak{T}^*(\omega)$ est une forme symplectique sur TM.

Soit $L : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ un lagrangien régulier, c'est-à-dire une fonction lisse telle que la *dérivée fibrée* $\mathfrak{T} : TM \longrightarrow T^*M$ de L, définie par $\mathfrak{T}(v) \in T_p^*M$ et $\mathfrak{T}(v)\cdot w \coloneqq (L_{|T_pM})'(v)\cdot w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} L(v + s\,w) = T_v L\cdot\Phi(v, w)$ pour tous $p \in M$ et $v, w \in T_pM$, soit un difféomorphisme local.

- En désignant par ω la forme symplectique canonique sur T^*M, ceci entraîne que le *pullback* $\omega_L \coloneqq \mathfrak{T}^*(\omega)$ est une forme symplectique sur TM.
- D'autre part, on considère les fonctions *action* $A \coloneqq V\cdot L : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ ($A(v) = \mathfrak{T}(v)\cdot v$ pour tout $v \in TM$) et *énergie* $E \coloneqq A - L$ associées à L.

- Soit X_E le *gradient symplectique* de l'énergie E pour ω_L, c'est-à-dire le champ de vecteurs sur TM défini par $\omega_L(X_E\,,\,\cdot) = \mathrm{d}E(\cdot)$.

- Soit X_E le *gradient symplectique* de l'énergie E pour ω_L, c'est-à-dire le champ de vecteurs sur TM défini par $\boxed{\omega_L(X_E\,,\,\cdot) = \mathrm{d}E(\cdot)}$.

- Étant donné une carte (U, φ) sur M et une courbe $\sigma : I \longrightarrow U$ de classe C^2, la courbe $\overset{\bullet}{\sigma} : I \longrightarrow TU$ est une courbe intégrale de X_E si, et seulement si, la courbe $c \coloneqq \varphi \circ \sigma$ de I dans $\varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ vérifie
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(c\,,\,\overset{\bullet}{c})\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(c\,,\,\overset{\bullet}{c})}$$
pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (*équations d'Euler & Lagrange*), où on a écrit $T\varphi = (x_1, \ldots, x_n\,, y_1, \ldots, y_n)$ et posé $\mathcal{L} \coloneqq L_{|TU} \circ (T\varphi)^{-1}$.

Connexions lagrangiennes

- Soit X_E le *gradient symplectique* de l'énergie E pour ω_L, c'est-à-dire le champ de vecteurs sur TM défini par $\omega_L(X_E\,,\cdot) = \mathrm{d}E(\cdot)$.

- Étant donné une carte (U, φ) sur M et une courbe $\sigma : I \longrightarrow U$ de classe C^2, la courbe $\overset{\bullet}{\sigma} : I \longrightarrow TU$ est une courbe intégrale de X_E si, et seulement si, la courbe $c \coloneqq \varphi \circ \sigma$ de I dans $\varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(c\,,\overset{\bullet}{c})\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(c\,,\overset{\bullet}{c})$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (*équations d'Euler & Lagrange*), où on a écrit $T\varphi = (x_1, \ldots, x_n\,, y_1, \ldots, y_n)$ et posé $\mathcal{L} \coloneqq L_{|TU} \circ (T\varphi)^{-1}$.

Proposition

Le champ de vecteurs X_E sur TM est un semi-spray sur M.

Connexions lagrangiennes

- Soit X_E le *gradient symplectique* de l'énergie E pour ω_L, c'est-à-dire le champ de vecteurs sur TM défini par $\omega_L(X_E\,,\,\cdot) = \mathrm{d}E(\cdot)$.

- Étant donné une carte (U, φ) sur M et une courbe $\sigma : I \longrightarrow U$ de classe C^2, la courbe $\overset{\bullet}{\sigma} : I \longrightarrow TU$ est une courbe intégrale de X_E si, et seulement si, la courbe $c \coloneqq \varphi \circ \sigma$ de I dans $\varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(c\,,\,\overset{\bullet}{c})\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(c\,,\,\overset{\bullet}{c})$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (*équations d'Euler & Lagrange*), où on a écrit $T\varphi = (x_1, \ldots, x_n\,, y_1, \ldots, y_n)$ et posé $\mathcal{L} \coloneqq L_{|TU} \circ (T\varphi)^{-1}$.

Proposition

Le champ de vecteurs X_E sur TM est un semi-spray sur M.

Définition

La connexion associée à X_E s'appelle la connexion lagrangienne *de L.*

Quelques références

BUCATARU Ioan & MIRON Radu
Finsler-Lagrange geometry
https://www.math.uaic.ro/~bucataru/working/metricg.pdf, 2007.

MICHOR Peter
Topics in differential geometry
https://www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.pdf, 2008.

SZILASI József
A setting for spray and Finsler geometry
http://math.unideb.hu/media/szilasi-jozsef/book_chapters/setting.pdf, 2003.

WALSCHAP Gerard
Metric structures in differential geometry
Springer, 2004.