

Introduction en hyperbolicité

Antoine Etesse, I2M AMU.
Réunion GDR-GDM,
La Rochelle du 7 au 8 juillet 2021.

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
- Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - ② $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - ② $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.
- Ici, on pourra se placer dans le cadre suivant :

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - ② $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.
- Ici, on pourra se placer dans le cadre suivant :
 - ① $\mathbb{P}^N$ est l'espace des droites dans $\mathbb{C}^{N+1}$:

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - 1 U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - 2 $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.
- Ici, on pourra se placer dans le cadre suivant :
 - 1 $\mathbb{P}^N$ est l'espace des droites dans $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{C}^{N+1} / \lambda v \sim v = \mathbb{C}^{N+1} / \mathbb{C}^*.$$

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - ② $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.
- Ici, on pourra se placer dans le cadre suivant :

- ① $\mathbb{P}^N$ est l'espace des droites dans $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{C}^{N+1} / \lambda v \sim v = \mathbb{C}^{N+1} / \mathbb{C}^*.$$

- ② $P_1, \dots, P_{N-n} \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ sont des polynômes homogènes non-nuls.

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - ② $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.
- Ici, on pourra se placer dans le cadre suivant :
 - ① $\mathbb{P}^N$ est l'espace des droites dans $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{C}^{N+1} / \lambda v \sim v = \mathbb{C}^{N+1} / \mathbb{C}^*.$$

- ② $P_1, \dots, P_{N-n} \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ sont des polynômes homogènes non-nuls.

Rappel : $P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ est homogène de degré m si et seulement si

$$P(\lambda(x_0, \dots, x_N)) = \lambda^m P(x_0, \dots, x_N).$$

Cadre général.

- X : variété complexe (lisse) de dimension $\dim(X) = n$.
 - Définition usuelle avec un atlas $(U_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ où :
 - ① U_i ouvert de $\mathbb{C}^n$;
 - ② $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U_j \cap U_i$ changement de carte *holomorphe*.
- Ici, on pourra se placer dans le cadre suivant :
 - ① $\mathbb{P}^N$ est l'espace des droites dans $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$\mathbb{P}^N = \mathbb{C}^{N+1} / \lambda v \sim v = \mathbb{C}^{N+1} / \mathbb{C}^*.$$

- ② $P_1, \dots, P_{N-n} \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ sont des polynômes homogènes non-nuls.

Rappel : $P \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ est homogène de degré m si et seulement si

$$P(\lambda(x_0, \dots, x_N)) = \lambda^m P(x_0, \dots, x_N).$$

On forme la *variété projective* :

$$X = \{[x] \in \mathbb{P}^N \mid P_1(x) = \dots = P_{N-n}(x) = 0\}.$$

Notion de familles de courbes entières.

Définition (Famille de courbes entières)

Définition (Famille de courbes entières)

- X variété complexe.

Définition (Famille de courbes entières)

- X variété complexe.
- $\mathbb{B}^{p-1} := \{z \in \mathbb{C}^{p-1} \mid \|z\|_{\text{eucl}} < 1\}$ boule unité de dimension $(p - 1)$ (espace de paramètres)

Définition (Famille de courbes entières)

- X variété complexe.
- $\mathbb{B}^{p-1} := \{z \in \mathbb{C}^{p-1} \mid \|z\|_{\text{eucl}} < 1\}$ boule unité de dimension $(p - 1)$ (espace de paramètres)

Une famille de courbes entières est une application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow X.$$

Définition (Famille de courbes entières)

- X variété complexe.
- $\mathbb{B}^{p-1} := \{z \in \mathbb{C}^{p-1} \mid \|z\|_{\text{eucl}} < 1\}$ boule unité de dimension $(p-1)$ (espace de paramètres)

Une famille de courbes entières est une application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow X.$$

Pour $p = 1$, on parle simplement de courbe entière.

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \longrightarrow X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) \longmapsto [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)]$$

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) & \longmapsto & [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)] \end{array}$$

où :

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) & \longmapsto & [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)] \end{array}$$

où :

① $f_i : \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe :

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) & \longmapsto & [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)] \end{array}$$

où :

① $f_i : \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe :

$$\bullet f_i(\mathbf{w}, z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} \mathbf{w}^\alpha z^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} w_1^{\alpha_1} \cdots w_{p-1}^{\alpha_{p-1}} z^n ;$$

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) & \longmapsto & [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)] \end{array}$$

où :

① $f_i : \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe :

$$\bullet f_i(\mathbf{w}, z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} \mathbf{w}^\alpha z^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} w_1^{\alpha_1} \dots w_{p-1}^{\alpha_{p-1}} z^n ;$$

② f à valeurs dans $X \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq N - n, P_i([f_0 : \dots : f_N]) = 0$ sur $\mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C}$.

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) & \longmapsto & [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)] \end{array}$$

où :

① $f_i : \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe :

$$\bullet f_i(\mathbf{w}, z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} \mathbf{w}^\alpha z^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} w_1^{\alpha_1} \dots w_{p-1}^{\alpha_{p-1}} z^n ;$$

② f à valeurs dans $X \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq N - n, P_i([f_0 : \dots : f_N]) = 0$ sur $\mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C}$.

③ les f_i ne s'annulent pas simultanément & $(d(\frac{f_j}{f_i})(z_0))_{j \neq i}$ de rang maximal pour un certain $z_0 \in \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C}$ et un certain i .

Pour X projective, on a une représentation “explicite” des familles de courbes entières :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & X \subset \mathbb{P}^N \\ (\mathbf{w}, z) & \longmapsto & [f_0(\mathbf{w}, z) : \dots : f_N(\mathbf{w}, z)] \end{array}$$

où :

① $f_i : \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe :

$$\bullet f_i(\mathbf{w}, z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} \mathbf{w}^\alpha z^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{p-1}, n \in \mathbb{N}} a_{\alpha, n} w_1^{\alpha_1} \dots w_{p-1}^{\alpha_{p-1}} z^n ;$$

② f à valeurs dans $X \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq N - n, P_i([f_0 : \dots : f_N]) = 0$ sur $\mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C}$.

③ les f_i ne s'annulent pas simultanément & $(d(\frac{f_j}{f_i})(z_0))_{j \neq i}$ de rang maximal pour un certain $z_0 \in \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C}$ et un certain i .

$\rightsquigarrow$: la construction de familles courbes entières en toute généralité avec ce point de vue est compliquée.

Exemples

- ① $F_\delta := \{X_0^\delta + \cdots + X_N^\delta = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ *hypersurface de Fermat contient les familles de courbes entières (on suppose $N \geq 6$) :*

Exemples

- ① $F_\delta := \{X_0^\delta + \cdots + X_N^\delta = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ hypersurface de Fermat contient les familles de courbes entières (on suppose $N \geq 6$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & F_\delta \\ (w, z) & \longmapsto & [w : w\theta_1 : z : z\theta_2 : 0 : \cdots : 0 : \theta_3 : 1] \end{array}$$

où $\theta_1^\delta = \theta_2^\delta = \theta_3^\delta = -1$.

Exemples

- ① $F_\delta := \{X_0^\delta + \cdots + X_N^\delta = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ hypersurface de Fermat contient les familles de courbes entières (on suppose $N \geq 6$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & F_\delta \\ (w, z) & \longmapsto & [w : w\theta_1 : z : z\theta_2 : 0 : \cdots : 0 : \theta_3 : 1] \end{array}$$

où $\theta_1^\delta = \theta_2^\delta = \theta_3^\delta = -1$.

- ② (Droites dans une hypersurface) Une hypersurface dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \leq 2N - 3$ contient toujours des droites (donc en particulier des courbes entières).

Exemples

- ① $F_\delta := \{X_0^\delta + \cdots + X_N^\delta = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ hypersurface de Fermat contient les familles de courbes entières (on suppose $N \geq 6$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & F_\delta \\ (w, z) & \longmapsto & [w : w\theta_1 : z : z\theta_2 : 0 : \cdots : 0 : \theta_3 : 1] \end{array}$$

où $\theta_1^\delta = \theta_2^\delta = \theta_3^\delta = -1$.

- ② (Droites dans une hypersurface) Une hypersurface dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \leq 2N - 3$ contient toujours des droites (donc en particulier des courbes entières).

Remarque

Une droite dans $\mathbb{P}^N$ est la donnée d'un plan dans $\mathbb{C}^{N+1}$.

Exemples

- ① $F_\delta := \{X_0^\delta + \cdots + X_N^\delta = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ hypersurface de Fermat contient les familles de courbes entières (on suppose $N \geq 6$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & F_\delta \\ (w, z) & \longmapsto & [w : w\theta_1 : z : z\theta_2 : 0 : \cdots : 0 : \theta_3 : 1] \end{array}$$

où $\theta_1^\delta = \theta_2^\delta = \theta_3^\delta = -1$.

- ② (Droites dans une hypersurface) Une hypersurface dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \leq 2N - 3$ contient toujours des droites (donc en particulier des courbes entières).

Remarque

Une droite dans $\mathbb{P}^N$ est la donnée d'un plan dans $\mathbb{C}^{N+1}$.

Ex : Plan engendré par $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0)\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{P}^N \\ z & \mapsto & [1 : z : 0 : \dots : 0] \end{array}$$

Hyperbolicité : définition.

Définition (Hyperbolicité)

Hyperbolicité : définition.

Définition (Hyperbolicité)

- X : *variété complexe (projective)*.

Définition (Hyperbolicité)

- X : variété complexe (projective).
- ① X est dite *hyperbolique* si X ne contient pas de courbes entières.

Définition (Hyperbolicité)

- X : variété complexe (projective).
- ① X est dite hyperbolique si X ne contient pas de courbes entières.
- ② X est dite faiblement hyperbolique si il existe $H \subset X$ une hypersurface qui contient (l'image de) toutes les courbes entières de X .

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- 1 *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*

$\leadsto$ Terminologie : *Surface de Riemann compacte.*

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*
↪ Terminologie : Surface de Riemann compacte.
- ② *Théorème fondamental (dit d'uniformisation de Riemann) :*

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*
↪ Terminologie : Surface de Riemann compacte.
- ② *Théorème fondamental (dit d'uniformisation de Riemann) : Toute courbe algébrique lisse (+ généralement : toute surface de Riemann) possède comme revêtement universel l'un des trois espaces suivants :*

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*
↪ Terminologie : Surface de Riemann compacte.
- ② *Théorème fondamental (dit d'uniformisation de Riemann) : Toute courbe algébrique lisse (+ généralement : toute surface de Riemann) possède comme revêtement universel l'un des trois espaces suivants :*
 - $\mathbb{P}^1$ (genre 0)

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*
↪ Terminologie : Surface de Riemann compacte.
- ② *Théorème fondamental (dit d'uniformisation de Riemann) : Toute courbe algébrique lisse (+ généralement : toute surface de Riemann) possède comme revêtement universel l'un des trois espaces suivants :*
 - $\mathbb{P}^1$ (genre 0)
 - $\mathbb{C}$ (genre 1)

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*
↪ Terminologie : Surface de Riemann compacte.
- ② *Théorème fondamental (dit d'uniformisation de Riemann) : Toute courbe algébrique lisse (+ généralement : toute surface de Riemann) possède comme revêtement universel l'un des trois espaces suivants :*
 - $\mathbb{P}^1$ (genre 0)
 - $\mathbb{C}$ (genre 1)
 - $\mathbb{B}^1$ (genre ≥ 2).

Exemple (Courbes algébriques lisses)

Quelques propriétés remarquables :

- ① *Toute courbe lisse complexe compacte (au sens général défini au début) est une courbe algébrique lisse.*
↪ Terminologie : Surface de Riemann compacte.
- ② *Théorème fondamental (dit d'uniformisation de Riemann) : Toute courbe algébrique lisse (+ généralement : toute surface de Riemann) possède comme revêtement universel l'un des trois espaces suivants :*
 - $\mathbb{P}^1$ (genre 0)
 - $\mathbb{C}$ (genre 1)
 - $\mathbb{B}^1$ (genre ≥ 2).
- ③ corollaire : *les courbes algébriques lisses de genre ≥ 2 sont les seules hyperboliques !*

Exemples (Autres exemples)

Exemples (Autres exemples)

- ① Une hypersurface générique $X \subset \mathbb{P}^N$ de degré $d \gg 0$ est hyperbolique (Brotbek).

Exemples (Autres exemples)

① Une hypersurface générique $X \subset \mathbb{P}^N$ de degré $d \gg 0$ est hyperbolique (Brotbek).

Remarque

Il n'existe pas d'exemples non-génériques de variétés projectives hyperboliques de dimension ≥ 2 !

Exemples (Autres exemples)

- ① Une hypersurface générique $X \subset \mathbb{P}^N$ de degré $d \gg 0$ est hyperbolique (Brotbek).

Remarque

Il n'existe pas d'exemples non-génériques de variétés projectives hyperboliques de dimension ≥ 2 !

- ② (Cas non-projectif) $\mathbb{B}^n$ est hyperbolique : conséquence immédiate du théorème de Liouville.

Variétés de type général.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\leadsto K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\rightsquigarrow K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.
 - $\rightsquigarrow K_X^m := K_X^{\otimes m}$.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\leadsto K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.
 - $\leadsto K_X^m := K_X^{\otimes m}$.
- $H^0(X, K_X^m)$: espace des *sections globales* du fibré en droite $K_X^m \xrightarrow{\pi} X$, i.e. des morphismes $s : X \rightarrow K_X^m$ tels que $\pi \circ s = \text{Id}_X$.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\leadsto K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.
 - $\leadsto K_X^m := K_X^{\otimes m}$.
- $H^0(X, K_X^m)$: espace des *sections globales* du fibré en droite $K_X^m \xrightarrow{\pi} X$, i.e. des morphismes $s : X \rightarrow K_X^m$ tels que $\pi \circ s = \text{Id}_X$.
- Fait : $H^0(X, K_X^m)$ est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $< \infty$.

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\rightsquigarrow K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.
 - $\rightsquigarrow K_X^m := K_X^{\otimes m}$.
- $H^0(X, K_X^m)$: espace des *sections globales* du fibré en droite $K_X^m \xrightarrow{\pi} X$, i.e. des morphismes $s : X \rightarrow K_X^m$ tels que $\pi \circ s = \text{Id}_X$.
- Fait : $H^0(X, K_X^m)$ est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $< \infty$.

Définition (Variétés de type général)

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\rightsquigarrow K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.
 - $\rightsquigarrow K_X^m := K_X^{\otimes m}$.
- $H^0(X, K_X^m)$: espace des *sections globales* du fibré en droite $K_X^m \xrightarrow{\pi} X$, i.e. des morphismes $s : X \rightarrow K_X^m$ tels que $\pi \circ s = \text{Id}_X$.
- Fait : $H^0(X, K_X^m)$ est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $< \infty$.

Définition (Variétés de type général)

On dit que X est de type général si il existe deux constante $a, b > 0$ telles que pour tout $m \geq 1$

$$am^{\dim(X)} \leq \dim H^0(X, K_X^m) \leq bm^{\dim(X)}.$$

Variétés de type général.

- X : variété projective lisse.
- Ω_X : fibré cotangent.
 - $\rightsquigarrow K_X := \bigwedge^{\dim(X)} \Omega_X$ fibré en droite *canonique*.
 - $\rightsquigarrow K_X^m := K_X^{\otimes m}$.
- $H^0(X, K_X^m)$: espace des *sections globales* du fibré en droite $K_X^m \xrightarrow{\pi} X$, i.e. des morphismes $s : X \rightarrow K_X^m$ tels que $\pi \circ s = \text{Id}_X$.
- Fait : $H^0(X, K_X^m)$ est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $< \infty$.

Définition (Variétés de type général)

On dit que X est de type général si il existe deux constante $a, b > 0$ telles que pour tout $m \geq 1$

$$am^{\dim(X)} \leq \dim H^0(X, K_X^m) \leq bm^{\dim(X)}.$$

Remarque (Dimension de Kodaira)

Plus généralement : asymptotique du nombre de sections globales de K_X^m pour $m \rightarrow \infty \rightsquigarrow$ dimension de Kodaira de X .

Exemple (Courbes algébriques lisses)

- C : *courbe algébrique lisse*.

Exemple (Courbes algébriques lisses)

- C : courbe algébrique lisse.

(Via le théorème de Riemann-Roch)

Exemple (Courbes algébriques lisses)

- C : courbe algébrique lisse.

(Via le théorème de Riemann-Roch)

- ① $g(C) = 0$: $\dim H^0(C, K_C^m) = \{0\}$ pour tout $m \geq 1$;

Exemple (Courbes algébriques lisses)

- C : courbe algébrique lisse.

(Via le théorème de Riemann-Roch)

- ① $g(C) = 0$: $\dim H^0(C, K_C^m) = \{0\}$ pour tout $m \geq 1$;
- ② $g(C) = 1$: $\dim H^0(C, K_C^m) = 1$ pour tout $m \geq 1$;

Exemple (Courbes algébriques lisses)

- C : courbe algébrique lisse.

(Via le théorème de Riemann-Roch)

- ① $g(C) = 0$: $\dim H^0(C, K_C^m) = \{0\}$ pour tout $m \geq 1$;
- ② $g(C) = 1$: $\dim H^0(C, K_C^m) = 1$ pour tout $m \geq 1$;
- ③ $g(C) \geq 2$: $\dim H^0(C, K_C^m) = \alpha m + \beta$.

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

- ① (Conjecture de Kobayashi)

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

② (Conjecture de Green–Griffiths–Lang)

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

② (Conjecture de Green–Griffiths–Lang)

Si X est de type général, alors X est faiblement hyperbolique.

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

② (Conjecture de Green–Griffiths–Lang)

Si X est de type général, alors X est faiblement hyperbolique.

- En particulier, les courbes entières devraient être *algébriquement dégénérée*, i.e. d'image incluse dans une hypersurface de X .

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

② (Conjecture de Green–Griffiths–Lang)

Si X est de type général, alors X est faiblement hyperbolique.

- En particulier, les courbes entières devraient être *algébriquement dégénérée*, i.e. d'image incluse dans une hypersurface de X .

Pourquoi travailler avec des familles de courbes entières :

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

② (Conjecture de Green–Griffiths–Lang)

Si X est de type général, alors X est faiblement hyperbolique.

- En particulier, les courbes entières devraient être *algébriquement dégénérée*, i.e. d'image incluse dans une hypersurface de X .

Pourquoi travailler avec des familles de courbes entières :

- ① Il devrait être plus facile d'exclure l'existence de familles de courbes entières que de courbes entières.

Variétés de type général et hyperbolicité : grandes conjectures.

① (Conjecture de Kobayashi)

Une hypersurface générique X dans $\mathbb{P}^N$ de degré $d \geq 2N - 1$ est hyperbolique.

- Prouvée par Brotbek pour $d \gg 0$.
- Sujet d'étude : amélioration de la borne.

② (Conjecture de Green–Griffiths–Lang)

Si X est de type général, alors X est faiblement hyperbolique.

- En particulier, les courbes entières devraient être *algébriquement dégénérée*, i.e. d'image incluse dans une hypersurface de X .

Pourquoi travailler avec des familles de courbes entières :

- ① Il devrait être plus facile d'exclure l'existence de familles de courbes entières que de courbes entières.
- ② On devrait obtenir des meilleures bornes sur le degré, e.g. pour la conjecture de Kobayashi.

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

- $J_{p,k}X$: fibré des k -jets de p -germes d'applications holomorphes $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow X$.

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

- $J_{p,k}X$: fibré des k -jets de p -germes d'applications holomorphes $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow X$.

$$(J_{p,k}X)_x := \{ (\partial_{\bar{u}} \gamma(0))_{1 \leq |\bar{u}| \leq k} \mid \gamma : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (X, x) \text{ holorphe} \}$$

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

- $J_{p,k}X$: fibré des k -jets de p -germes d'applications holomorphes $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow X$.

$$(J_{p,k}X)_x := \{ (\partial_{\bar{u}} \gamma(0))_{1 \leq |\bar{u}| \leq k} \mid \gamma : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (X, x) \text{ holomorphe} \}$$

Exemple

$J_{1,1}X$: *espace tangent holomorphe de X .*

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

- $J_{p,k}X$: fibré des k -jets de p -germes d'applications holomorphes $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow X$.

$$(J_{p,k}X)_x := \{ (\partial_{\bar{u}} \gamma(0))_{1 \leq |\bar{u}| \leq k} \mid \gamma : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (X, x) \text{ holomorphe} \}$$

Exemple

$J_{1,1}X$: *espace tangent holomorphe de X .*

- $E_{p,k,m}X$: fibré vectoriel dont la fibre en $x \in X$ est la suivante :

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

- $J_{p,k}X$: fibré des k -jets de p -germes d'applications holomorphes $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow X$.

$$(J_{p,k}X)_x := \{ (\partial_{\bar{u}} \gamma(0))_{1 \leq |\bar{u}| \leq k} \mid \gamma : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (X, x) \text{ holomorphe} \}$$

Exemple

$J_{1,1}X$: *espace tangent holomorphe de X .*

- $E_{p,k,m}X$: fibré vectoriel dont la fibre en $x \in X$ est la suivante :

$$(E_{p,k,m})_x = \{ \text{polynômes de degré } m \text{ en la fibre de } (J_{p,k}X)_x \}.$$

Comment s'y prend-t-on pour étudier les (familles de) courbes entières ?

Idée fondamentale : Une famille de courbes entières dans une variété de type général X doit satisfaire beaucoup d' "équations aux dérivées partielles".

Idée sur la notion d'équations aux dérivées partielles :

- $J_{p,k}X$: fibré des k -jets de p -germes d'applications holomorphes $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow X$.

$$(J_{p,k}X)_x := \{ (\partial_{\bar{u}} \gamma(0))_{1 \leq |\bar{u}| \leq k} \mid \gamma : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (X, x) \text{ holomorphe} \}$$

Exemple

$J_{1,1}X$: *espace tangent holomorphe de X .*

- $E_{p,k,m}X$: fibré vectoriel dont la fibre en $x \in X$ est la suivante :

$$(E_{p,k,m})_x = \{ \text{polynômes de degré } m \text{ en la fibre de } (J_{p,k}X)_x \}.$$

$\rightsquigarrow$ Une section globale Q de $E_{p,k,m}X$ s'évalue en $f : \mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow X$, et

$$Q(f) \equiv 0$$

définit une équation aux dérivées partielles.

Théorème d'annulation fondamental.

Théorème (Siu ($p=1$), E.)

Théorème d'annulation fondamental.

Théorème (Siu (p=1), E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: *variété projective lisse.*

Théorème d'annulation fondamental.

Théorème (Siu ($p=1$), E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: *variété projective lisse.*
- L *fibré en droite ample sur X .*

Théorème d'annulation fondamental.

Théorème (Siu (p=1), E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: variété projective lisse.
- L fibré en droite ample sur X .
- $Q \in H^0(X, E_{p,k,m}X \otimes L^{-1})$ section globale.

Théorème d'annulation fondamental.

Théorème (Siu (p=1), E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: variété projective lisse.
- L fibré en droite ample sur X .
- $Q \in H^0(X, E_{p,k,m}X \otimes L^{-1})$ section globale.

Alors pour toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^p \rightarrow X$ non-dégénérée,

$$Q(f) \equiv 0.$$

Théorème d'annulation fondamental.

Théorème (Siu (p=1), E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: variété projective lisse.
- L fibré en droite ample sur X .
- $Q \in H^0(X, E_{p,k,m}X \otimes L^{-1})$ section globale.

Alors pour toute application holomorphe $f : \mathbb{C}^p \rightarrow X$ non-dégénérée,

$$Q(f) \equiv 0.$$

- On aimerait le résultat pour les familles de courbes entières, i.e. les applications holomorphes non-dégénérées

$$\mathbb{B}^{p-1} \times \mathbb{C} \rightarrow X.$$

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.
- L : fibré en droite ample sur X .

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.
- L : fibré en droite ample sur X .

Alors pour $m \gg k \gg 1$, $H^0(X, E_{1,k,m}X \otimes L^{-1}) \neq \{0\}$.

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.
- L : fibré en droite ample sur X .

Alors pour $m \gg k \gg 1$, $H^0(X, E_{1,k,m}X \otimes L^{-1}) \neq \{0\}$.

Théorème (Campana-Paūn)

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.
- L : fibré en droite ample sur X .

Alors pour $m \gg k \gg 1$, $H^0(X, E_{1,k,m}X \otimes L^{-1}) \neq \{0\}$.

Théorème (Campana-Paūn)

- X : variété projective lisse.

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.
- L : fibré en droite ample sur X .

Alors pour $m \gg k \gg 1$, $H^0(X, E_{1,k,m}X \otimes L^{-1}) \neq \{0\}$.

Théorème (Campana-Paün)

- X : variété projective lisse.
- L : fibré en droite ample sur X .

Equivalence entre être de type général et l'existence d'équations différentielles globales.

Théorème (Demailly)

- X : variété projective lisse de type général.
- L : fibré en droite ample sur X .

Alors pour $m \gg k \gg 1$, $H^0(X, E_{1,k,m}X \otimes L^{-1}) \neq \{0\}$.

Théorème (Campana-Paūn)

- X : variété projective lisse.
- L : fibré en droite ample sur X .

Si pour certains k et $m \geq 1$, $H^0(X, E_{1,k,m}X \otimes L^{-1}) \neq \{0\}$, alors X est de type général.



- Le résultat de Demailly est théorique : il ne permet pas de comprendre la contrainte imposée par les équations différentielles.

- Le résultat de Demailly est théorique : il ne permet pas de comprendre la contrainte imposée par les équations différentielles.
- Pour tendre vers la conjecture de Green–Griffith–Lang, il est nécessaire d'avoir une information fine sur la nature des équations différentielles produites.

- Le résultat de Demailly est théorique : il ne permet pas de comprendre la contrainte imposée par les équations différentielles.
- Pour tendre vers la conjecture de Green–Griffith–Lang, il est nécessaire d’avoir une information fine sur la nature des équations différentielles produites.

Stratégie :

- Le résultat de Demailly est théorique : il ne permet pas de comprendre la contrainte imposée par les équations différentielles.
- Pour tendre vers la conjecture de Green–Griffith–Lang, il est nécessaire d'avoir une information fine sur la nature des équations différentielles produites.

Stratégie :

- Choix d'équations définissantes spécifiques pour X (E.g. *Déformations d'équations de Fermats*);

- Le résultat de Demailly est théorique : il ne permet pas de comprendre la contrainte imposée par les équations différentielles.
- Pour tendre vers la conjecture de Green–Griffith–Lang, il est nécessaire d'avoir une information fine sur la nature des équations différentielles produites.

Stratégie :

- Choix d'équations définissantes spécifiques pour X (E.g. *Déformations d'équations de Fermats*) ;
- Construction explicite d'équations différentielles/aux dérivées partielles ;

- Le résultat de Demailly est théorique : il ne permet pas de comprendre la contrainte imposée par les équations différentielles.
- Pour tendre vers la conjecture de Green–Griffith–Lang, il est nécessaire d'avoir une information fine sur la nature des équations différentielles produites.

Stratégie :

- Choix d'équations définissantes spécifiques pour X (E.g. *Déformations d'équations de Fermats*) ;
- Construction explicite d'équations différentielles/aux dérivées partielles ;
- Contrôle de leur *lieu de base*.

Théorème (E.)

Théorème (E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: *hypersurface de Fermat de degré $\delta > (N + 1)(N - p)$.*

Théorème (E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: *hypersurface de Fermat de degré $\delta > (N + 1)(N - p)$.*

Alors toute application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{C}^p \rightarrow X$$

Théorème (E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: hypersurface de Fermat de degré $\delta > (N + 1)(N - p)$.

Alors toute application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{C}^p \rightarrow X$$

est algébriquement dégénérée, i.e. son image est incluse dans une hypersurface de X .

Théorème (E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: hypersurface de Fermat de degré $\delta > (N + 1)(N - p)$.

Alors toute application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{C}^p \rightarrow X$$

est algébriquement dégénérée, i.e. son image est incluse dans une hypersurface de X .

- Modulo amélioration du théorème d'annulation, le résultat porterait sur les familles de courbes entières.

Théorème (E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: hypersurface de Fermat de degré $\delta > (N + 1)(N - p)$.

Alors toute application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{C}^p \rightarrow X$$

est algébriquement dégénérée, i.e. son image est incluse dans une hypersurface de X .

- Modulo amélioration du théorème d'annulation, le résultat porterait sur les familles de courbes entières.
- Résultat connu pour $p = 1$ et pour $p = N - 1$ (Kobayashi).

Théorème (E.)

- $X \subset \mathbb{P}^N$: hypersurface de Fermat de degré $\delta > (N + 1)(N - p)$.

Alors toute application holomorphe non-dégénérée

$$f: \mathbb{C}^p \rightarrow X$$

est algébriquement dégénérée, i.e. son image est incluse dans une hypersurface de X .

- Modulo amélioration du théorème d'annulation, le résultat porterait sur les familles de courbes entières.
- Résultat connu pour $p = 1$ et pour $p = N - 1$ (Kobayashi).
- Pour $p > N + 1$, X est de type général.

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.
- $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ vecteur tangent holomorphe unitaire.

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.
- $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ vecteur tangent holomorphe unitaire.

La courbure sectionnelle holomorphe dans la direction de v est définie comme suit :

$$H_{ds^2}(v) := \sum R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} v^i \overline{v^j} v^k \overline{v^\ell}.$$

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.
- $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ vecteur tangent holomorphe unitaire.

La courbure sectionnelle holomorphe dans la direction de v est définie comme suit :

$$H_{ds^2}(v) := \sum R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} v^i \overline{v^j} v^k \overline{v^\ell}.$$

Théorème (Kobayashi)

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.
- $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ vecteur tangent holomorphe unitaire.

La courbure sectionnelle holomorphe dans la direction de v est définie comme suit :

$$H_{ds^2}(v) := \sum R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} v^i \overline{v^j} v^k \overline{v^\ell}.$$

Théorème (Kobayashi)

- (X, ds^2) : variété complexe hermitienne telle que :

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.
- $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ vecteur tangent holomorphe unitaire.

La courbure sectionnelle holomorphe dans la direction de v est définie comme suit :

$$H_{ds^2}(v) := \sum R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} v^i \bar{v}^j v^k \bar{v}^{\ell}.$$

Théorème (Kobayashi)

- (X, ds^2) : variété complexe hermitienne telle que :

$$H_{ds^2} \leq \kappa < 0.$$

Pour finir : lien avec l'hyperbolicité "classique".

Définition (Courbure sectionnelle holomorphe)

- X : variété complexe, munie d'une métrique hermitienne $ds^2 \stackrel{loc}{=} \sum g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^j$.
- $R = \left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} \right)_{i,j,k,\ell}$: tenseur de courbure associé.
- $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ vecteur tangent holomorphe unitaire.

La courbure sectionnelle holomorphe dans la direction de v est définie comme suit :

$$H_{ds^2}(v) := \sum R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} v^i \bar{v}^j v^k \bar{v}^{\ell}.$$

Théorème (Kobayashi)

- (X, ds^2) : variété complexe hermitienne telle que :

$$H_{ds^2} \leq \kappa < 0.$$

Alors X est hyperbolique.

Exemple

Exemple

Le théorème d'uniformisation implique l'existence d'une métrique à courbure constante sur une surface de Riemann S :

Exemple

Le théorème d'uniformisation implique l'existence d'une métrique à courbure constante sur une surface de Riemann S :

- *négative $\rightsquigarrow g(S) \geq 2$;*

Exemple

Le théorème d'uniformisation implique l'existence d'une métrique à courbure constante sur une surface de Riemann S :

- *négative $\rightsquigarrow g(S) \geq 2$;*
- *nulle $\rightsquigarrow g(S) = 1$;*

Exemple

Le théorème d'uniformisation implique l'existence d'une métrique à courbure constante sur une surface de Riemann S :

- *négative* $\rightsquigarrow g(S) \geq 2$;
- *nulle* $\rightsquigarrow g(S) = 1$;
- *positive* $\rightsquigarrow g(S) = 0$.

Exemple

Le théorème d'uniformisation implique l'existence d'une métrique à courbure constante sur une surface de Riemann S :

- *négative* $\rightsquigarrow g(S) \geq 2$;
- *nulle* $\rightsquigarrow g(S) = 1$;
- *positive* $\rightsquigarrow g(S) = 0$.

Il existe une preuve élémentaire (i.e. n'utilisant pas le thm d'uniformisation) qu'une surface de Riemann est hyperbolique ssi son genre est ≥ 2 via le Théorème de Kobayashi précédent.