



UNIVERSITÉ DE NANTES



Endommagement, décomposition de Kelvin et principe de Curie

GdR GDM n°2043
Géométrie Différentielle et Mécanique

du 7 au 9 juillet 2021
La Rochelle

Marc François

1 Mécanique des matériaux ?

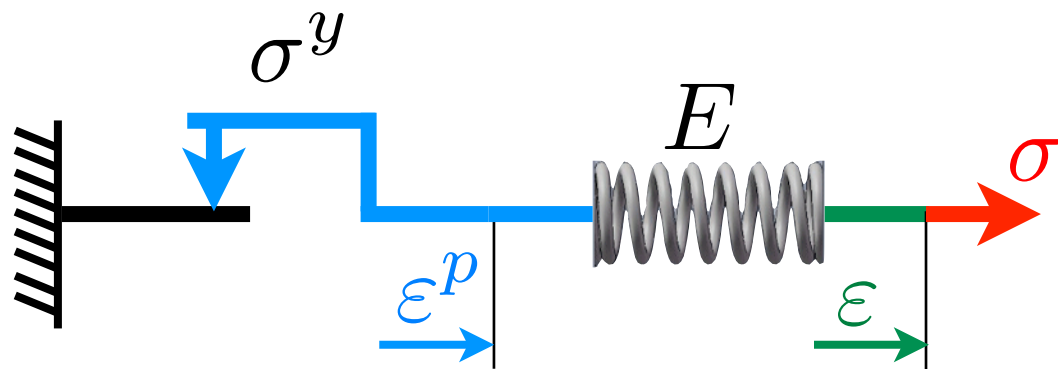
But : décrire le comportement non linéaire des matériaux (plasticité, endommagement...)



Méthode classique :

- identifier des variables d'état
- définir une mécanique sous-jacente
- utilisation de la thermodynamique des process irréversibles, et le principe de dissipation maximale

Ex. élasto-plasticité parfaite, 1D :

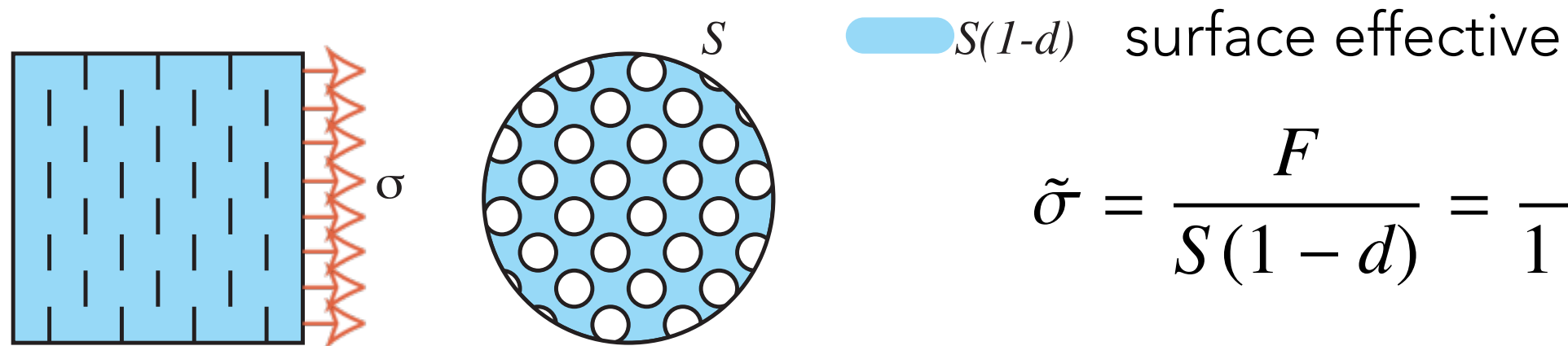


$$|\sigma| < \sigma^y \iff d\varepsilon_p = 0 \quad \delta q_i = 0$$

$$|\sigma| = \sigma^y \iff \delta q_i = \sigma d\varepsilon_p \geq 0$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

La théorie de l'endommagement (Kachanov, 56 ; Lemaitre, 77)



$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S(1-d)} = \frac{\sigma}{1-d}$$

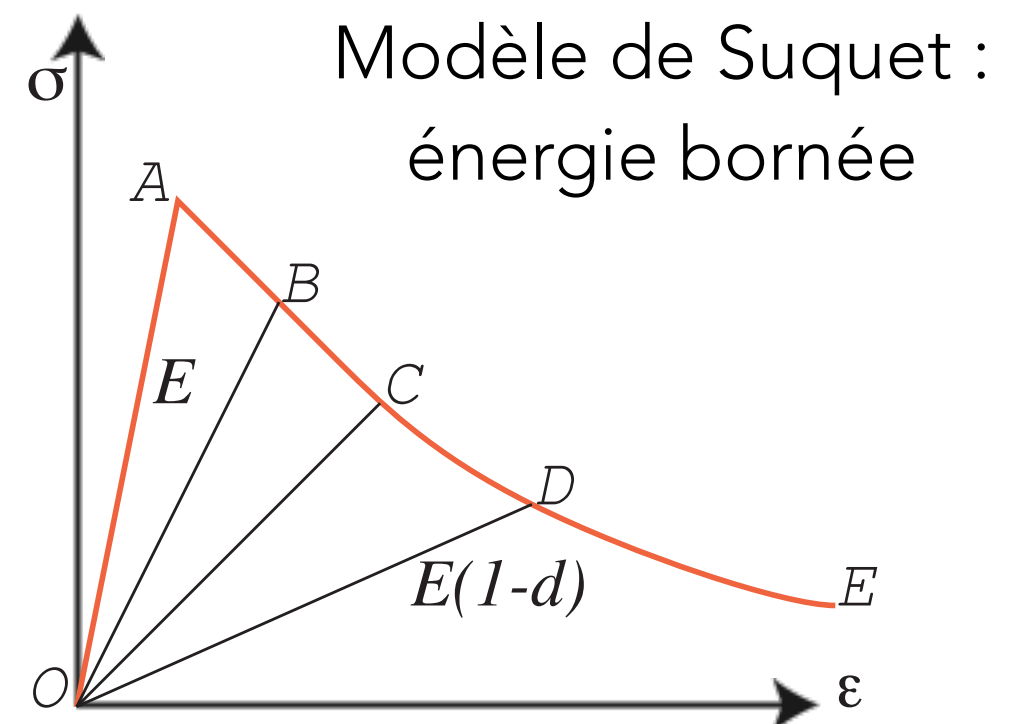
Hypothèse : la relation de comportement du matériau sain est conservée, sur la contrainte effective :

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon$$

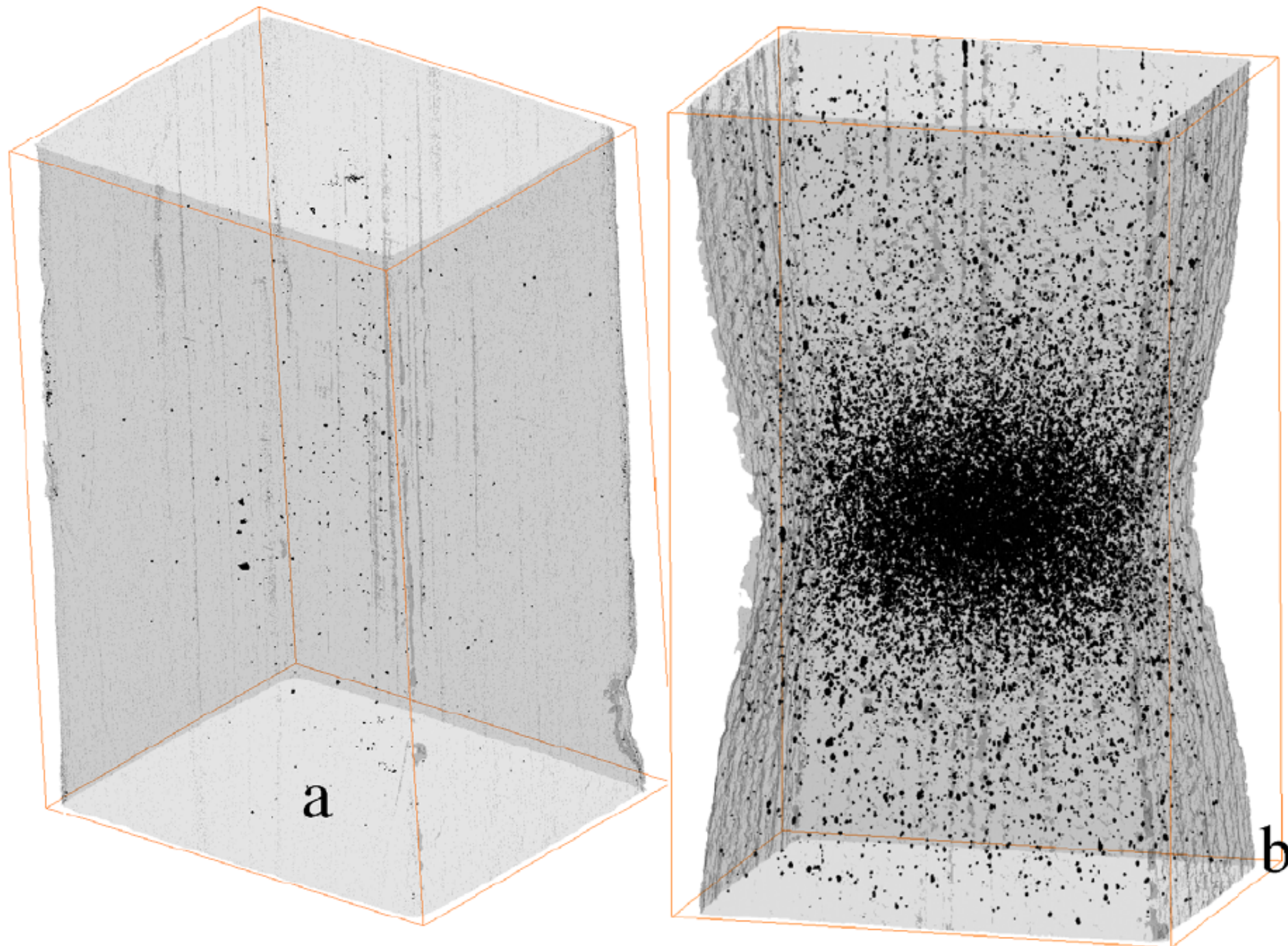
$$\Rightarrow \sigma = E(1-d)\varepsilon$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = E(1-d)$$

Cela revient à une diminution du module d'élasticité apparent (macro)



Aujourd'hui, on dispose de confirmations expérimentales de la théorie :



Thèse de doctorat de C. Landron, INSA de Lyon, 2011

2 Le principe de Curie

Pierre Curie, 1894 : « *les conséquences sont au moins aussi symétrique que les causes* ».

ou

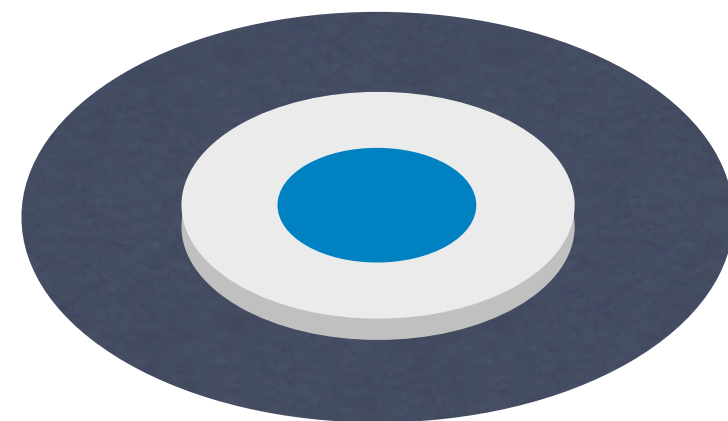
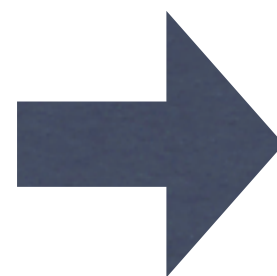
Chalmers, 1970 : « *Le groupe de symétrie des conséquences contient celui des causes* »

ou encore : $\mathcal{S}(\text{causes}) \subset \mathcal{S}(\text{consequences})$

Exemple (vécu) :



orthotrope
 $\mathcal{D}_4$



isotrope transverse
 $\mathcal{D}_\infty$

Cas des bifurcations : mise en échec de ce principe.



Généralisation du principe : « *Le groupe de symétrie de la moyenne (sur l'orbite) des conséquences contient celui des causes* »



Ce principe n'est en général pas pris en compte dans l'écriture des modèles de mécanique des matériaux.

Mais il est respecté de part l'écriture intrinsèque du problème.

Quelles sont les causes ?

- le matériau : son élasticité (tenseur $\mathbf{C}$), sa micro-structure (tenseur de structure, d'ordre en général plus élevé) ?
- la sollicitation : contrainte ou déformation ? En général ils n'ont pas le même groupe de symétrie !

Quelles sont les conséquences ?

- La nouvelle élasticité, la nouvelle structure

Le but de ce travail était d'établir un modèle d'endommagement respectant le principe de Curie et le formalisme TPI, en tenant compte des causes ci-dessus.

Hypothèse : le tenseur d'élasticité contient toute l'information matériau (pas de tenseur de structure).

3 Décomposition de Kelvin

Le tenseur d'élasticité, du 4ème ordre : $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ s'écrit sous forme de matrice 6x6 dans une base des tenseurs symétriques du second ordre $\mathbf{B}^I \otimes \mathbf{B}^J$.

$$\mathbf{B}^1 = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1,$$

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2,$$

$$\mathbf{B}^3 = \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3,$$

$$\mathbf{B}^4 = (\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2)/\sqrt{2},$$

$$\mathbf{B}^5 = (\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3)/\sqrt{2},$$

$$\mathbf{B}^6 = (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1)/\sqrt{2}.$$

Relation de comportement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}.$$

Kelvin [1856], Rychlewsky [1984], Ostrosablin [2008] (...) proposent la diagonalisation du tenseur d'élasticité.

$$\mathbb{C} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix}_{\mathbf{E}^I \otimes \mathbf{E}^J} \quad \begin{aligned} \mathbb{C} : \mathbf{E}^i &= \lambda^i \mathbf{E}^i \\ \lambda^i &\geq 0 \\ \mathbf{E}^i : \mathbf{E}^j &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

où les $\mathbf{E}^I$ sont des *modes propres*. Il existe donc 6 déformations orthogonales telles que les contraintes leurs sont proportionnelles.

Ces parties ont même groupe de symétrie.

On en déduit la décomposition de $\mathbf{C}$ en somme de *projecteurs* :

$$\mathbb{C} = \sum_I \lambda_I \underbrace{\mathbf{E}^I \otimes \mathbf{E}^I}_{\mathbb{P}^i}$$

où les λ_I sont les *modules de Kelvin*. Ce sont des raideurs (Pa).

L'idée initiale (Geymonat, François) consistait à « mettre un d devant les λ ». Cela impose de conserver les modes propres initiaux, en faisant fi de la symétrie de la sollicitation.

Plusieurs modèles ont été écrits de cette manière, parfois en supposant que l'on conservait un groupe de symétrie particulier (ex. orthotrope).

Dans ce travail, on s'attache à laisser évoluer (« tourner ») les modes propres en fonction de la sollicitation.

Cette dernière est, au choix, la contrainte (e.g. modèles de plasticité) ou la déformation (e.g. modèles d'endommagement).

Grâce à la décomposition de Kelvin, nous pouvons utiliser les **parties propres ϵ^i et σ^i** qui, colinéaires, **possèdent le même groupe de symétrie**, éliminant de fait ce choix arbitraire.

4 Le modèle proposé

4.1 Variables d'état. On choisit :

- la déformation ε
- tenseurs d'endommagement $\mathbb{D}^i$ du 4^{ème} ordre, initialement à 0

4.2 Potentiel d'état (énergie libre de Helmholtz).

$$2\rho\Psi(\varepsilon, \mathbb{D}^i) = \varepsilon : \sum_{i=1}^I \lambda^i (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \varepsilon$$

Motivation : extension 3D de la théorie 1D initiale $2\rho\Psi = E(1-d)\varepsilon^2$ de l'endommagement (Kachanov, 56 ; Lemaitre, 77).

Par dérivation par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$, on obtient $\boldsymbol{\sigma}$, la force thermodynamique associée à $\boldsymbol{\varepsilon}$ et le tenseur d'élasticité actuel (tangent) $\mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^I \lambda^i (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^I \lambda^i (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i).$$

Les $\mathbb{D}^i$ ont le sens d'une perte de rigidité au sein du sous espace défini par les $\mathbb{P}^i$.

La **force thermodynamique** associée aux $\mathbb{D}^i$ est :

$$\mathbb{Y}^i = -\partial \rho \Psi / \partial \mathbb{D}^i = \frac{1}{2} \lambda^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i = \frac{1}{2\lambda^i} \boldsymbol{\sigma}^i \otimes \boldsymbol{\sigma}^i$$

4.3 La surface seuil retenue est une fonction des VE qui définit le **domaine d'élasticité** (dans lequel les $\mathbf{D}^i$ n'évoluent pas) .

On choisit une définition énergétique et une surface par mode :

$$f^i(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{D}^i) = \frac{\lambda^i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon} - W^i$$

$$\iff f^i(\mathbb{Y}^i, \mathbb{D}^i) = \|\mathbb{Y}^i\| - \mathbb{Y}^i :: \mathbb{D}^i - W^i$$

À l'état initial, cela correspond à borner l'énergie par mode de Kelvin.

C'est une extension des critères énergétiques de Beltrami [1885] ($\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$), de Von Mises [1913] ($\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{P}^D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$), proche de ceux de Marigo [1985], Drucker-Prager, elliptique, Cam-Clay...

4.4 Évolution

Il y a évolution (endommagement) si $f^i = 0$ et si $\frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : d\boldsymbol{\varepsilon} > 0$

alors, le principe de dissipation maximale (Hill) impose que :

$$d\mathbb{D}^i = \frac{\partial f^i}{\partial \mathbb{Y}^i} d\Lambda^i = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i\|} \otimes \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i\|} - \mathbb{D}^i \right) d\Lambda^i$$

où $d\Lambda^i$ sont des multiplicateurs de Lagrange donnés par les équations de consistance $df^i = 0$:

$$d\Lambda^i = 2 \frac{\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : d\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Les variables d'endommagement $\mathbf{D}^i$ évoluent « naturellement » au sein du sous-espace $\mathbb{P}^i$ initial, selon la direction de la (partie de la) sollicitation $\boldsymbol{\varepsilon}'$ et indépendamment du choix contrainte-déformation.

4.5 Dissipation

Le formalisme TPI utilisé garanti la positivité de la dissipation (second principe). En l'occurrence :

$$\delta Q^i = \mathbb{Y}^i :: d\mathbb{D}^i = \rho \Psi^i d\Lambda = \underbrace{\frac{\partial f^i}{\partial \epsilon}}_{\text{condition d'écoulement}} : d\epsilon > 0$$

4.6 Bilan intermédiaire

- On a un modèle d'endommagement à formalisme TPI.
- L'utilisation de la décomposition de Kelvin ne privilégie pas contrainte ou déformation.
- Les sous-espaces propres initiaux peuvent être fractionnés par l'évolution. L'état va donc changer, en fonction de l'état actuel (du matériau—défini par **C**) et de la sollicitation.

5 Fonctionnement du modèle

Matériau initialement isotrope

$\lambda^1 = 3K$	$\lambda^2 = 2\mu$	W^H	W^D
3	3/4	1/4	1/6

Espace
hydrostatique
1D

Espace
déviatorique
5D

Base
 $\mathbf{I}/\sqrt{3}$

Base
complémentaire

$$\mathbb{C}(0) = 3K\mathbb{P}^H + 2\mu\mathbb{P}^D$$

Chargement 1 œdométrique :

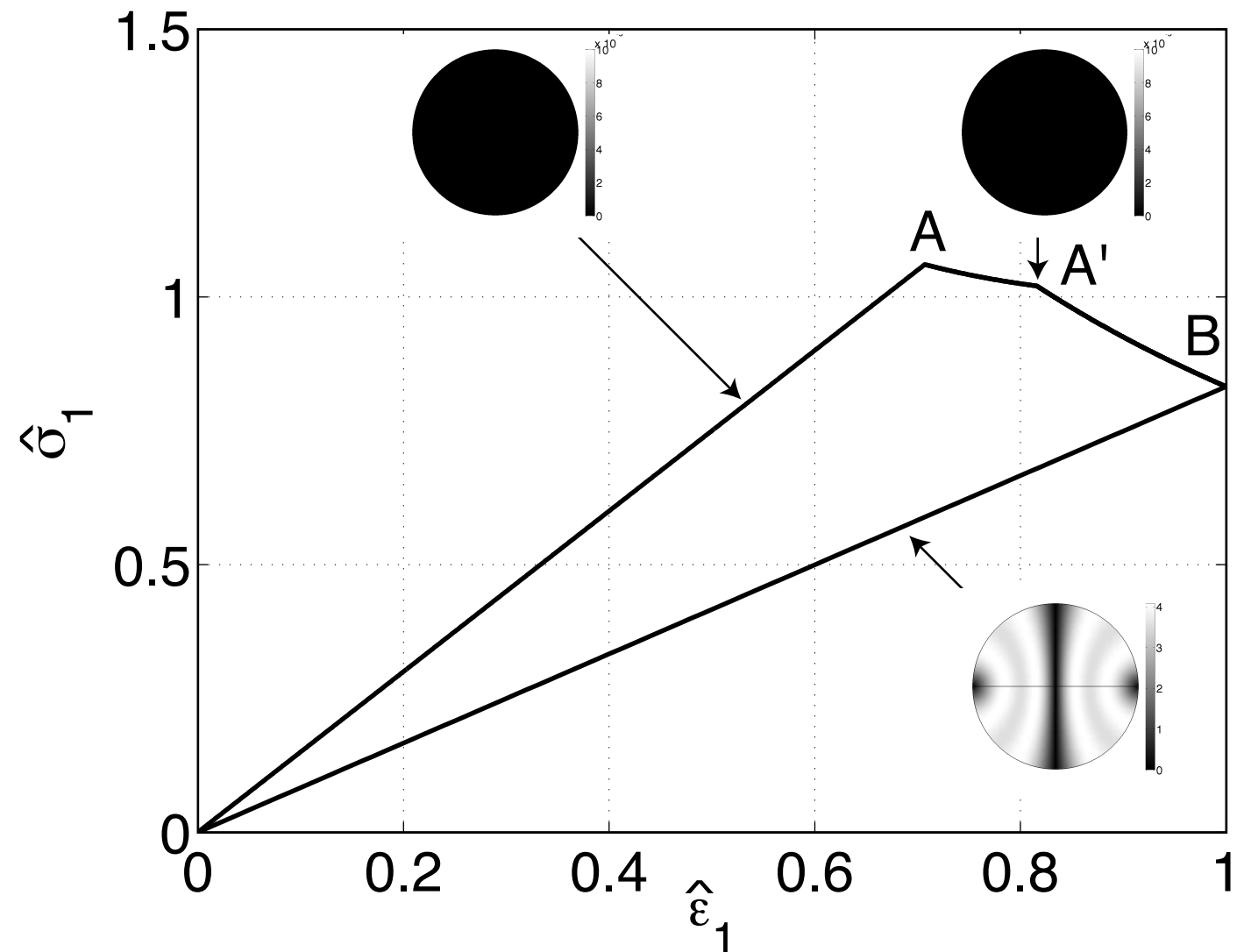
$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \varepsilon(t) \mathbf{B}^1$$

$$\mathbf{B}^1 = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1,$$

OA en élasticité

AA' : le mode isotrope
s'endommage

A'B : le mode déviatorique
est affaibli selon $\mathbf{B}^1$, mais
intact selon les 4D restantes
 $\Rightarrow$ isotropie transverse induite



Tenseur d'élasticité en B :

$$\mathbb{C} = 3K(1 - d^H) \mathbb{P}^H + 2\mu(\mathbb{P}^D - d^{D1} \mathbf{K}^{D1} \otimes \mathbf{K}^{D1}).$$

$$\mathbf{K}^{D1} = (2, -1, -1, 0, 0, 0)/\sqrt{6}$$

ce dernier est le déviateur de $\mathbf{B}^1$

Chargement 2 suivant : cisaillement

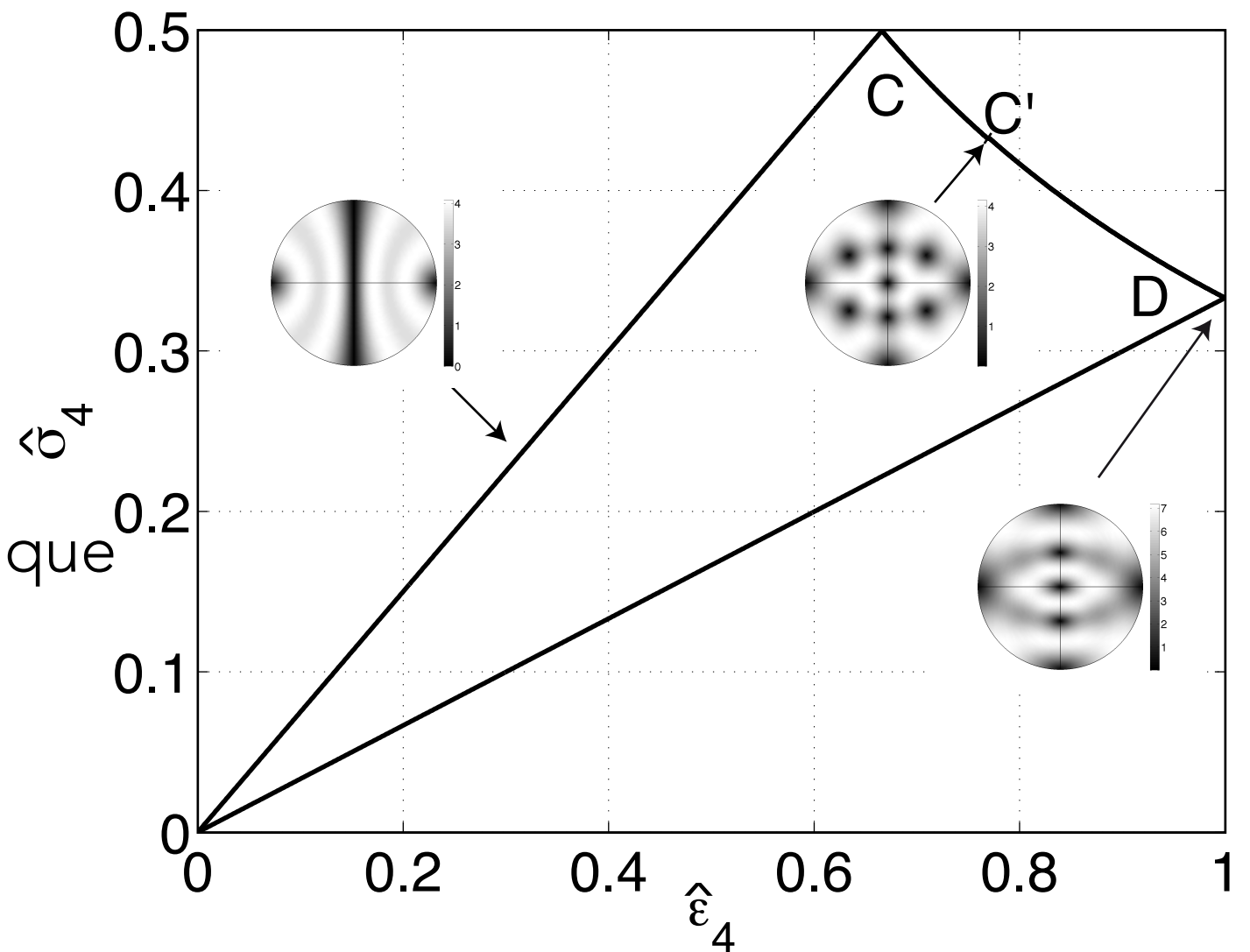
$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \varepsilon(t) \mathbf{B}^4$$

$$\mathbf{B}^4 = (\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2) / \sqrt{2},$$

OC en élasticité :

pas de changement de $\mathbf{C}$

CD : un second mode déviatorique s'endommage, selon $\mathbf{B}^4$



L'élasticité en D est alors :

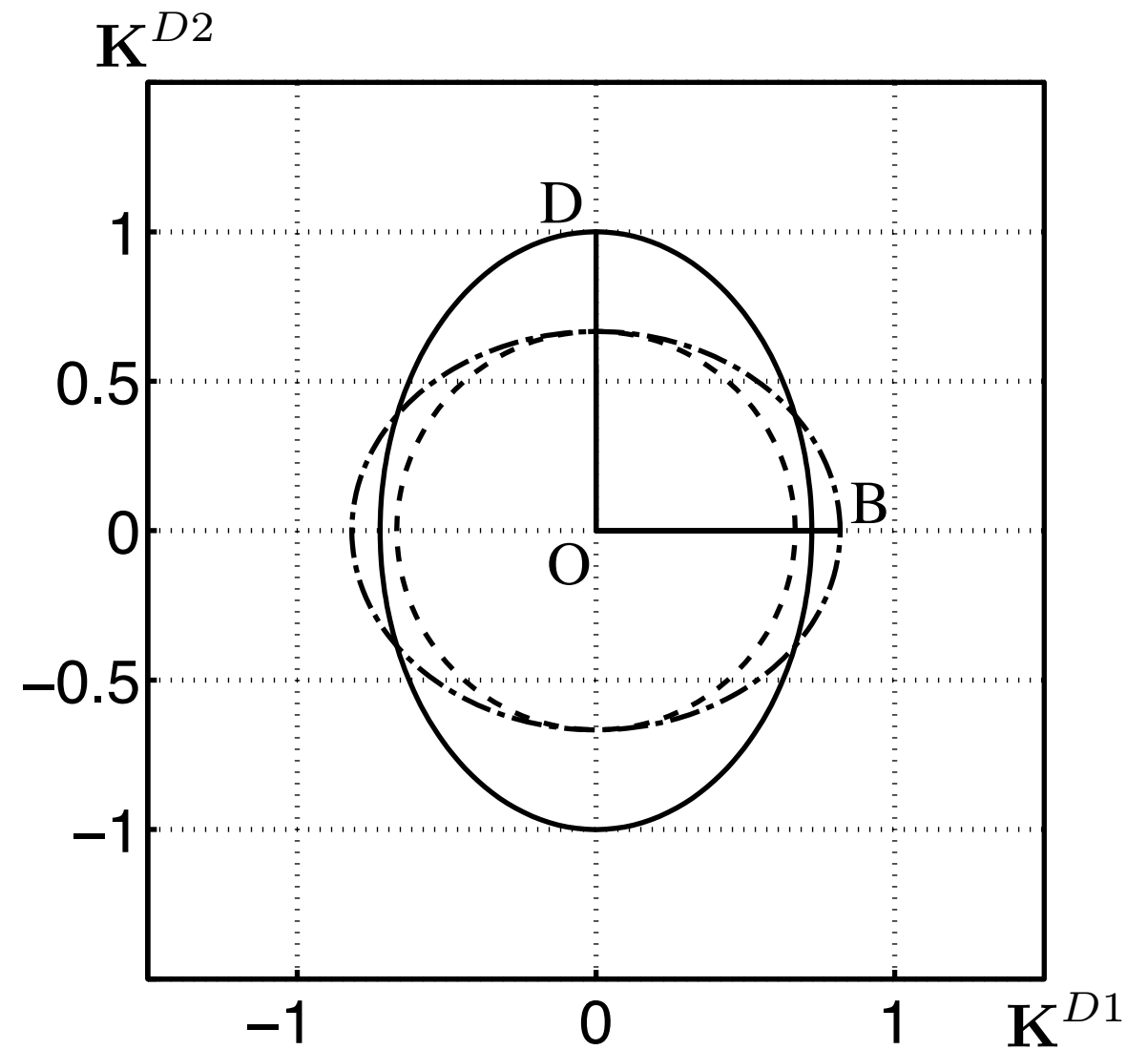
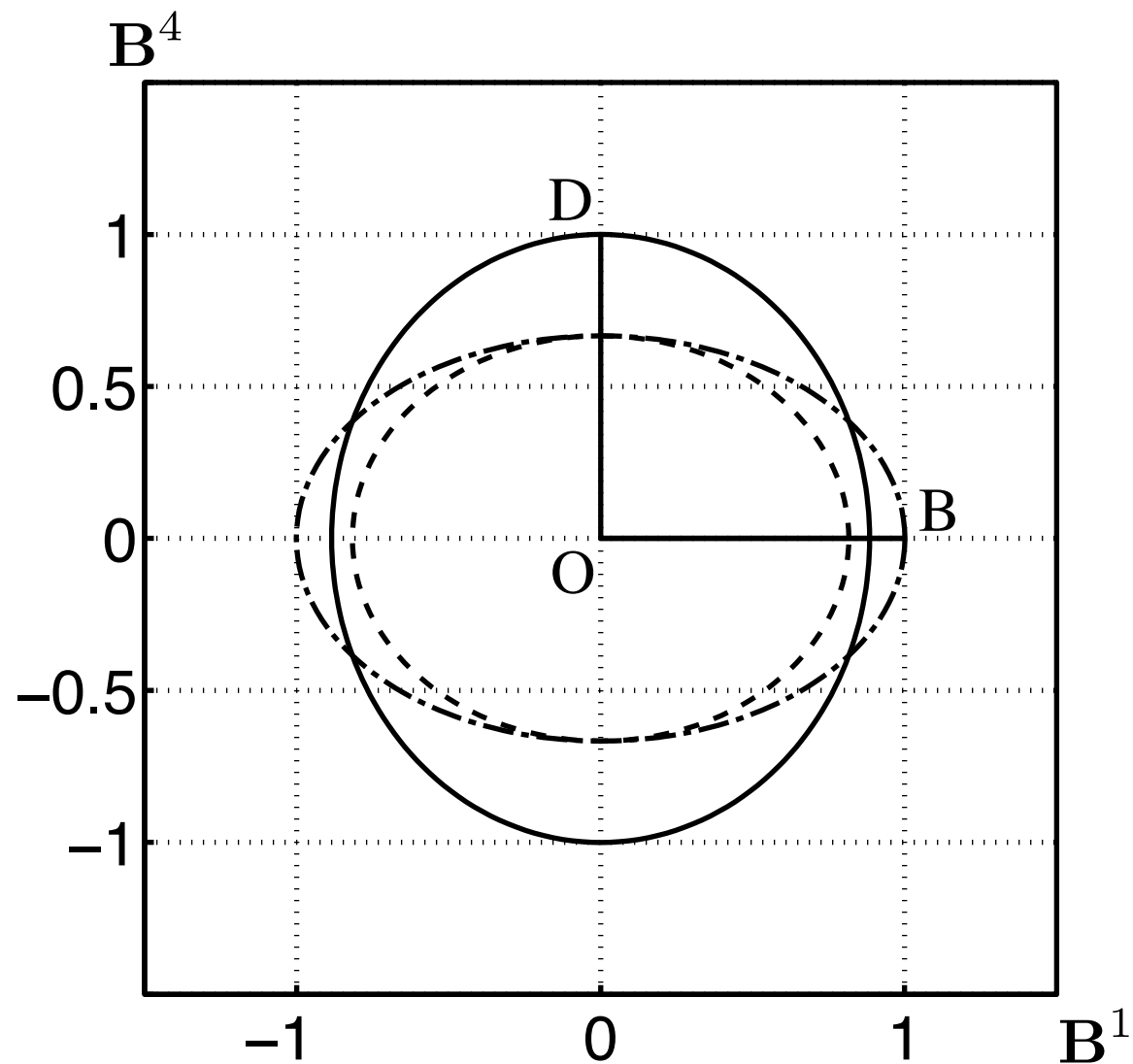
$$\mathbb{C} = 3K(1 - d^H) \mathbb{P}^H + 2\mu(\mathbb{P}^D - d^{D1} \mathbf{K}^{D1} \otimes \mathbf{K}^{D1} - d^{D2} \mathbf{K}^{D2} \otimes \mathbf{K}^{D2})$$

$$\mathbf{K}^{D2} = \mathbf{B}^4$$

ce qui correspond à une symétrie tétragonale (celle de $\mathbf{B}^4 \otimes \mathbf{B}^4$), qui **contient** celle de $\mathbf{B}^4$ (orthotrope).

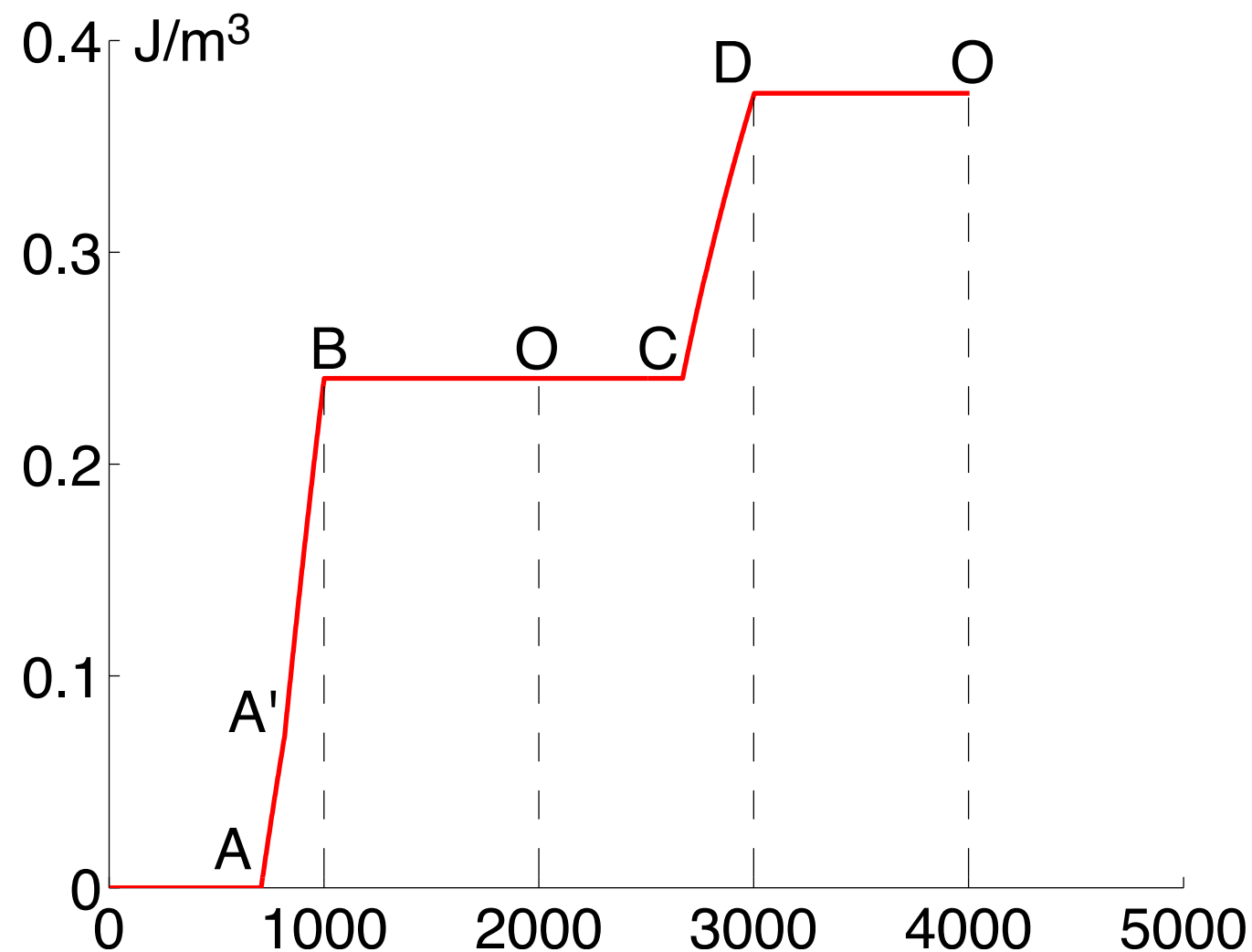
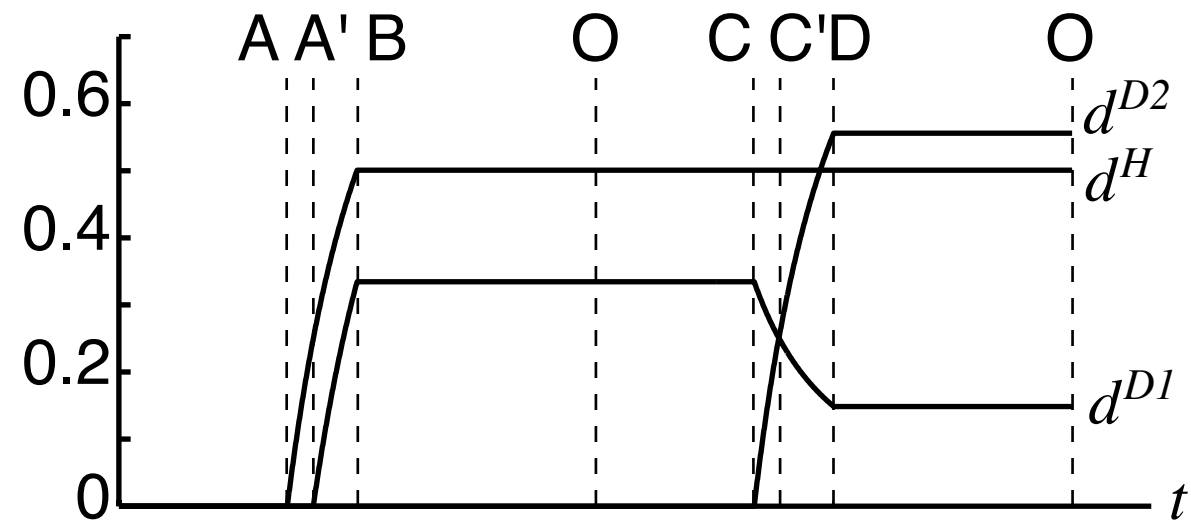
En C' , il y a —fugitivement— une relation entre d^{D1} et d^{D2} qui conduit à une symétrie cubique.

Évolution dans l'espace des déformations, et surfaces seuil, pour le trajet OBOD :

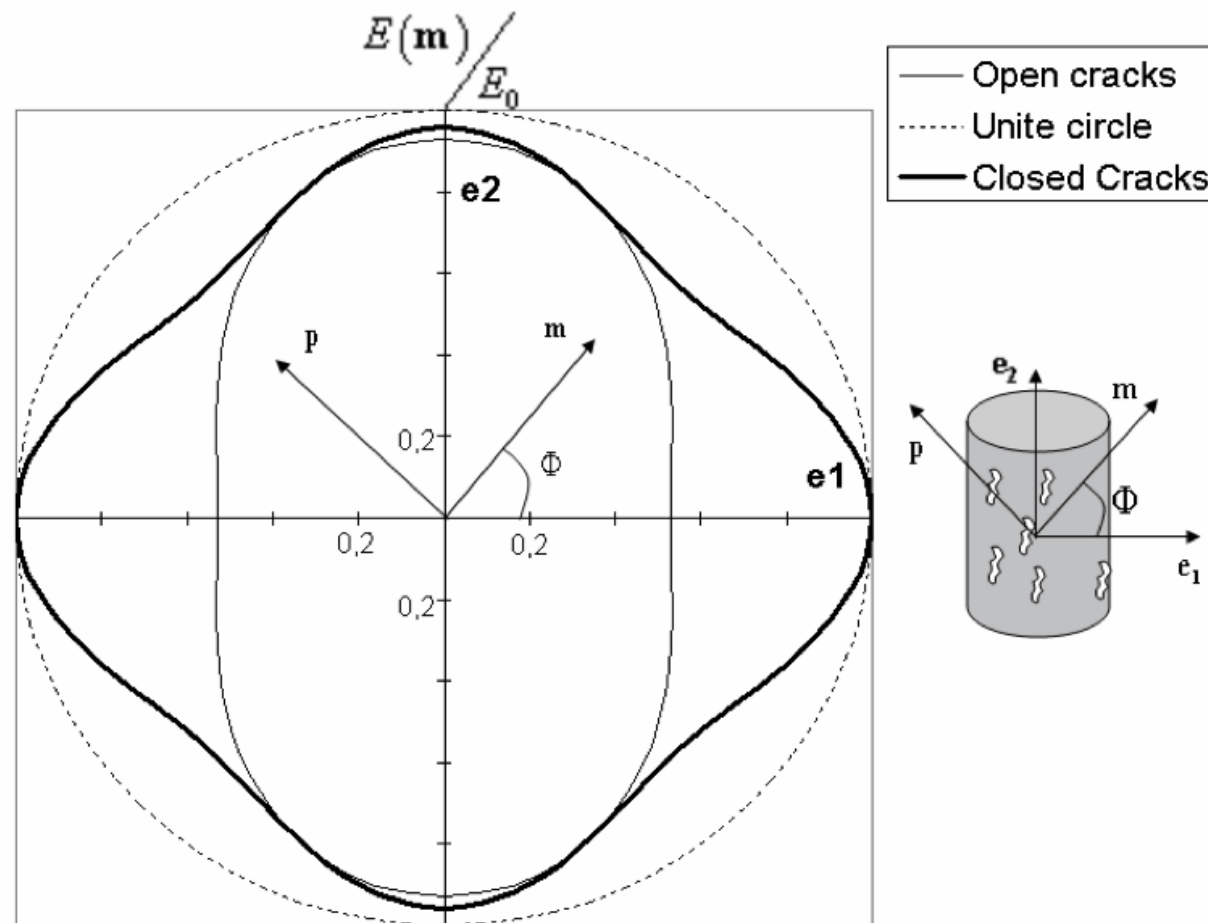


Le « dédommagement » selon B^1 est quelque peu contraire à la doctrine de l'endommagement.

L'évolution des trois dommages au cours du « temps » montre aussi ce fait. Néanmoins, la dissipation thermique est toujours positive :



Remarque : certains résultats expérimentaux font état de « dédommagement », par exemple :



Bargellini, Halm & Dragon, Arch. Mech. 58, 2006.

6 Scalaires et projecteurs d'endomangement

On généralise l'analyse précédente faite sur l'exemple. Les tenseurs d'endomangement $\mathbb{D}^i$ sont en fait des projecteurs pondérés, vers les sous-espaces des espaces propres initiaux définis par les $\mathbb{P}^i$

		matériau initial		
modules de Kelvin Projecteurs Base	...	λ^i		...
	...	$\mathbb{P}^i$		...
	...	$\underbrace{\mathbf{E}^{in}}_{N^i}$		...
		matériau endommagé		
modules de Kelvin Projecteurs Base	...	...	$\lambda^i(1 - d^{ip})$	...
	...	...	$\mathbb{P}^{ip}$	...
	...	...	$\underbrace{\mathbf{E}^{ipm}}_{M^{ip}}$	...

$$\mathbb{P}^i = \sum \mathbb{P}^{ip} \qquad \mathbb{D}^i = \sum_{p=1}^{P^i} d^{ip} \mathbb{P}^{ip},$$

Le tenseur d'élasticité peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^I \lambda^i \sum_{p=1}^{P^i} (1 - d^{ip}) \mathbb{P}^{ip}.$$

On a donc une description « minimale » de l'endommagement anisotrope par au plus 6 fonctions d^{ip} et six directions orthonormées P^{ip} , qui peuvent évoluer (« tourner ») au cours de l'évolution.

Expression de la contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{ip} = \lambda^i (1 - d^{ip}) \boldsymbol{\varepsilon}^{ip}$$

Expression de la surface de charge :

$$f^i = \frac{\lambda^i}{2} \sum_{p=1}^{P^i} (1 - d^{ip}) \boldsymbol{\varepsilon}^{ip} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ip} - W^i.$$

7 Vérification du principe de Curie

Sur les exemples, nous avons vu cette inclusion.

La conséquence est la variation d'élasticité :

$$d\mathbb{C} = - \sum_{i=1}^I \lambda^i d\mathbb{D}^i,$$

avec

$$d\mathbb{D}^i = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i\|} \otimes \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i\|} - \mathbb{D}^i \right) d\lambda$$

ce qui montre l'influence de la sollicitation (contrainte ou déformation).

La décomposition de Kelvin de l'élasticité actuelle :

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^I \lambda^i \sum_{p=1}^{P^i} (1 - d^{ip}) \mathbb{P}^{ip}.$$

donne le groupe de symétrie actuel (Rychlewsky, 86) :

$$\mathcal{S}(\mathbb{C}) = \bigcap_{i=1}^I \bigcap_{p=1}^{P^i} \mathcal{S}(\mathbb{P}^{ip})$$

Les endommagements actifs sont ceux pour lesquels :

$$\mathbb{P}^{ip} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i\|}$$

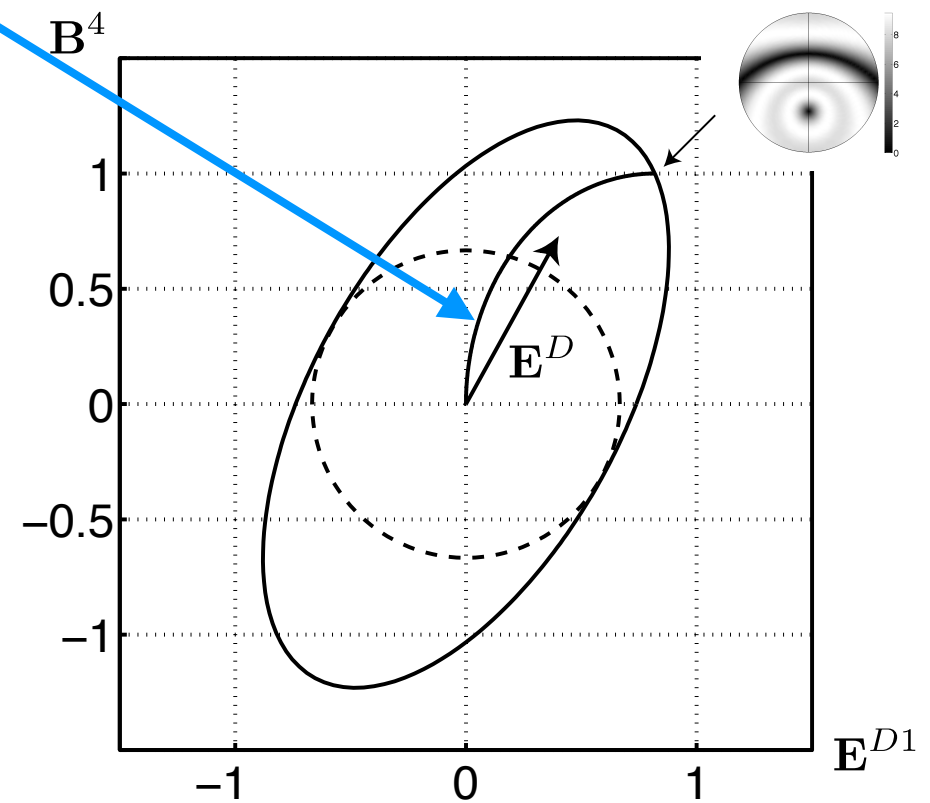
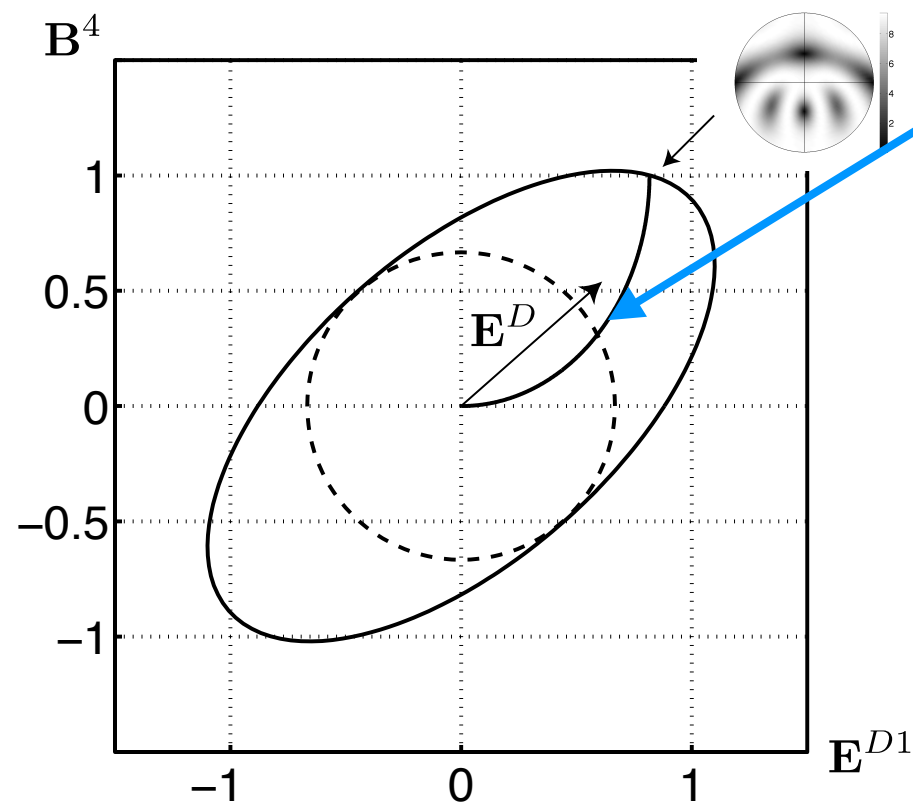
Il y en a au plus un par sous-espace propre initial (i). Le groupe de symétrie de la conséquence (**C**) contient donc celui des causes (la décomposition de **C** actuel et la sollicitation (enfin son $^2\otimes$, ce qui rend la conséquence un peu plus symétrique que le minimum requis) car :

$$\underbrace{\mathcal{S}(\boldsymbol{\varepsilon}^i)}_{Q(\boldsymbol{\varepsilon}^i) = \boldsymbol{\varepsilon}^i} \subset \underbrace{\mathcal{S}(\boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i)}_{Q(\boldsymbol{\varepsilon}^i) = \pm \boldsymbol{\varepsilon}^i}$$

Mais je n'ai pas de démonstration plus « propre » de l'inclusion
 $\mathcal{S}(\text{causes}) \subset \mathcal{S}(\text{conséquences})...$

8 Autres aspects de ce modèle

Dépendance au trajet de chargement. Modèle isotrope précédent.
Espace des déformations déviatoriques.



$$\mathbb{D}^D = d^D \mathbf{E}^D \otimes \mathbf{E}^D$$

$$\mathbf{E}^D = 0.75\mathbf{E}^{D1} + 0.66\mathbf{B}^4$$

$$d^D = 0.75$$

$$\mathbf{E}^D = 0.48\mathbf{E}^{D1} + 0.88\mathbf{B}^4$$

$$d^D = 0.76$$

Autre cas : matériau initialement isotrope

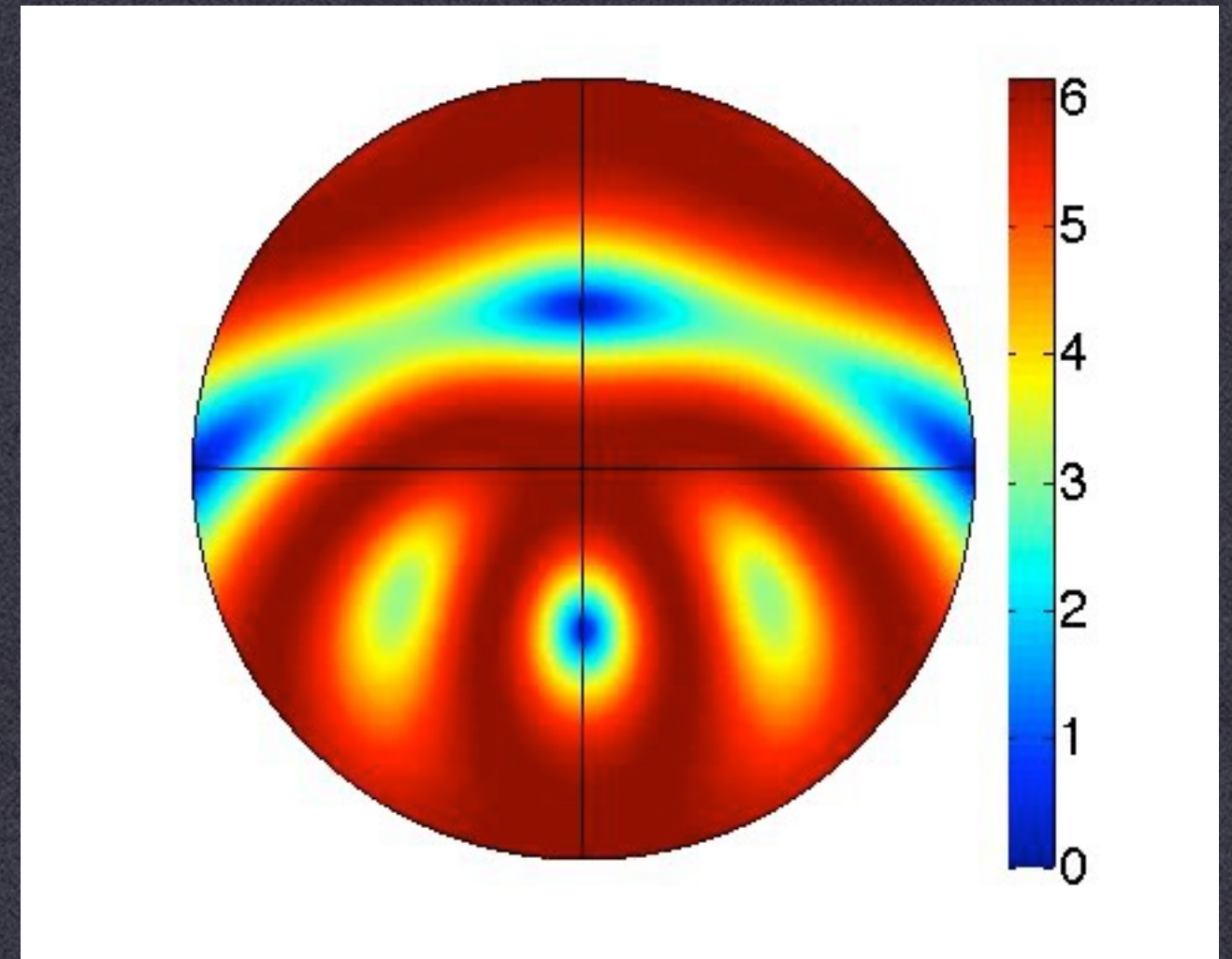
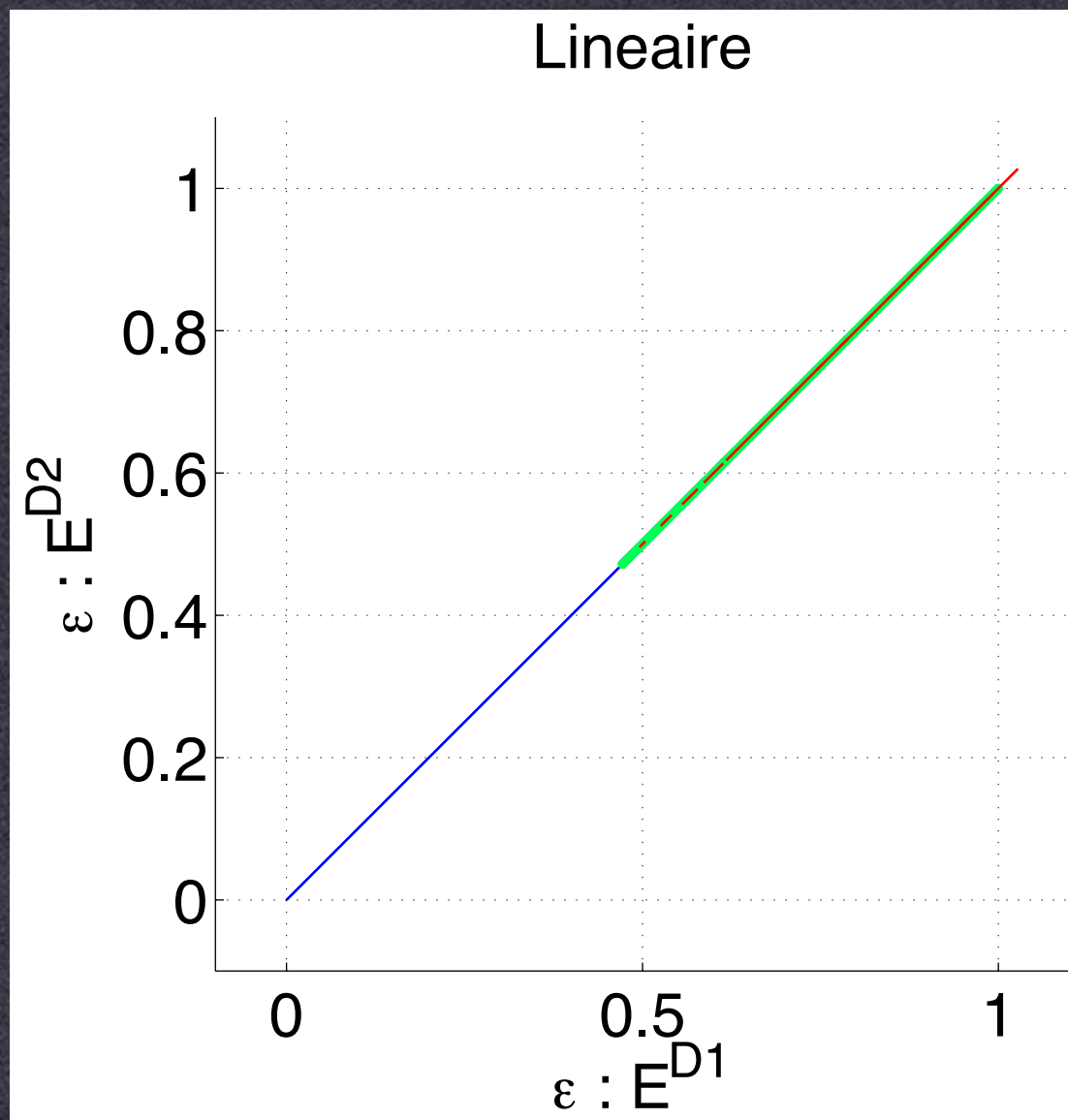
$3K$	2μ	W^h	W^D
3	3/4	1/4	1/6

Trajets dans le plan déviatorique :

Déviateur de la traction 1 - cisaillement 23

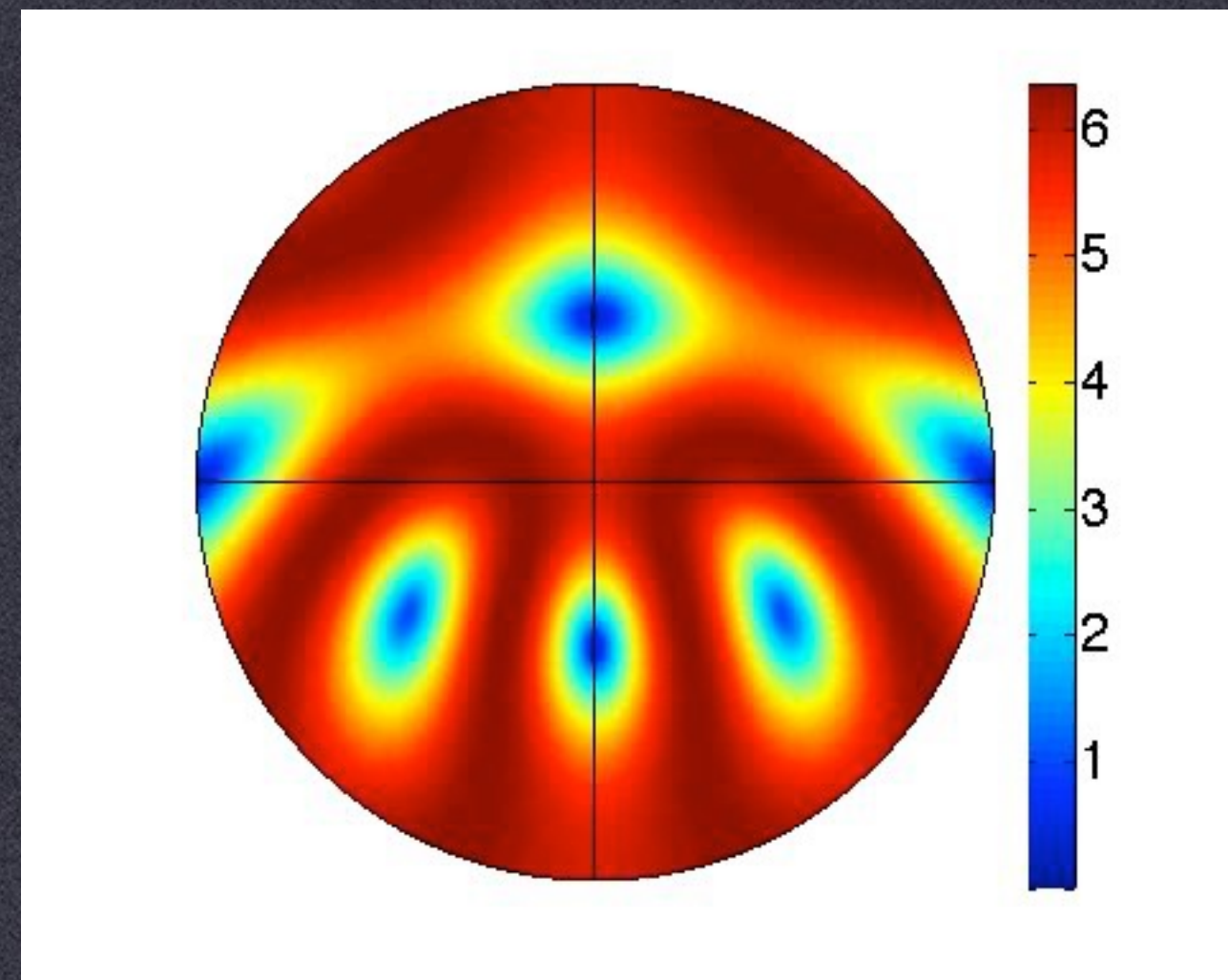
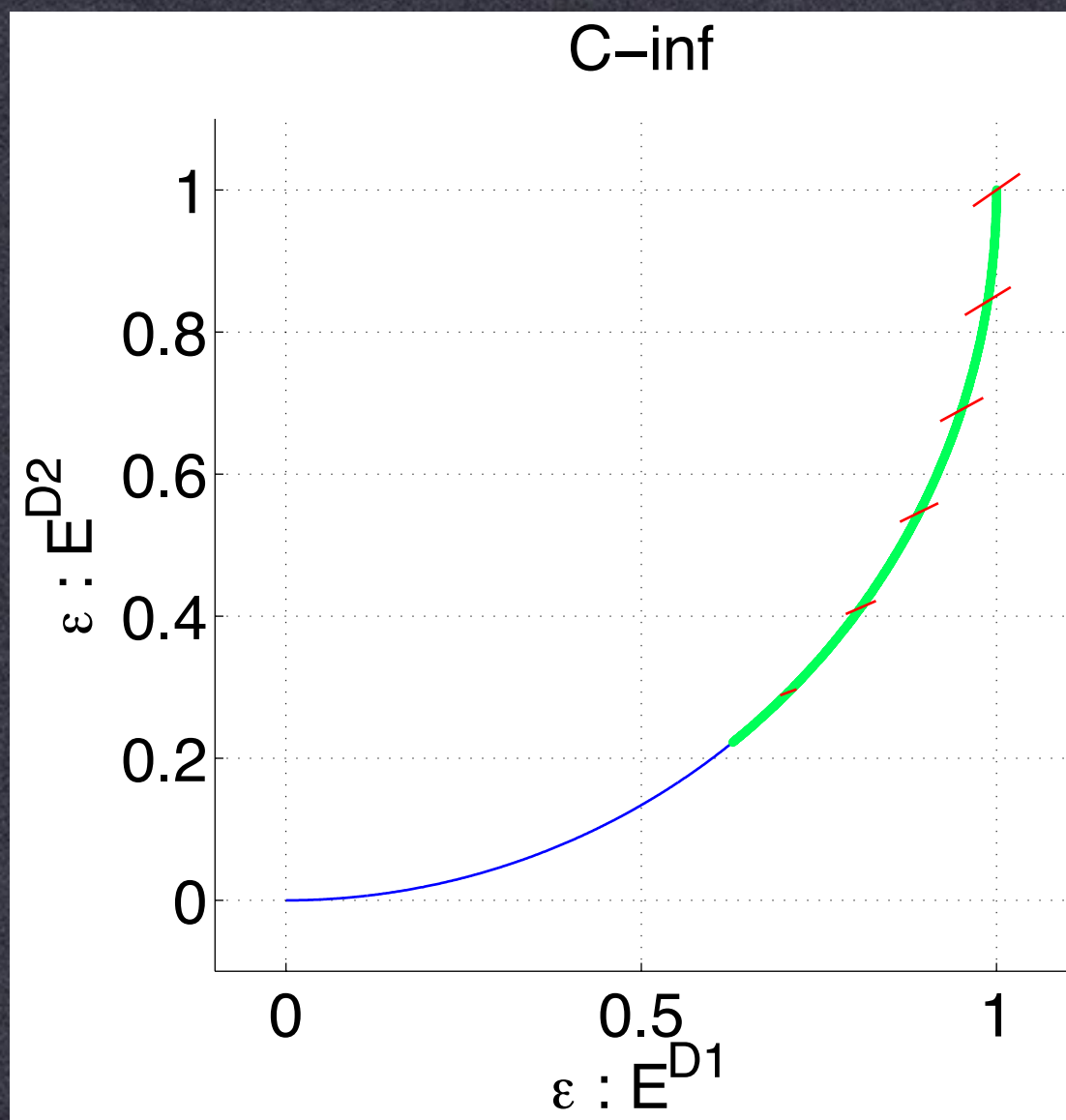
$$\mathbf{E}^{D1} = [2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 0, 0, 0]$$

$$\mathbf{E}^{D2} = (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2) / \sqrt{2}$$



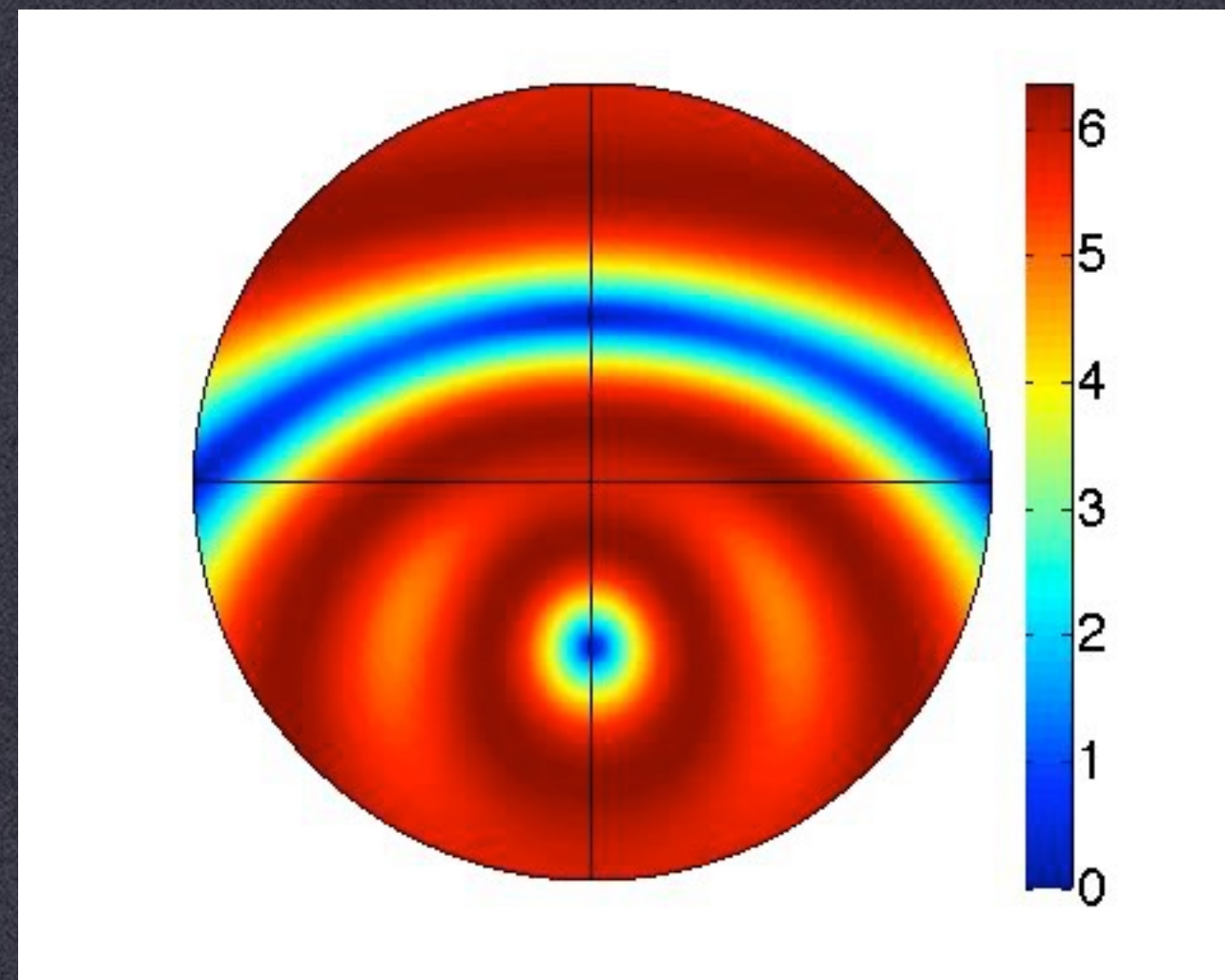
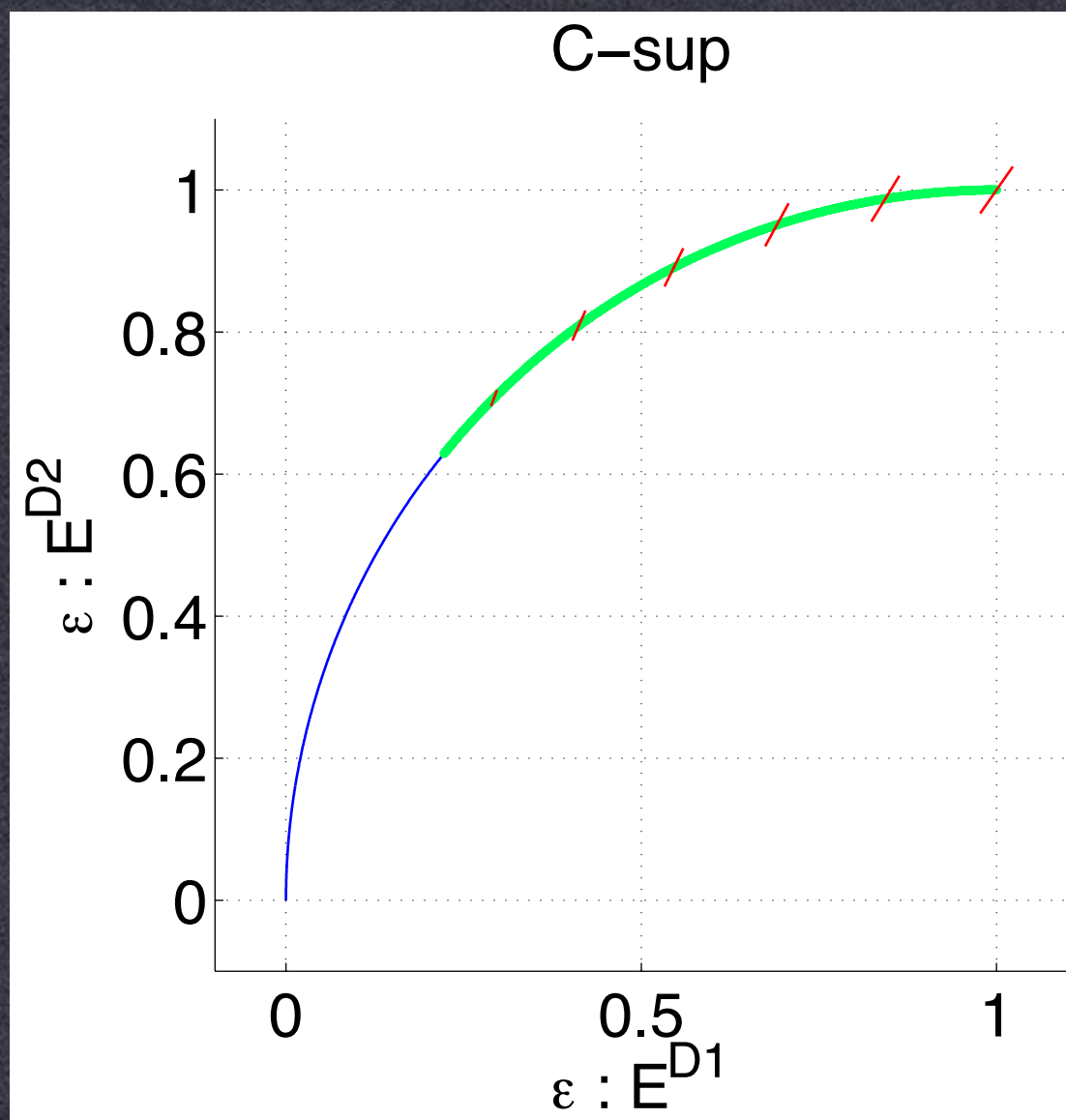
LINÉAIRE

GRUPE DE SYMÉTRIE DE EXE = ORTHOTROPE



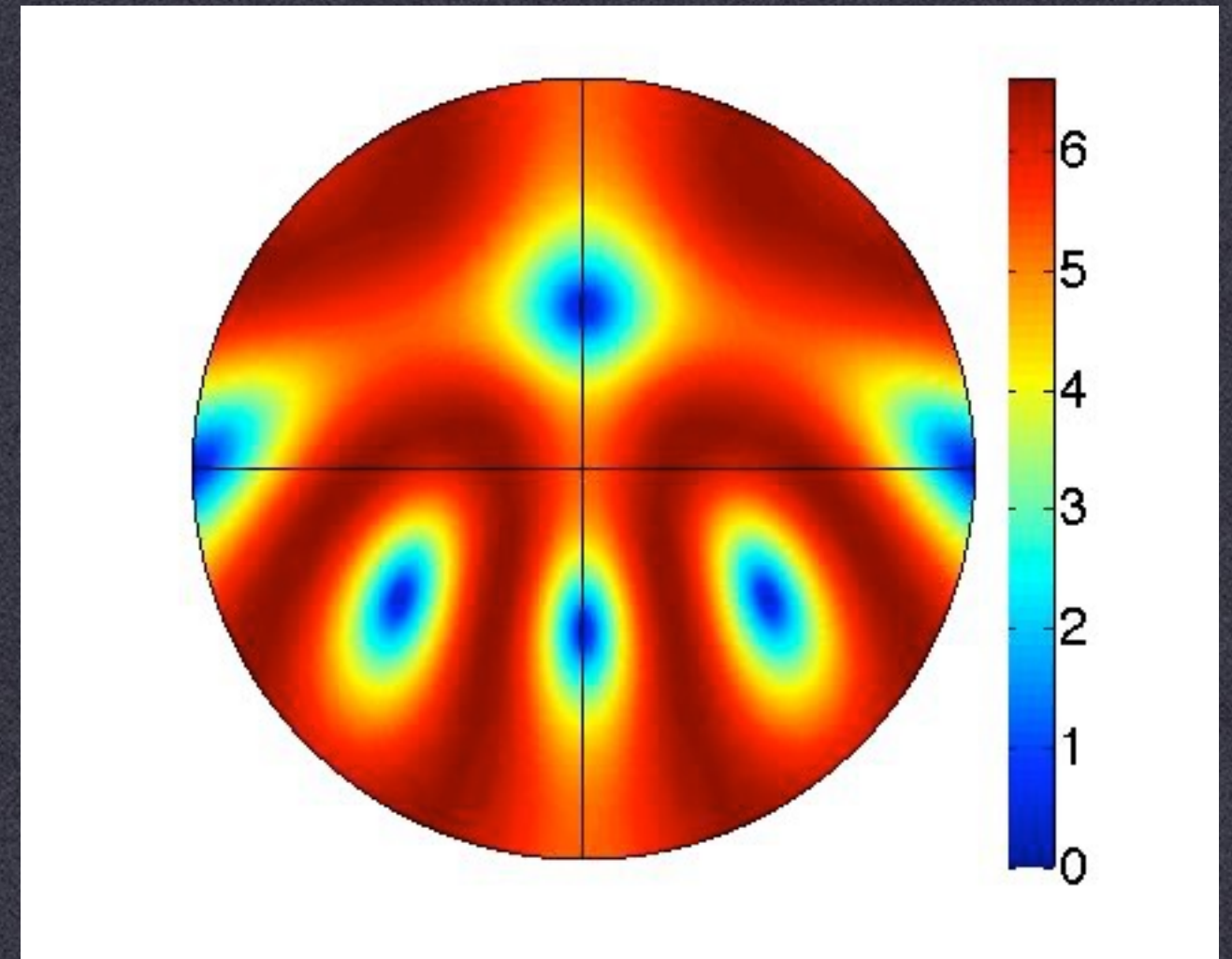
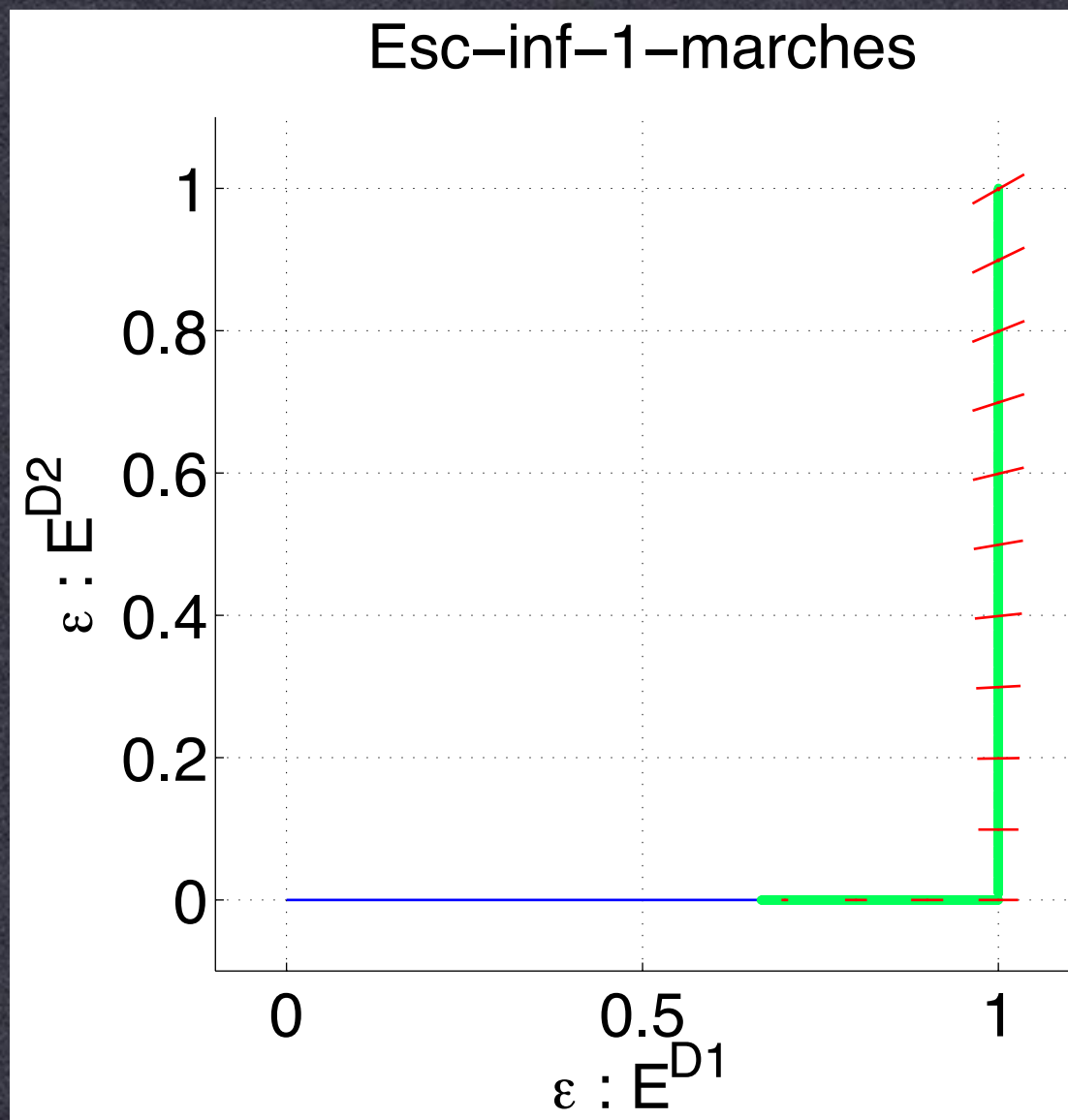
NON PROPORTIONNEL LISSE

DIRECTION TRACTION AFFAIBLIE : ON TEND VERS LE TÉTRAGONAL DE ED2XED2



NON PROPORTIONNEL LISSE

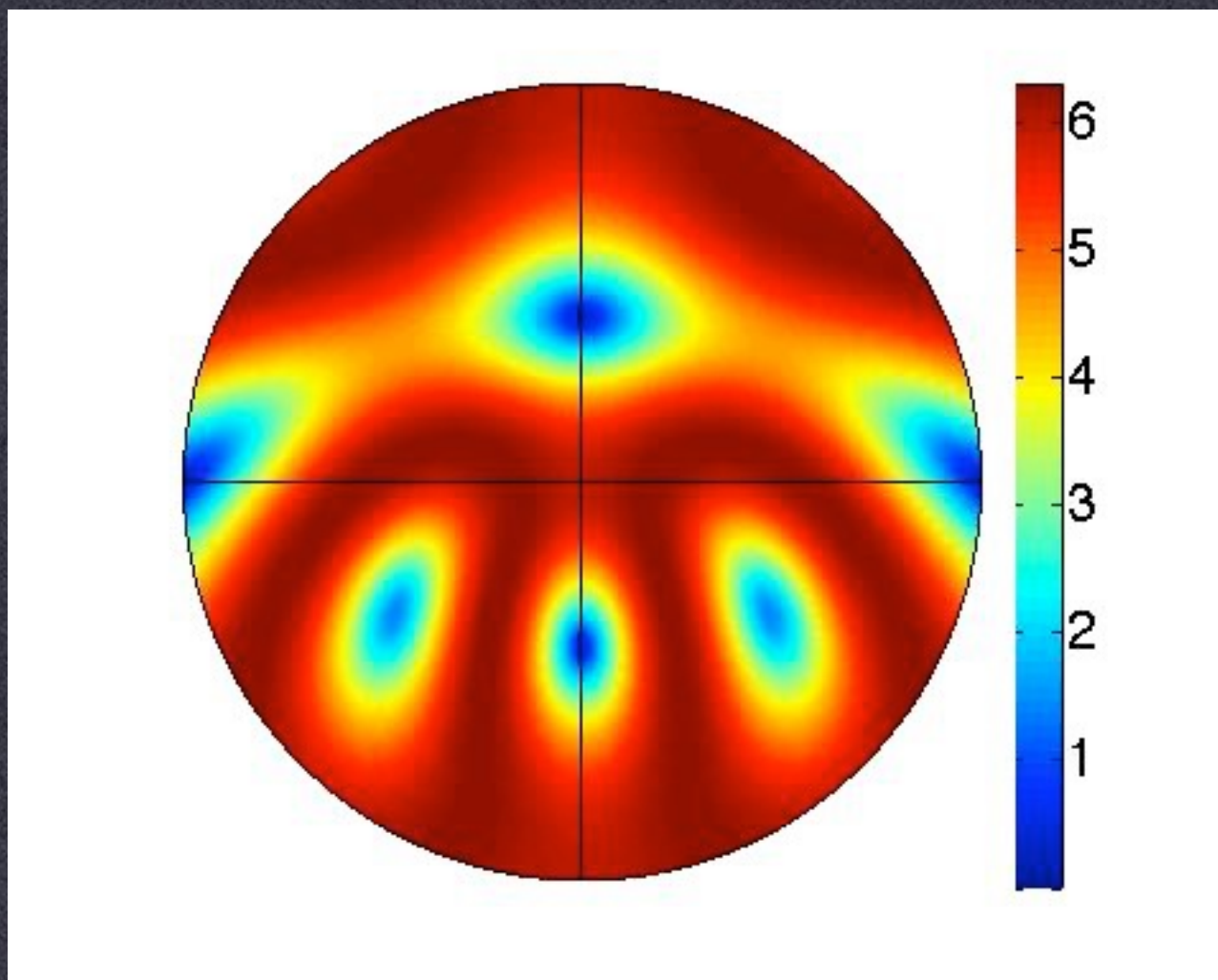
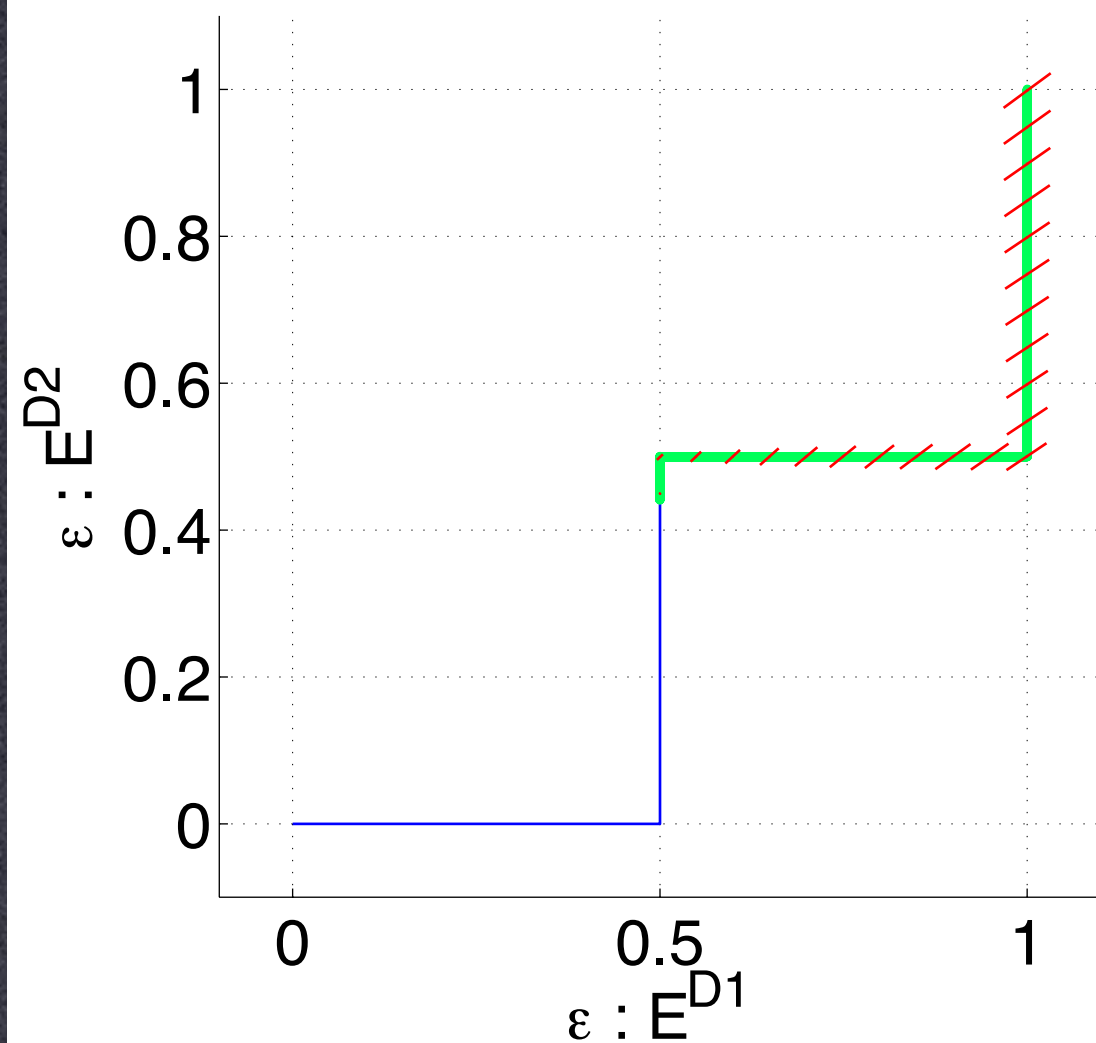
DIRECTION CISAILLEMENT AFFAIBLIE : ON TEND VERS L'ISOTROPIE TRANSVERSE DE LA TRACTION



NON PROPORTIONNEL AVEC ANGLE

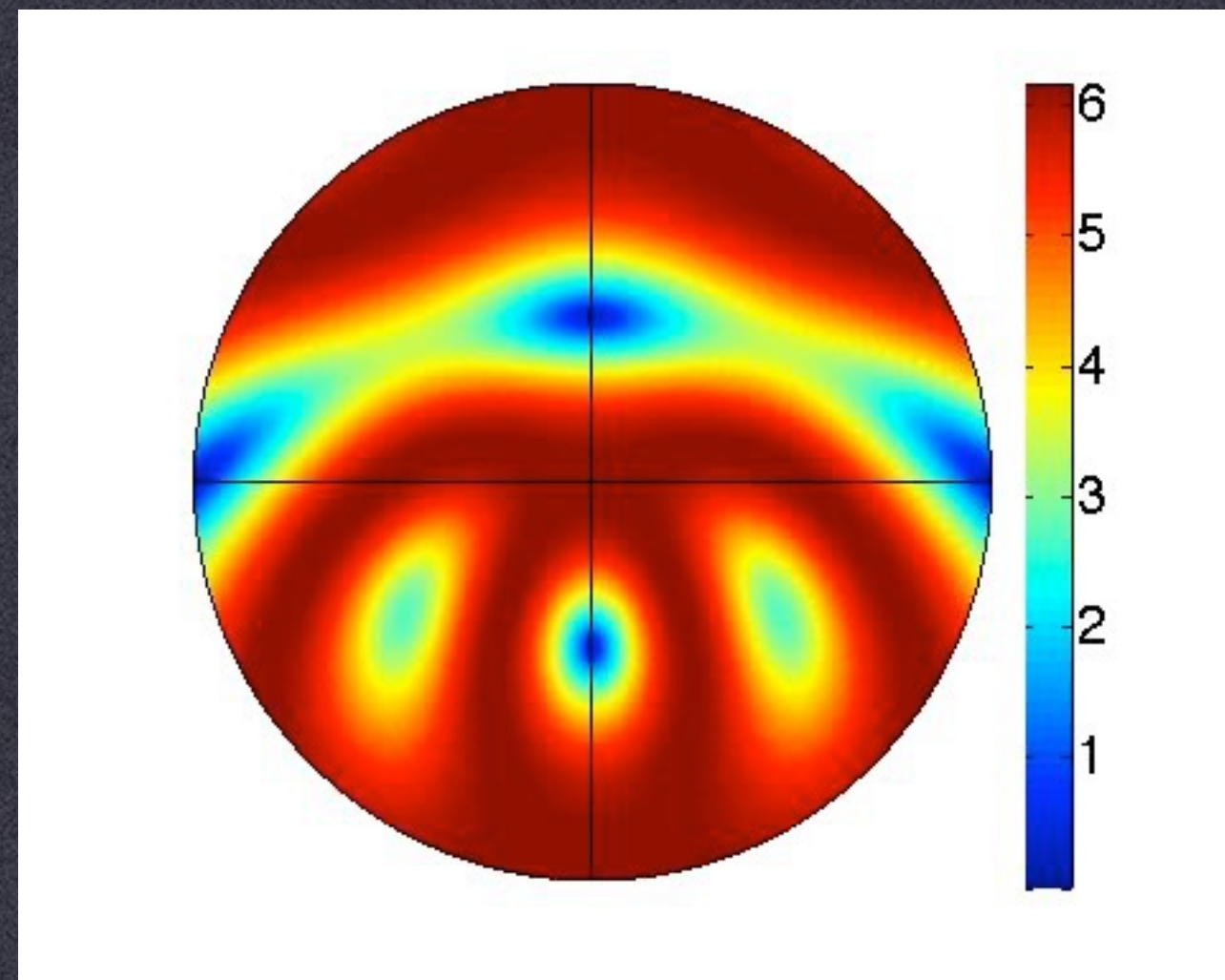
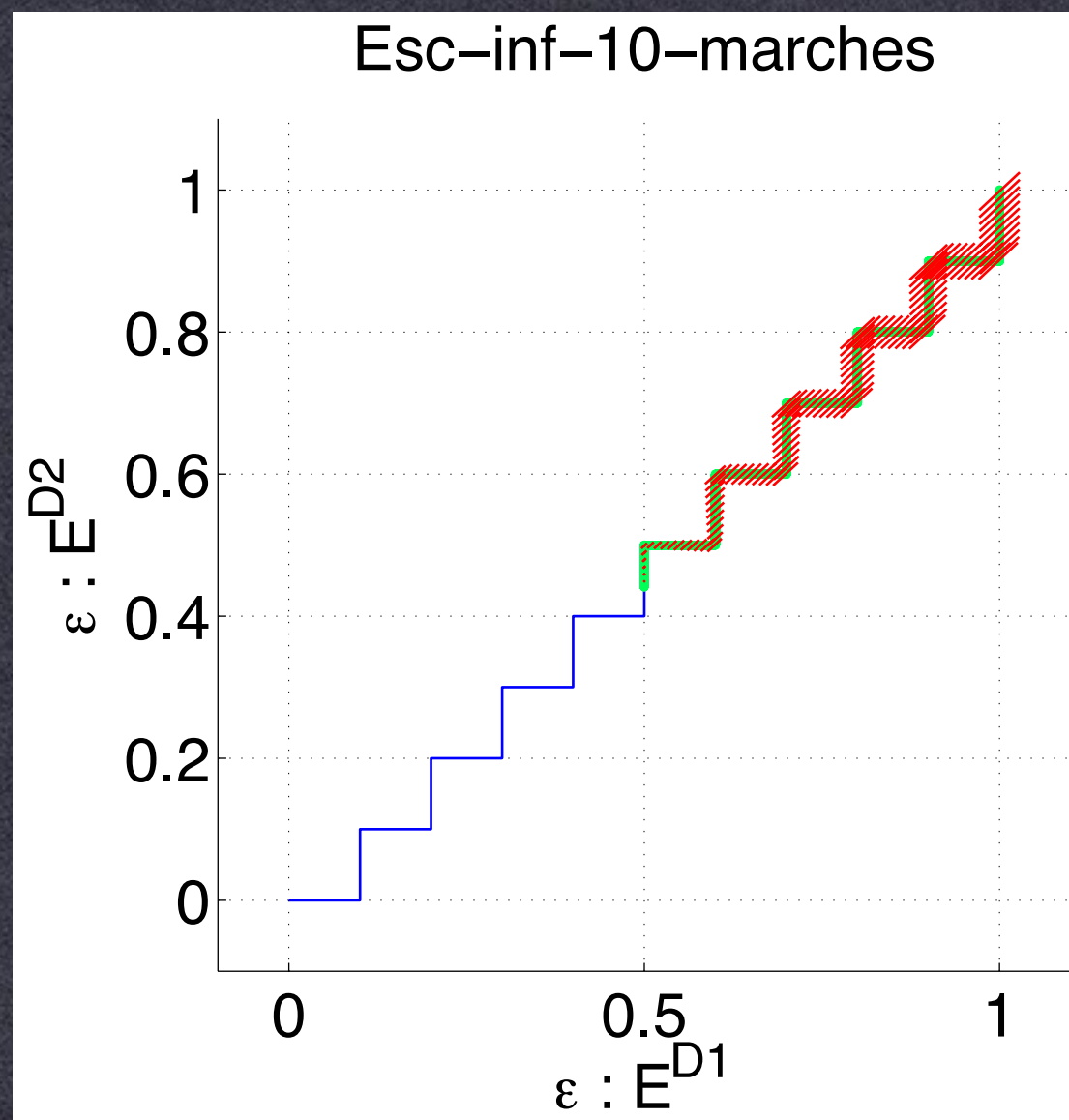
QUASI TETRAGONAL ASSOCIE AU CISAILLEMENT (TRACTION AFFAIBLIE)

Esc-inf-2-marches

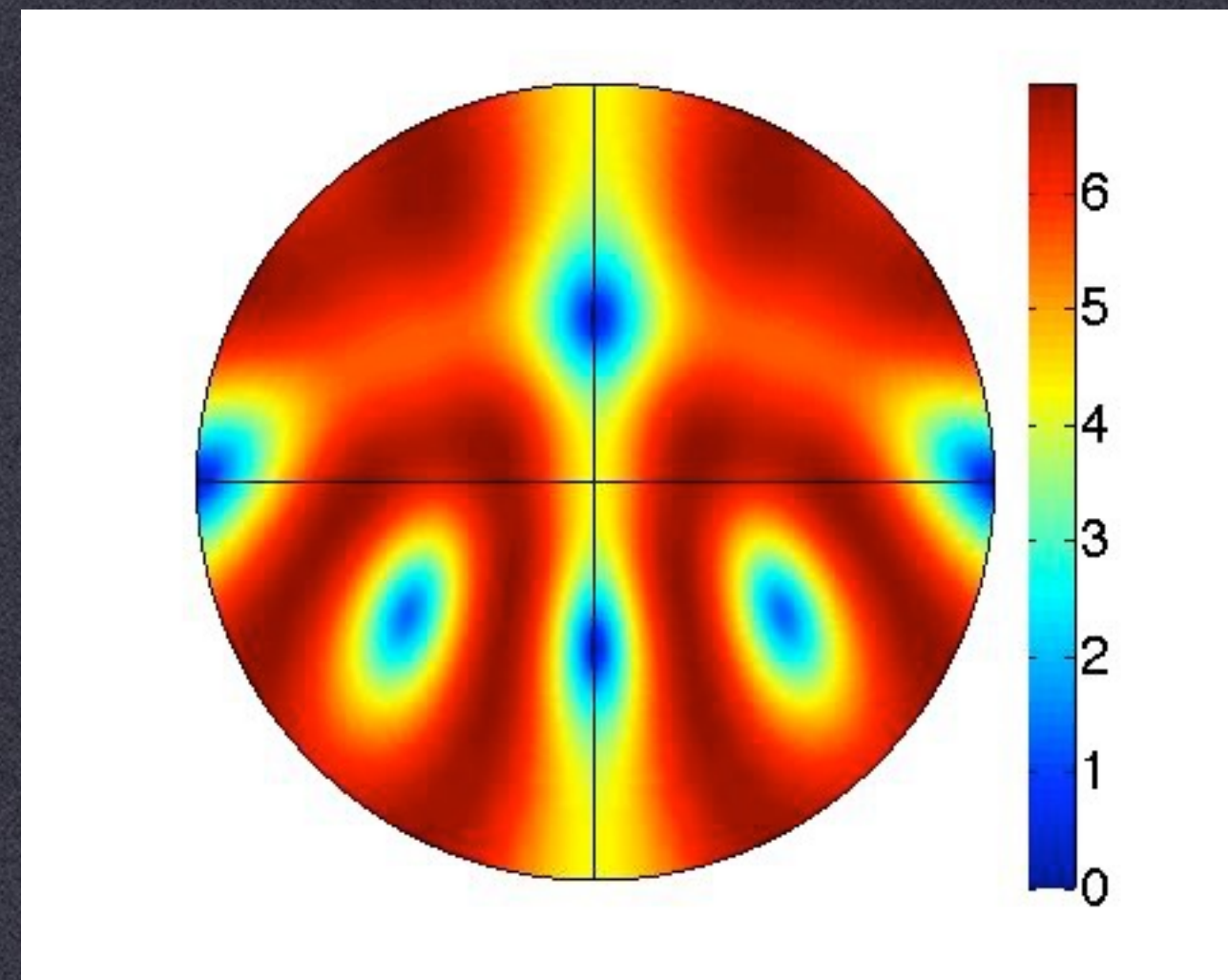
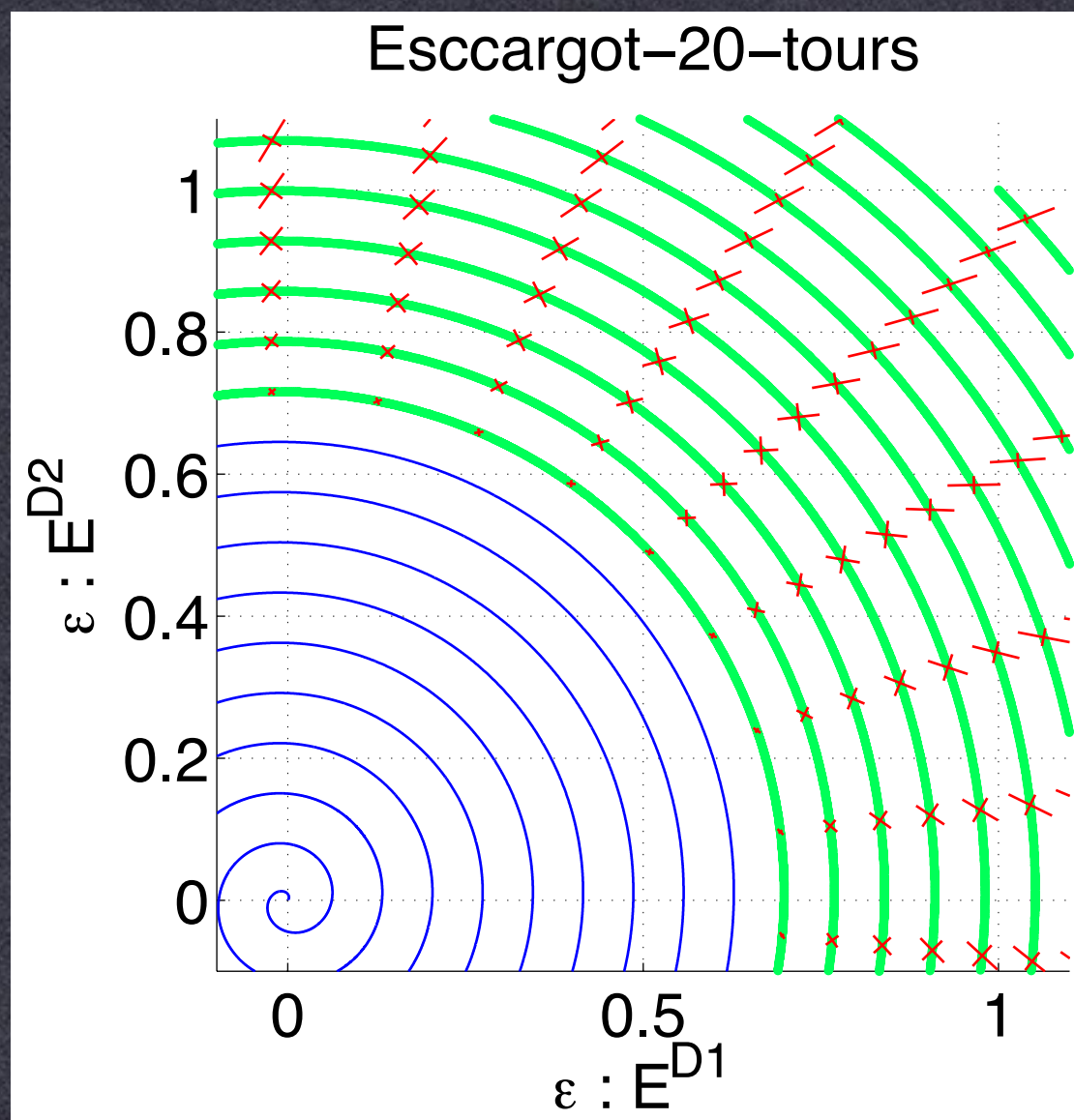


NON PROPORTIONNEL AVEC ANGLES

IDEM

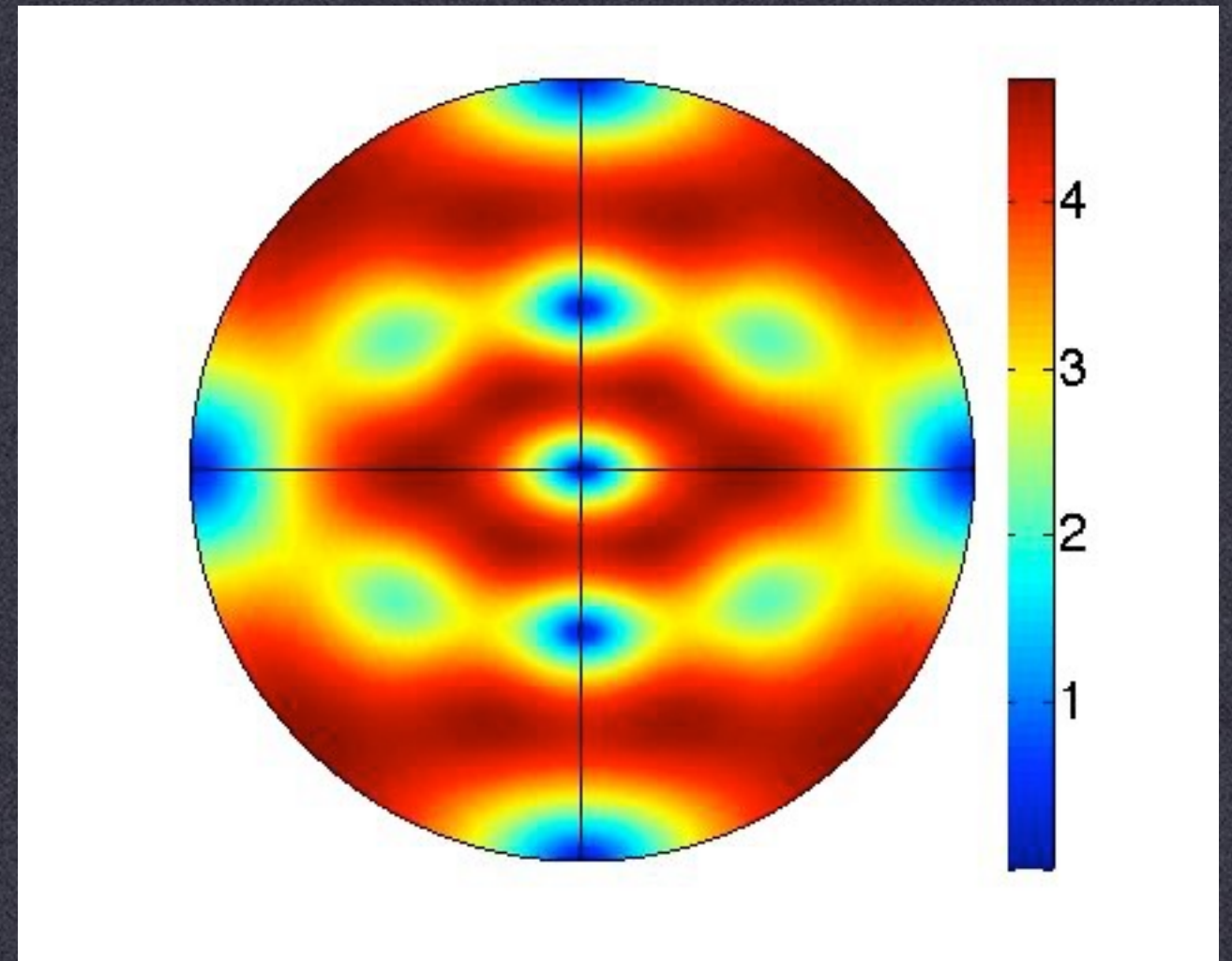
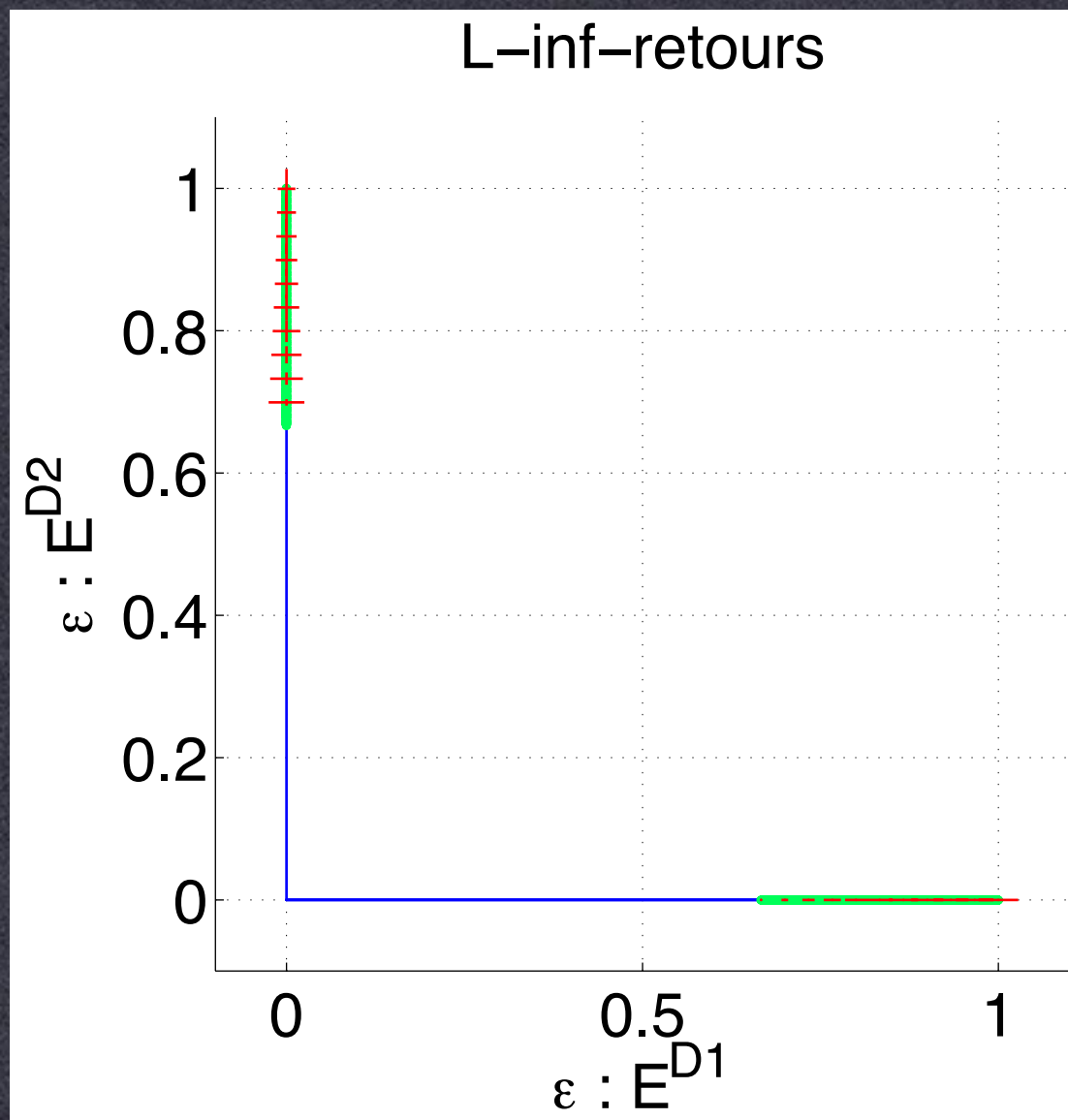


NON PROPORTIONNEL → PROPORTIONNEL
QUASI-ORTHOTROPE ↔ TRAJET PROPORTIONNEL

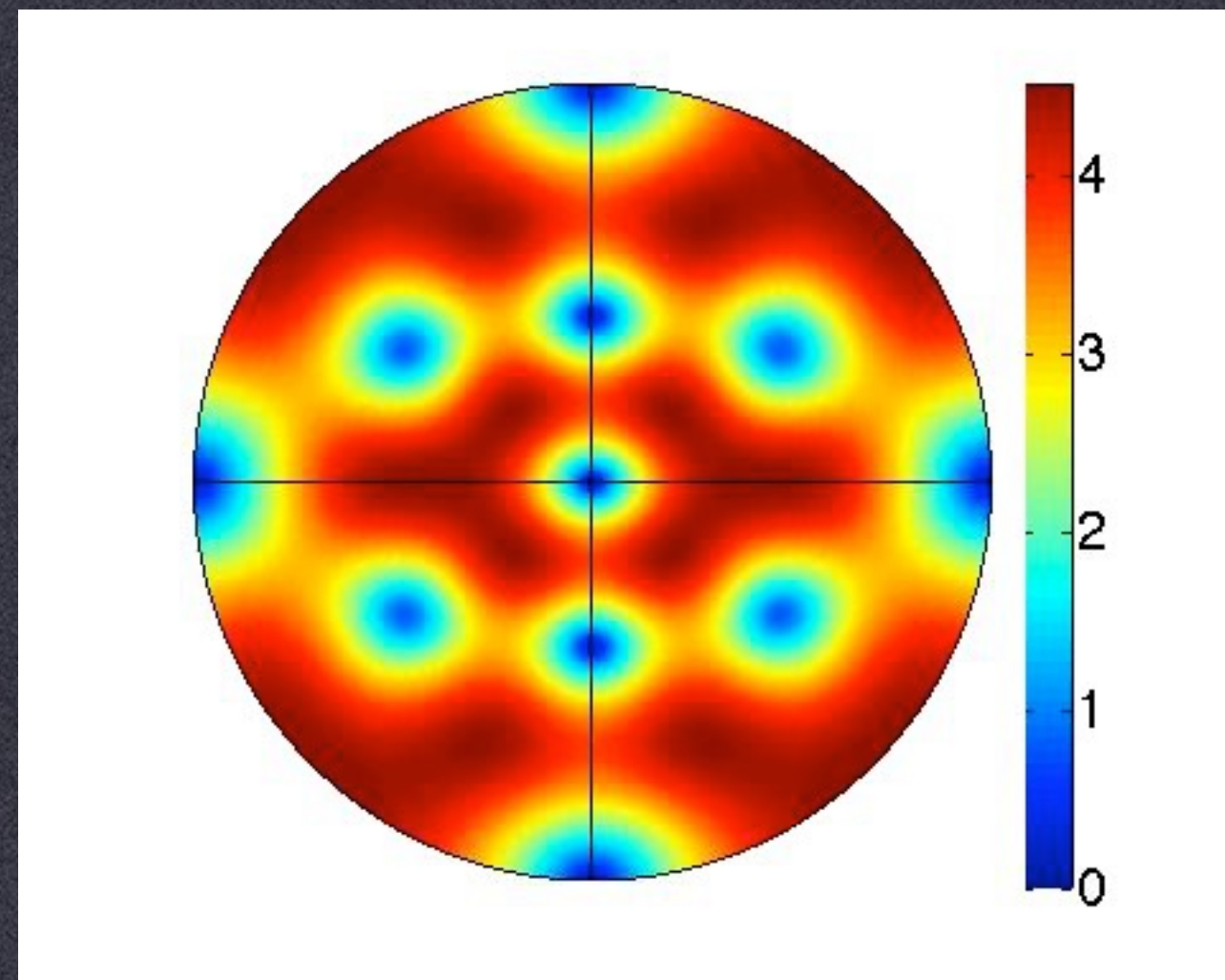
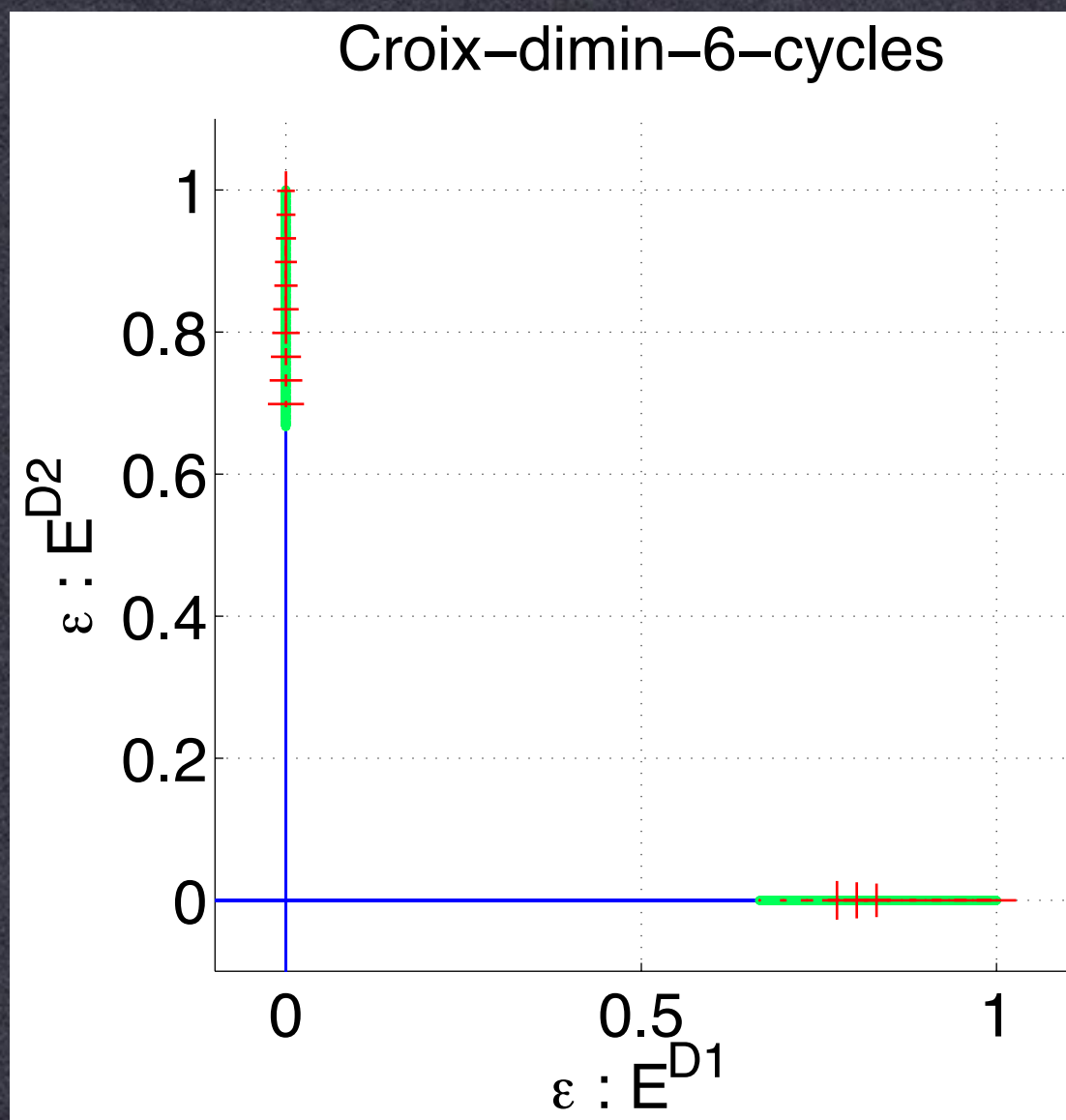


SPIRAL

INTERMÉDAIRE IT / TÉTRA



AVEC RETOUR DANS LE DOMAINE ÉLASTIQUE
 QUASI-CUBIQUE



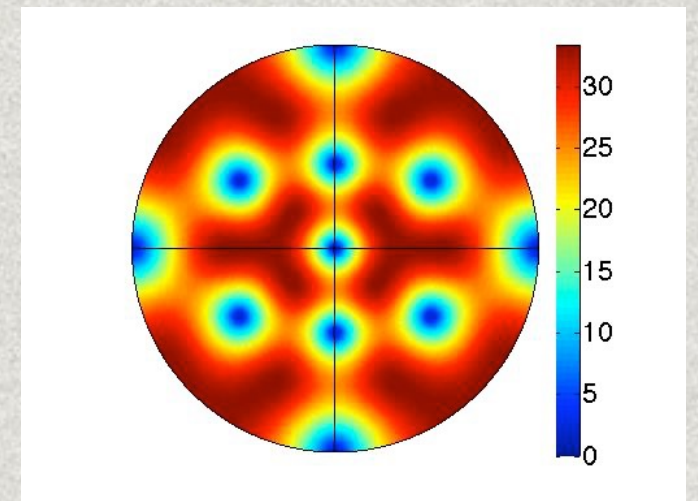
UN TRAJET EN CROIX DÉGRESSIF
 TEND VERS LA SYMÉTRIE CUBIQUE

Explication

$$\mathbf{E}^{D1} = [2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 0, 0, 0]$$

$$\mathbf{E}^{D2} = (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2)/\sqrt{2}$$

* La moyenne des projecteurs associés est exactement cubique.

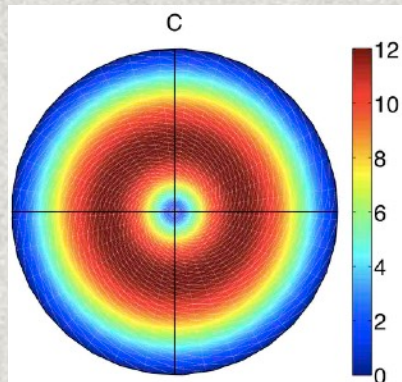


$$\begin{array}{cccccc}
 0.6667 & -0.3333 & -0.3333 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.3333 & 0.1667 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.3333 & 0.1667 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccc}
 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.1667 & 0.0833 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.1667 & 0.0833 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

2

Autres exemples

- * Matériau initialement isotrope transverse



$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- * 4 modes propres, 4 énergies limites

$$W^i = (1, 1, 1, 1, 1)$$

- * chargement $\varepsilon(t \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

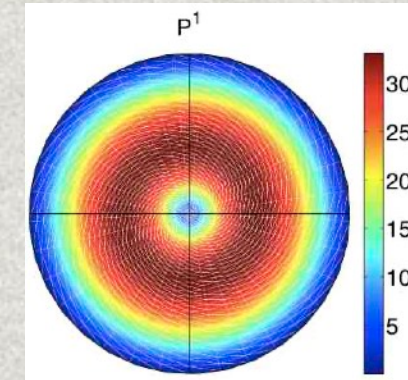
----- PROJECTEUR P1 -----

MODULE DE KELVIN 0.5

ORDRE DE MULTIPLICITE 2

FIGURE DE POLE FIGURE 2

0.5000	-0.5000	0.0000	0	0	0
-0.5000	0.5000	-0.0000	0	0	0
0.0000	-0.0000	0.0000	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1.0000



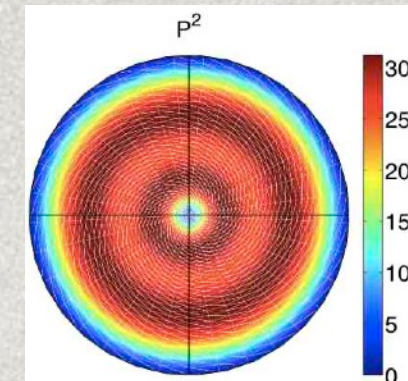
----- PROJECTEUR P2 -----

MODULE DE KELVIN 0.75

ORDRE DE MULTIPLICITE 2

FIGURE DE POLE FIGURE 4

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0



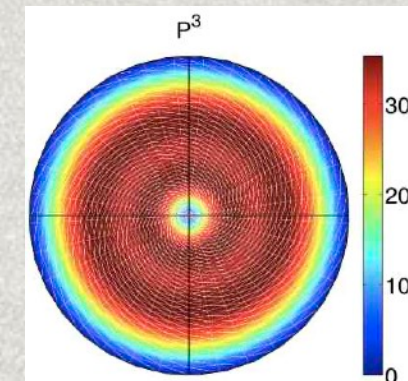
----- PROJECTEUR P3 -----

MODULE DE KELVIN 0.77461

ORDRE DE MULTIPLICITE 1

FIGURE DE POLE FIGURE 6

0.3141	0.3141	-0.3417	0	0	0
0.3141	0.3141	-0.3417	0	0	0
-0.3417	-0.3417	0.3718	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0



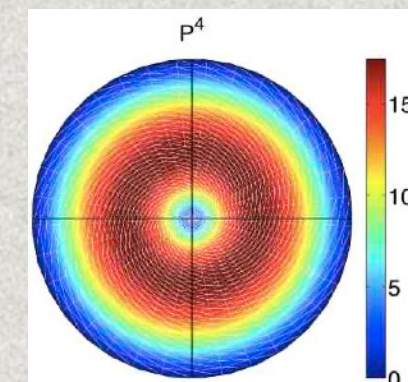
----- PROJECTEUR P4 -----

MODULE DE KELVIN 2.7254

ORDRE DE MULTIPLICITE 1

FIGURE DE POLE FIGURE 7

0.1859	0.1859	0.3417	0	0	0
0.1859	0.1859	0.3417	0	0	0
0.3417	0.3417	0.6282	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0



----- ANALYSE DU TENSEUR D1 -----

0.1001	-0.1001	0.0000	0	0	0
-0.1001	0.1001	-0.0000	0	0	0
0.0000	-0.0000	0.0000	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

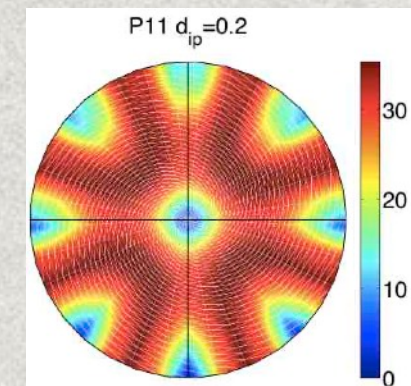
PROJECTEUR P11

0.5000	-0.5000	0.0000	0	0	0
-0.5000	0.5000	-0.0000	0	0	0
0.0000	-0.0000	0.0000	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

ASSOCIE A D11 = 0.20026

D'ORDRE DE MULTIPLICITE 1 SUR 2 POSSIBLE

FIGURE DE POLE **FIGURE 9**



----- ANALYSE DU TENSEUR D2 -----

[illegible]

----- ANALYSE DU TENSEUR D3 -----

0.0559	0.0559	-0.0608	0	0	0
0.0559	0.0559	-0.0608	0	0	0
-0.0608	-0.0608	0.0662	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

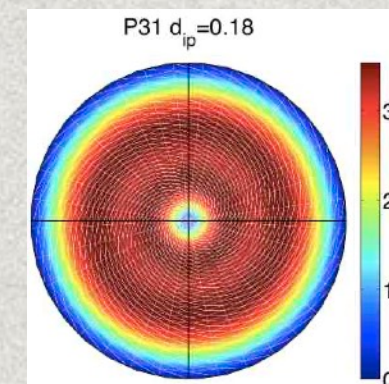
PROJECTEUR P31

0.3141	0.3141	-0.3417	0	0	0
0.3141	0.3141	-0.3417	0	0	0
-0.3417	-0.3417	0.3718	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

ASSOCIE A D31 = 0.17804

D'ORDRE DE MULTIPLICITE 1 SUR 1 POSSIBLE

FIGURE DE POLE FIGURE 13



----- ANALYSE DU TENSEUR D4 -----

0.1126	0.1126	0.2069	0	0	0
0.1126	0.1126	0.2069	0	0	0
0.2069	0.2069	0.3803	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

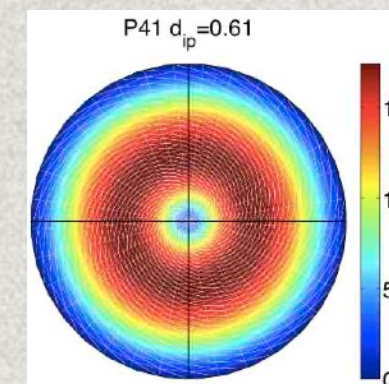
PROJECTEUR P41

0.1859	0.1859	0.3417	0	0	0
0.1859	0.1859	0.3417	0	0	0
0.3417	0.3417	0.6282	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

ASSOCIE A D41 = 0.60547

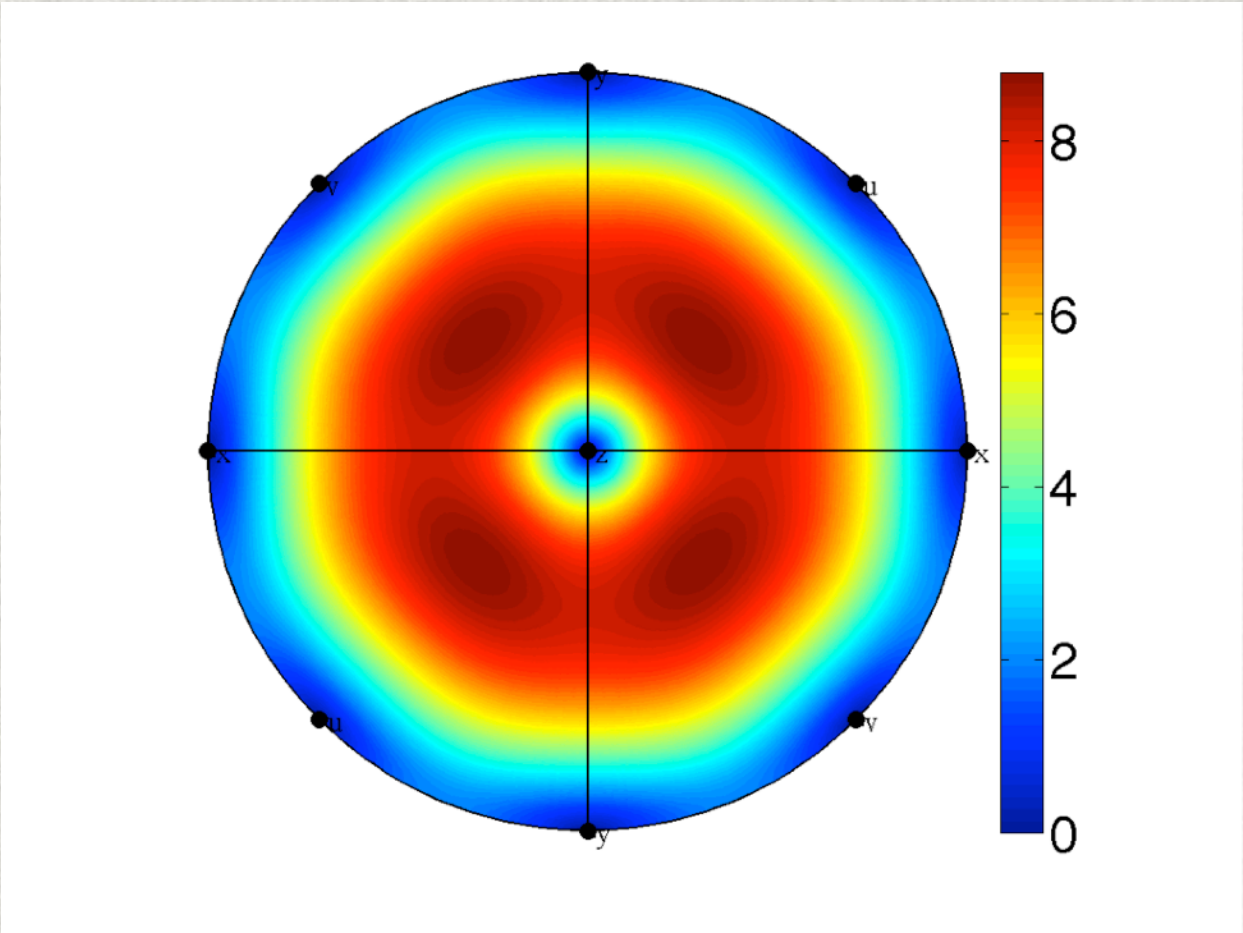
D'ORDRE DE MULTIPLICITE 1 SUR 1 POSSIBLE

FIGURE DE POLE FIGURE 14



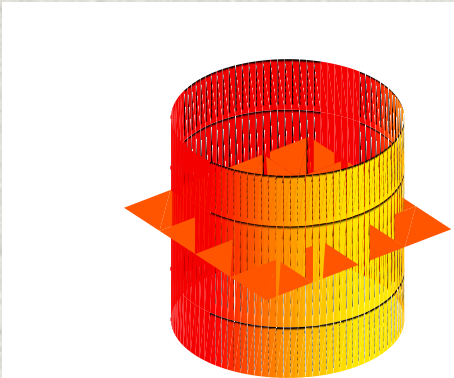
TENSEUR D'ELASTICITÉ FINAL

0.5998	0.2000	0.1499	0	0	0
0.2000	0.5998	0.1499	0	0	0
0.1499	0.1499	0.9122	0	0	0
0	0	0	0.7500	0	0
0	0	0	0	0.7500	0
0	0	0	0	0	0.5000



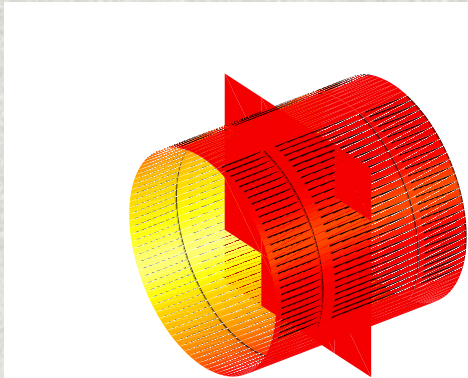
TÉTRAGONAL

MATÉRIAU



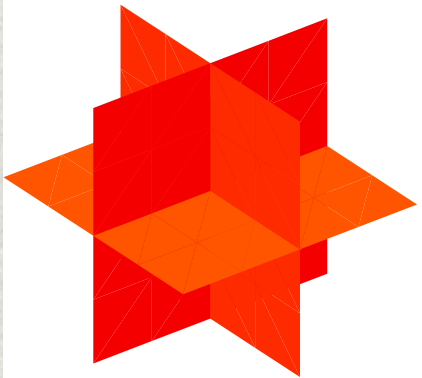
IT Z

SOLLICITATION



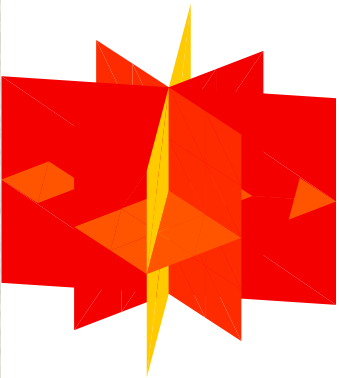
IT X

INTERSECTION



OT

RÉSULTAT



TG

Activer *tous* les modes ?

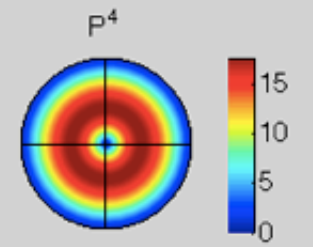
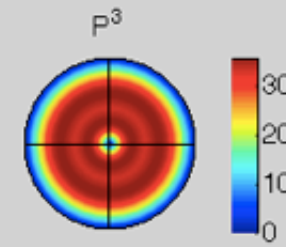
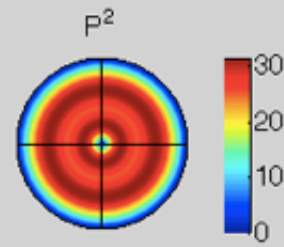
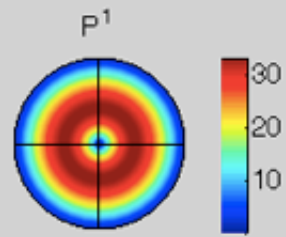
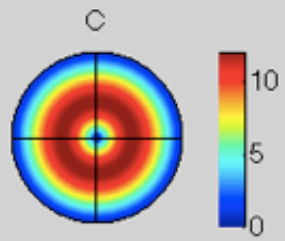
- * Chargement suivant tous les tenseurs propres $\mathbf{E}^{in}$

$\mathbf{E}^{IN} =$

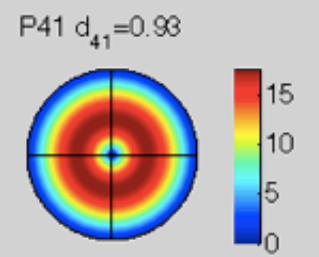
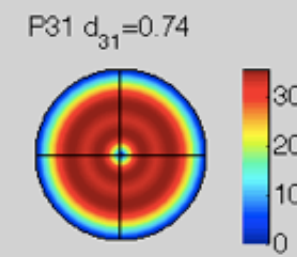
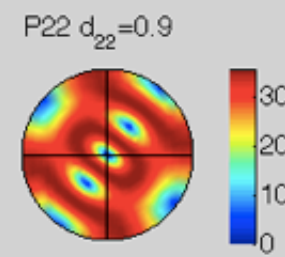
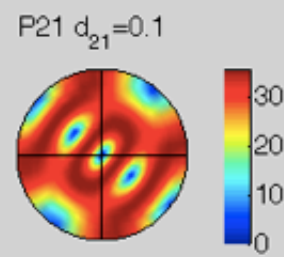
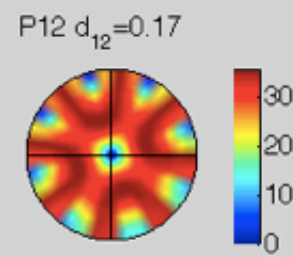
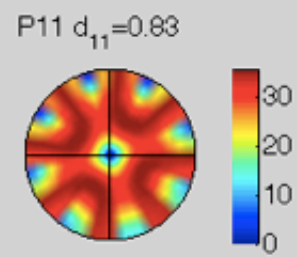
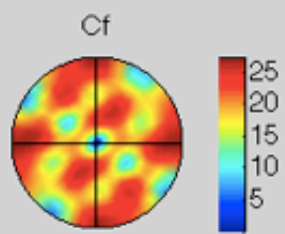
0.7071	0	0	0	0.5604	0.4312
-0.7071	0	0	0	0.5604	0.4312
0.0000	0	0	0	-0.6098	0.7926
0	0	1.0000	0	0	0
0	0	0	1.0000	0	0
0	1.0000	0	0	0	0

- * Trajet à 6 dimensions...
- * Direction tensorielles activées par une collection de fonctions sinus orthogonales (trajet «Fourier») :

É T A T I N I T I A L



É T A T E N D O M M A G É



8 Évolutions possibles du modèle

Court terme :

On peut facilement introduire un **couplage** avec endommagements dans l'espace orthogonal :

$$\mathbb{P}^i = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i\|}$$

s'il existe, c.à.d. lorsque la dimension de $\mathbf{P}^i > 1$. Car :

$$\delta Q^i = \mathbb{Y}^i :: d\mathbb{D}^i$$

avec

$$\mathbb{Y}^i = \frac{1}{2} \lambda^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^i$$

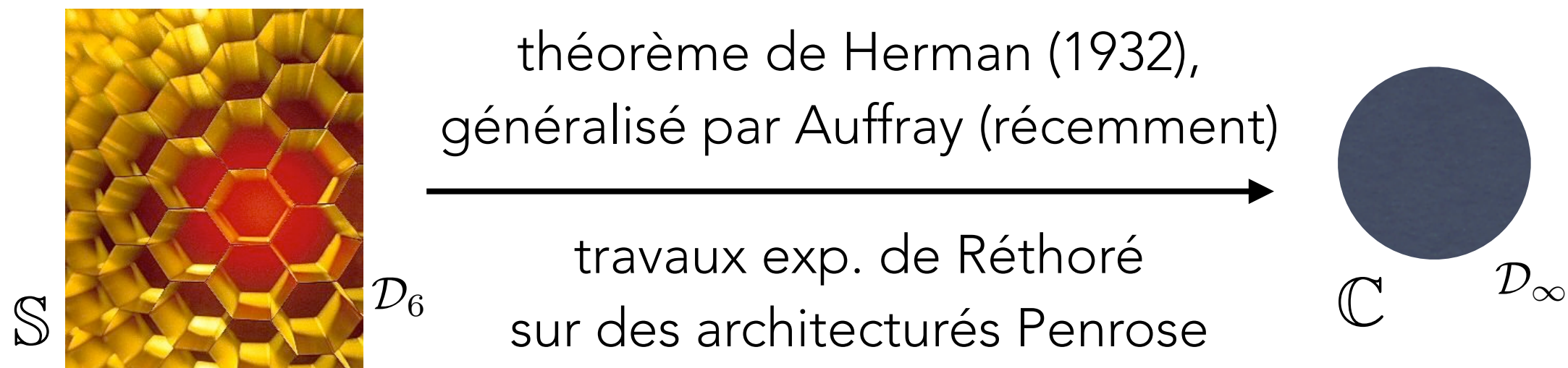
donc l'endommagement sur la partie orthogonale à $\mathbb{Y}^i$ ne dissiperait pas. Afin de respecter la symétrie, il faudra que le couplage soit le même sur tout le sous-espace orthogonal.

Cela pourrait supprimer le « dédommagement ».

- Mener des réflexions plus avancées sur ce qui est « cause » et sur ce qui est « conséquence ».
- Vérifier des points sur les groupes de symétrie des parties propres par rapport à la symétrie de la déformation ou de la contrainte.
- Faire une démonstration propre sur l'inclusion des groupes de symétrie...
- Systématiser cette analyse afin de vérifier la validité des modèles actuels par rapport au principe de Curie.

Long terme

- Convaincre la communauté... Quelques partisans déjà...
- Introduire cette notion dans des modèles plus avancés, utilisant des **tenseurs de structure** d'ordre plus élevés que **C**.



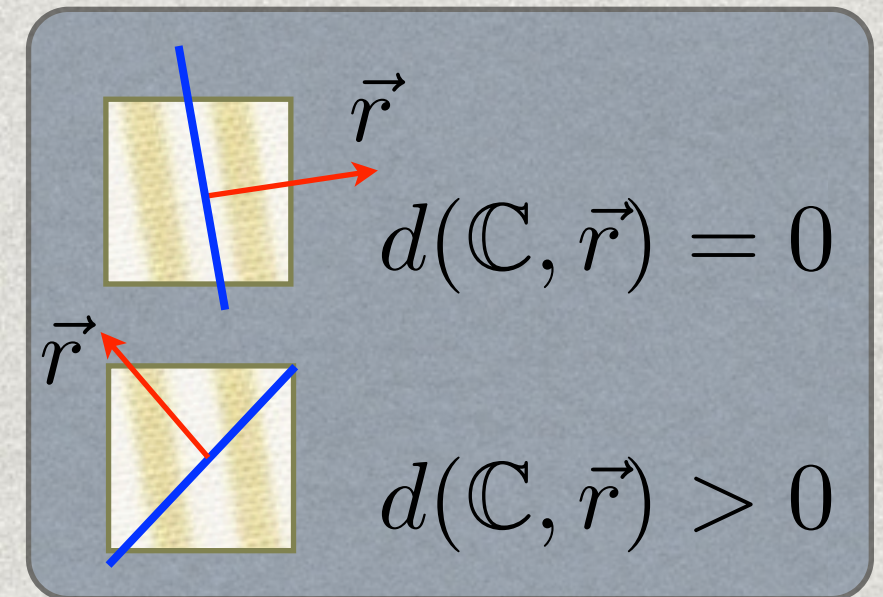
Pour plus d'informations sur ce modèle :

François, M. (2012). A damage model based on Kelvin eigentensors and Curie principle. *Mechanics of Materials*, **44**:23–34.

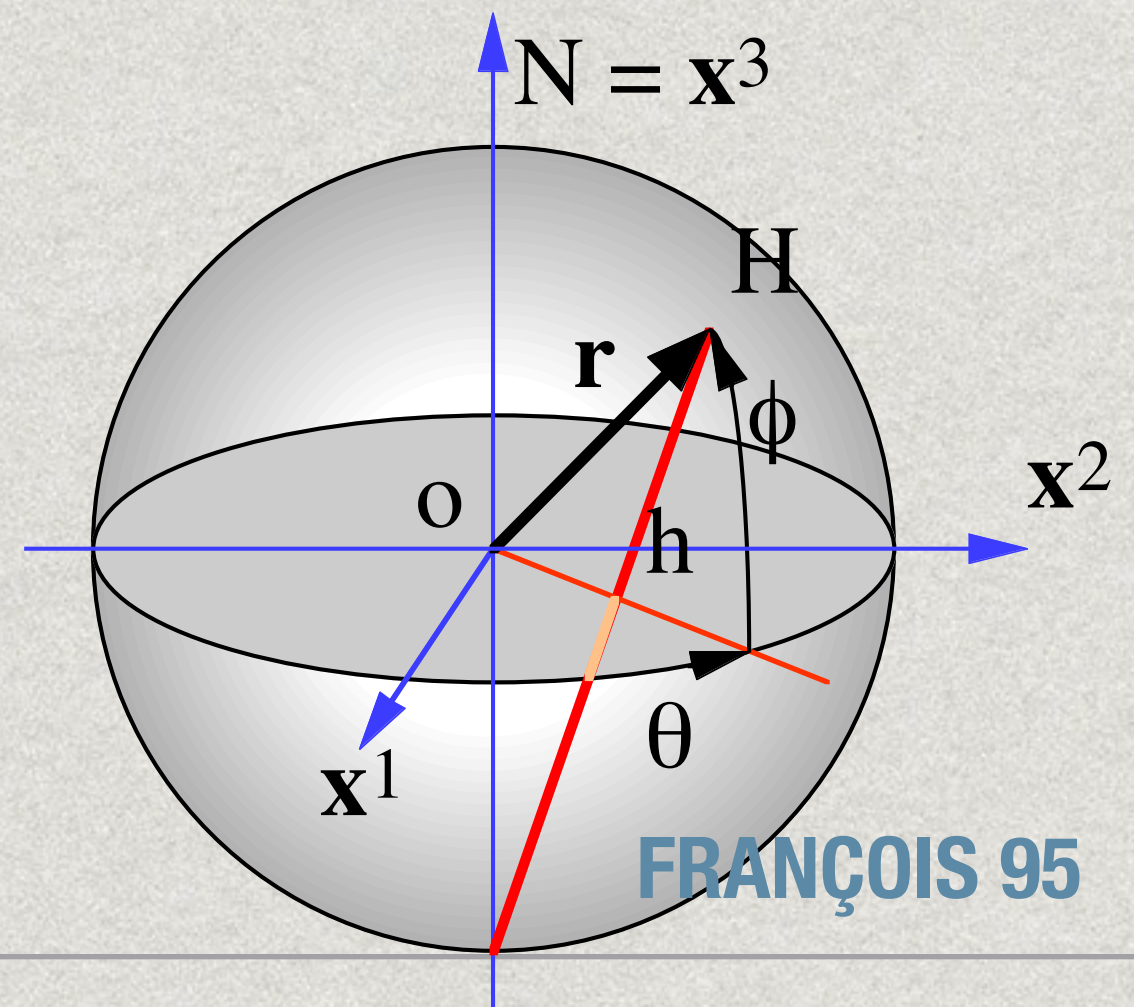
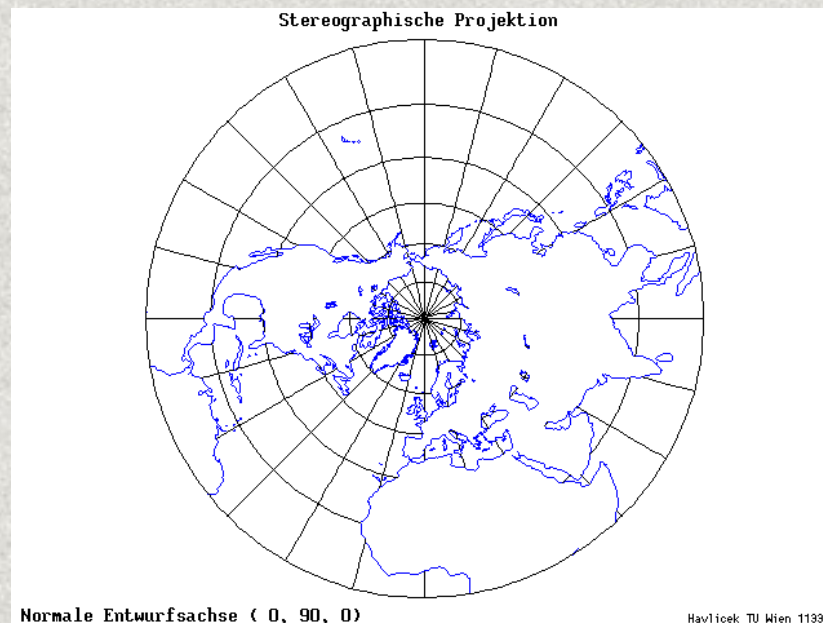
François, M. (2011). Un modèle d'endommagement basé sur les tenseurs propres de kelvin et le principe de curie. In *Actes du 20^e Congrès Français de Mécanique*, Besançon

- ✱ Indicateur d'un plan de symétrie :

$$d(\mathbb{C}, \vec{r}) = \frac{\|\mathbb{C} - \mathcal{S}_{\vec{r}^\perp}(\mathbb{C})\|}{\|\mathbb{C}\|}$$



- ✱ pour tout $\vec{r}$ du demi plan $z > 0$; projection par projection stéréographique (figure de pôle)

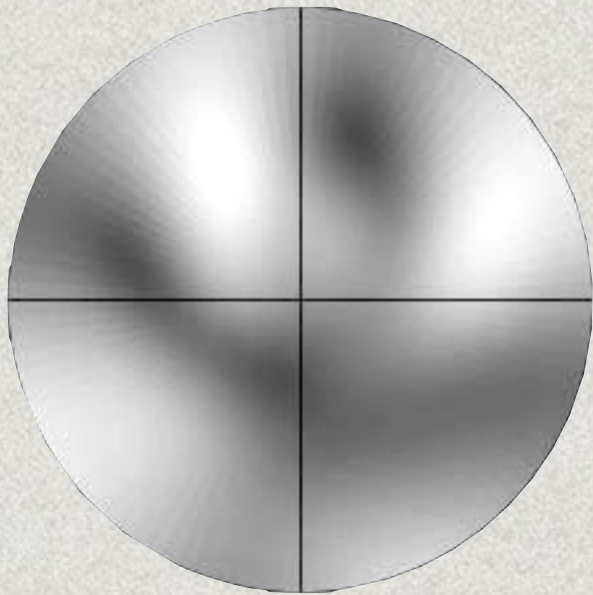


- ✱ Logiciel SymetriC

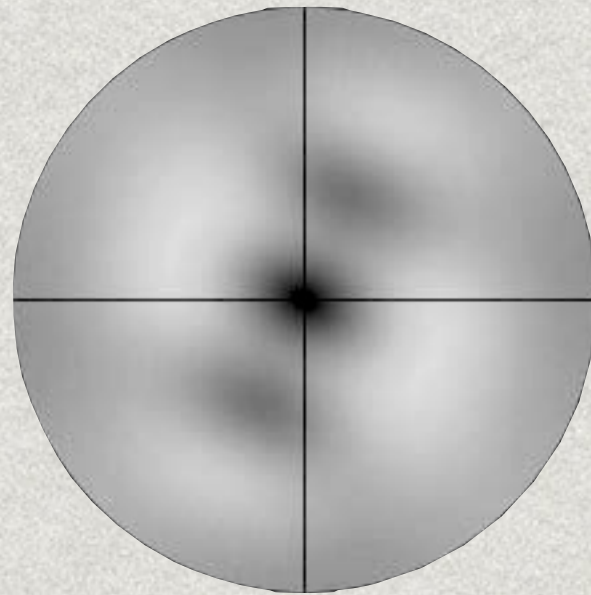
FRANÇOIS 95

* Les figures de poles des symétries exactes,
dans leur repère naturel :

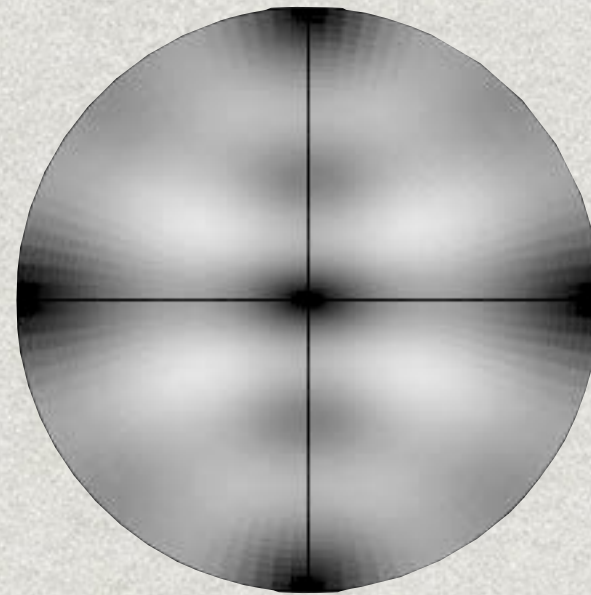
FRANÇOIS 98



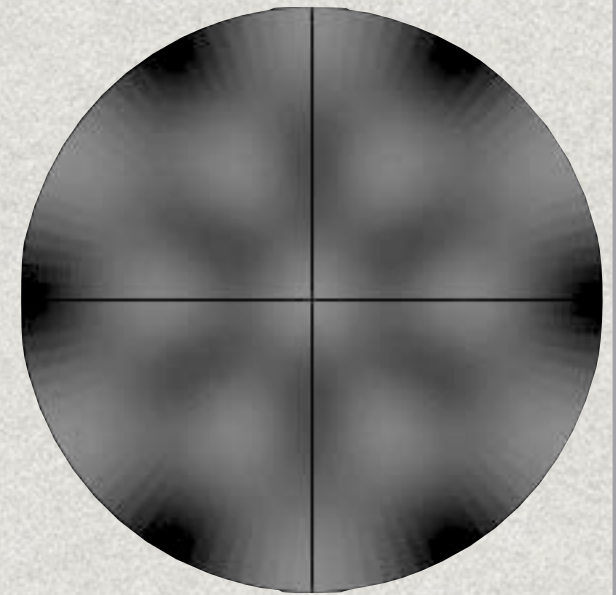
TRICLINIQUE



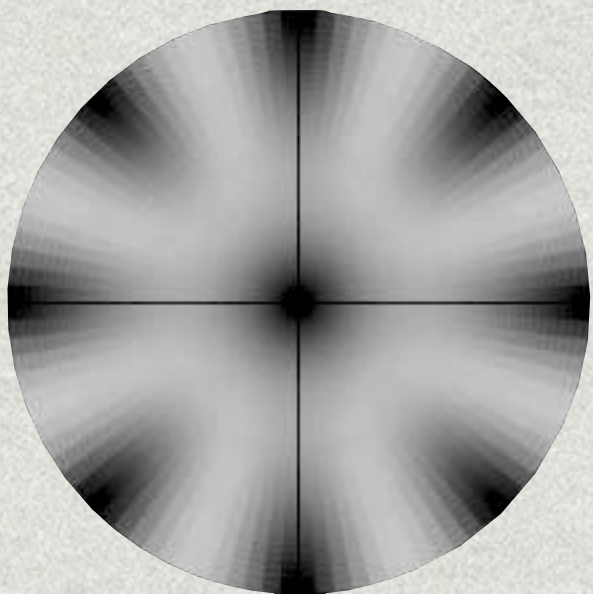
MONOCLINIQUE



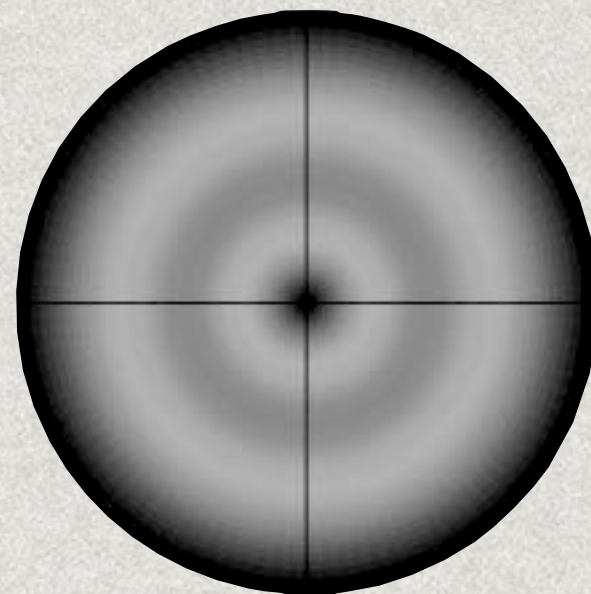
ORTHOTROPE



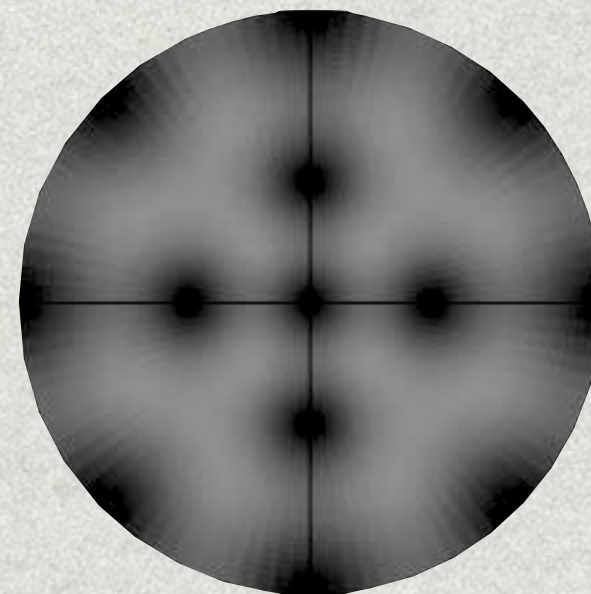
TRIGONAL



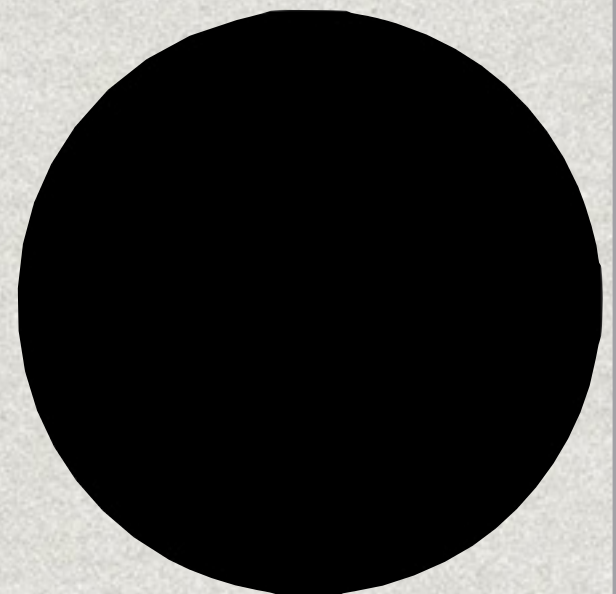
TÉTRAGONAL



**ISOTROPE-
TRANSVERSE**



CUBIQUE



ISOTROPE