

# Intégrateur préservant la structure de Dirac pour les systèmes mécaniques non holonomes

Daria Loziienko

La Rochelle Université

Friday 6<sup>th</sup> November, 2020

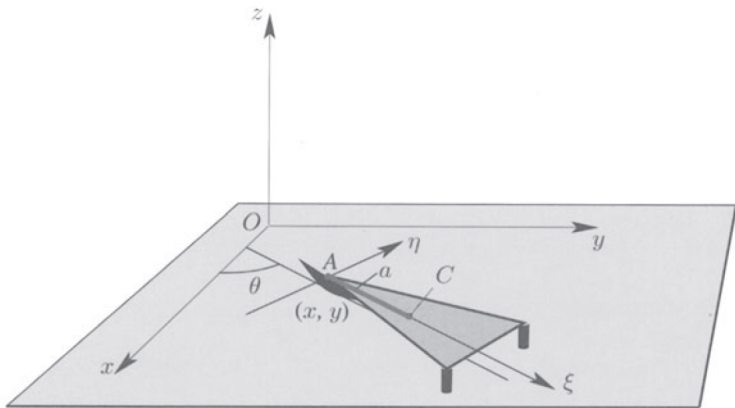


Figure: Le traîneau de Chaplygin.

## La contrainte cinématique.

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0,$$

où

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$



Figure: Patin à glace

## Lagrangien par rapport au point du contact.

Par rapport au point du contact le Lagrangien

$L(x_A, y_A, \theta) = K - U(q)$  est:

$$L(x_A, y_A, \theta) = \frac{1}{2}(m\dot{x}_A^2 + m\dot{y}_A^2 + (J + ma^2)\dot{\theta}^2 - 2ma\dot{x}_A\dot{\theta} \sin \theta + 2ma\dot{y}_A\dot{\theta} \cos \theta) - U(x_A, y_A, \theta).$$

## Les équations de principe maximales du Pontryagin.

Les équations suivantes sont déduites au moyen de la méthode des multiplicateurs de Lagrange:

$$\ddot{x} - a \cos \theta \dot{\theta}^2 - a \sin \theta \ddot{\theta} = -\lambda/m \sin \theta - U_x,$$

$$\ddot{y} - a \sin \theta \dot{\theta}^2 + a \cos \theta \ddot{\theta} = \lambda/m \cos \theta - U_y,$$

$$(I + ma^2)\ddot{\theta} + ma\theta(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) = -U_\theta.$$

## La distribution de contrainte.

La distribution de contrainte  $\Delta_Q \subset TQ$  est donnée pour chaque  $q \in Q$  comme suit:

$$\Delta_Q(q) = \{v_q \in T_q Q \mid \langle \omega(q), v_q \rangle = 0\}, \quad v_q = (v_x, v_y, v_\theta),$$

où

$$\omega = \sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy$$

couvre l'annihilateur de la distribution.

## Le différentiel du Lagrangien et le différentiel de Dirac.

Le différentiel du Lagrangien

$$dL = (x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \theta}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}).$$

le différentiel de Dirac  $\mathfrak{D}L : TQ \rightarrow T^*T^*Q$  de  $L$  est

$$\mathfrak{D}L = (q, \frac{\partial L}{\partial v}, -\frac{\partial L}{\partial q}, v) = ((x, y, \theta), (m\dot{x} - ma\dot{\theta} \sin(\theta),$$

$$m\dot{y} + ma\dot{\theta} \cos(\theta),$$

$$(J+ma^2)\dot{\theta} - 2m\dot{x} \sin(\theta) + m\dot{y} \cos(\theta)), (0, 0, -\partial L/\partial \theta), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})).$$

## Le champ partiel vectoriel.

Le champ partiel vectoriel  $X : TQ \oplus T^*Q \rightarrow TT^*Q$   
localement est donné par  $(q, v, p)$  tels que  $(q, p) = \mathbb{F}L(q, v)$ ,  
où  $(q, v) \in \Delta_Q$ ,

$$X(q, v, p) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_\theta).$$

## Les équations implicites du système lagrangien.

Ensuite, le système lagrangien implicite est donné par  $(L, \Delta, X)$  et peut être décrit par le système :

$$\frac{dq}{dt} \in \Delta, \quad p = \frac{\partial L}{\partial v},$$

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad \frac{dp}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q} \in \Delta,$$

où, dans ce contexte,

$$q = (x, y, \theta), \quad p = (p^x, p^y, p^\theta), \quad v = (q, p, \dot{q}, \dot{p}).$$

## Discrétisation.

Lagrangien discrétisé est  $L_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  est écrit par

$$L_d = \Delta t \left( \frac{1}{2} \left( m \left( \frac{x_k^+ - x_k}{\Delta t} \right)^2 + m \left( \frac{y_k^+ - y_k}{\Delta t} \right)^2 + (I + ma^2) \left( \frac{\theta_k^+ - \theta_k}{\Delta t} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. 2ma \frac{x_k^+ - x_k}{\Delta t} \frac{\theta_k^+ - \theta_k}{\Delta t} \sin(\theta_k) + 2ma \frac{y_k^+ - y_k}{\Delta t} \frac{\theta_k^+ - \theta_k}{\Delta t} \cos(\theta_k) \right) - U(q_k) \right)$$

## Les équations discrétisées pour la méthode de Dirac-1.

- ①  $p_{k+1}^\theta = \dot{\theta}_k(J + ma^2) - ma\dot{x}_k \sin \theta_k + ma\dot{y}_k \cos \theta_k,$
- ②  $p_{k+1}^x = m\dot{x}_k - ma\dot{\theta}_k \sin \theta_k, \quad p_{k+1}^y = m\dot{y}_k + ma\dot{\theta}_k \cos \theta_k,$
- ③  $\dot{y}_{k+1} \cos \theta_{k+1} = \dot{x}_{k+1} \sin \theta_{k+1},$
- ④  $p_k^x - m\dot{x}_k + ma\dot{\theta}_k \sin \theta_k = -\lambda \sin \theta_k,$
- ⑤  $p_k^y - m\dot{y}_k - ma\dot{\theta}_k \cos \theta_k = \lambda \cos \theta_k,$
- ⑥  $p_k^\theta - (J + ma^2)\dot{\theta}_k + ma\dot{x}_k \sin \theta_k - ma\dot{y}_k \cos \theta_k -$   
 $- ma\dot{x}_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k + ma\dot{y}_k \dot{\theta}_k \sin \theta_k = 0,$

## Les équations discrétisées pour la méthode Dirac-1 et Dirac-2

Dans l'intégrateur de Dirac-1 les coordonnées des positions se trouvent des équations suivantes

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \dot{\theta}_k \Delta t,$$

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t,$$

$$y_{k+1} = y_k + \dot{y}_k \Delta t.$$

Pour le modèle de Dirac-2 les équations des positions sont

$$\theta_{k+1} = \theta_{k-1} + 2\dot{\theta}_k \Delta t,$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} + 2\dot{x}_k \Delta t,$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\dot{y}_k \Delta t.$$

## Les équations hamiltoniennes

Les équations Hamiltoniennes différentielles sont de la forme:

$$H = \frac{1}{2m^2}(mp_x^2 + mp_y^2 + m^3 p_\theta^2 + a^2 m^2 p_y^2 \cos^2 \theta + \\ + a^2 m^2 p_x^2 \sin^2 \theta - a^2 m^2 p_x p_y \sin 2\theta + \\ + 2am^2 p_x p_\theta \sin \theta + 2am^2 p_y p_\theta (2 \sin \frac{\theta}{2})^2 - 1) + U(x, y, \theta).$$

## Équations différentielles hamiltoniennes contraintes

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q},$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} + U_q = \dot{p},$$

$$\phi = \dot{q}_2(q, p) \cos(q_3) - \dot{q}_1(q, p) \sin(q_3)$$

·  
La contrainte discrétisée

$$\phi = \dot{q}_2(q^{k+1}, p^{k+1}) \cos(q_3^{k+1}) - \dot{q}_1(q^{k+1}, p^{k+1}) \sin(q_3^{k+1})$$

·

## La méthode implicite d'Euler.

$$\begin{aligned}p^{k+1} &= p^k + h\dot{p}(p^{k+1}, q^{k+1}), \\q^{k+1} &= q^k + h\dot{q}(p^{k+1}, q^{k+1}),\end{aligned}$$

## La méthode explicite d'Euler.

$$\begin{aligned}p^{k+1} &= p^k + h\dot{p}(p^k, q^k) \\q^{k+1} &= q^k + h\dot{q}(p^k, q^k),\end{aligned}$$

## La méthode symplectique d'Euler.

$$\begin{aligned}p^{k+1} &= p^k + h\dot{p}(p^{k+1}, q^k) \\q^{k+1} &= q^k + h\dot{q}(p^{k+1}, q^k).\end{aligned}$$

## Les équations discrétisées pour la méthode des trapèzes.

Le schéma des trapèzes a été implémenté dans les équations suivantes:

$$p^{k+1} = p^k + \frac{h}{2}(\dot{p}(p^k, q^k) + \dot{p}(p^{k+1}, q^{k+1}))$$

$$q^{k+1} = q^k + \frac{h}{2}(\dot{q}(p^k, q^k) + \dot{q}(p^{k+1}, q^{k+1})),$$

$$\phi = \dot{q}_2(q^{k+1}, p^{k+1}) \cos(q_3^{k+1}) - \dot{q}_1(q^{k+1}, p^{k+1}) \sin(q_3^{k+1})$$

## Les équations de la méthode Dirac-Runge-Kutta.

Les équations pour la méthode Dirac-Runge-Kutta sont données par :

- ①  $L_k = h^{\frac{1}{2}}(m(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + (J + ma^2)\dot{\theta}_k^2 + 2ma\dot{\theta}_k(\dot{y}_k \cos(\theta_k) - \dot{x}_k \sin(\theta_k))) + U(q),$
- ②  $\dot{y}_k \cos(\theta_k) - \dot{x}_k \sin(\theta_k) = 0,$
- ③  $p_x^k - \frac{1}{h} \frac{\partial L_k}{\partial \dot{x}_k} + \frac{\partial L_k}{\partial x_k} = \lambda_k \sin(\theta_k),$
- ④  $p_x^{k+1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m(\dot{x}_k - ma\dot{\theta}_k \sin(\theta_k)),$
- ⑤  $p_y^{k+1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_k} = m(\dot{y}_k + ma\dot{\theta}_k \cos(\theta_k)),$
- ⑥  $p_\theta^{k+1} = (J + ma^2)\dot{\theta}_k - ma(\dot{x}_k \sin(\theta_k) - \dot{y}_k \cos(\theta_k)),$
- ⑦  $\lambda_k = \frac{Jm}{(J+ma^2)}\dot{\theta}_k(\dot{x}_k \cos(\theta_k) + \dot{y}_k \sin(\theta_k)) - \frac{a}{J+ma^2} U_\theta + \cos\theta U_y - \sin\theta U_x.$

## Les équations de la méthode de Dirac-Runge-Kutta.

Les coordonnées de configuration pour la méthode Dirac-Runge-Kutta-1 sont données par :

$$\textcircled{1} \quad q_{k+1} = q_k + h/6(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4), \text{ où } f_1 = \dot{q}(q_k, p_k),$$

$$\textcircled{2} \quad f_2 = \dot{q}(q_k + h/2f_1, \tilde{p}_1),$$

$$\textcircled{3} \quad f_3 = \dot{q}(q_k + h/2f_2, \tilde{p}_2),$$

$$\textcircled{4} \quad f_4 = \dot{q}(q_k + h/2f_3, \tilde{p}_3), \text{ où } \tilde{p}_1 = \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{L}(q_k + h/2f_1, f_1)}{\partial f_1},$$

$$\textcircled{5} \quad \tilde{p}_2 = \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{L}(q_k + h/2f_2, f_2)}{\partial f_2},$$

$$\textcircled{6} \quad \tilde{p}_3 = \frac{1}{h} \frac{\partial \tilde{L}(q_k + h/2f_3, f_3)}{\partial f_3}.$$

Les équations de mouvement de traîneau avec les contraintes résolu appliquées a la méthode ode15.

$$\begin{aligned}\dot{v} &= a\omega^2, \\ \dot{\omega} &= -\left(\frac{ma}{J + ma^2}\right)v\omega, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{x} &= v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= v \sin(\theta),\end{aligned}$$

où  $v$  est le vecteur de vitesse linéaire,  $\omega$  est le vecteur de vitesse angulaire.

## Les conditions initiales appliquées.

Les conditions initiales de position du traîneau de Chaplygin:

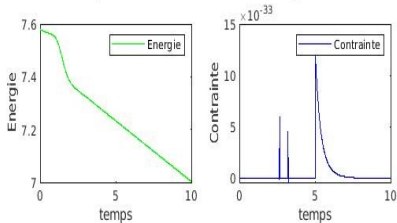
① Configurations:  $x_0 = 1, y_0 = 2, m = 1, a = 1, \theta = \pi/6$

② Paramètres:

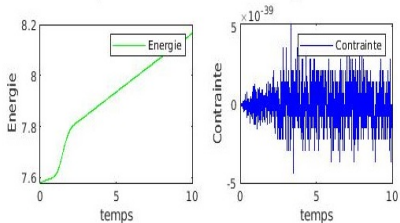
$$m = 1, a = 1, \phi = \pi/10$$

③ Temps de 0 à 10 sec dans 1000 itérations.

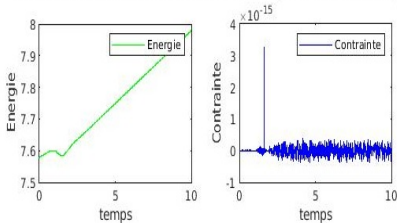
Méthode d'Euler implicite. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



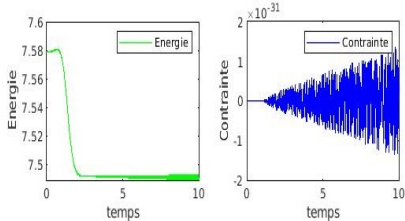
Méthode d'Euler explicite. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



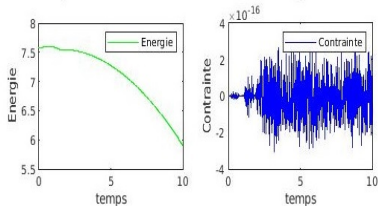
Méthode de Dirac-1. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



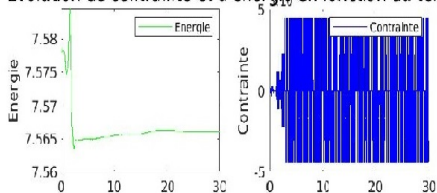
Méthode de Dirac-2. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



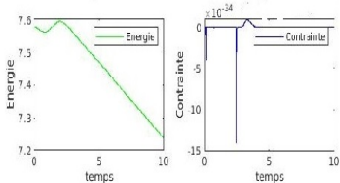
Méthode de Runge-Kutta-Dirac-1. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



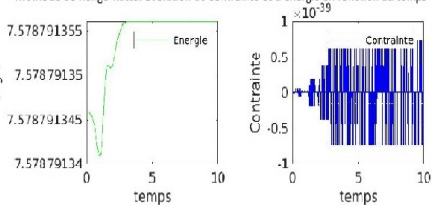
Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



Méthode d'Euler semi-implicite. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



Méthode de Runge-Kutta. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



La comparaison de la contrainte et de l'énergie (le système de traîneau de Chaplygin sur un plan incliné.

Ordre	Méthode	Contrainte, max	Énergie, max
1	EIM	$2.0134 \cdot 10^{-7}$	0.3316
1	EEM	$2.0134 \cdot 10^{-7}$	0.3433
1	Dirac-1	$1.0689 \cdot 10^{-29}$	0.1602
2	Trapèzes	$4.3282 \cdot 10^{-6}$	7.0912
2	Dirac-2	$1.8397 \cdot 10^{-62}$	0.0081
4	Runge-Kutta	$5.3976 \cdot 10^{-79}$	$1.030610^{-16}$
4	Dirac-Runge-Kutta	$9.4731 \cdot 10^{-32}$	-

# Système à 3 particules

(see 'Mechanical systems subject to holonomic constraints' by Oscar Gonzales)

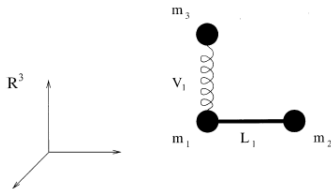


Figure: Système à 3 particules.

## Contraintes et Lagrangien.

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \text{length}^2 = 0$$

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^3 |\dot{q}_i|^2 - U(q),$$

où

$$U(q) = 1/4K(|q_1 - q_3| - 1)^2, \quad K = 100.$$

## Les conditions initiales appliquées.

Les conditions initiales de position du système à 3 particules :

① Configurations:

$$x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0 \quad x_2 = 0, y_2 = 1,$$

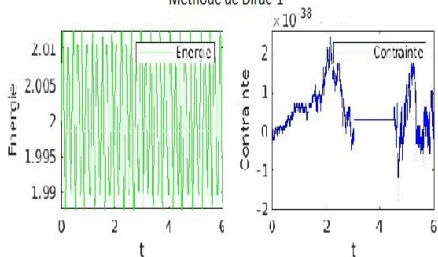
$$z_2 = 1 \quad x_3 = 0, y_3 = 1, z_3 = 1;$$

② Paramètres:

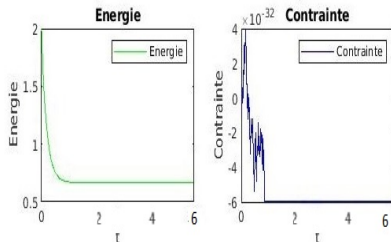
$$m = 1, l = 1, K = 100;$$

③ Temps: de 0 à 10 sec dans 1000 itérations.

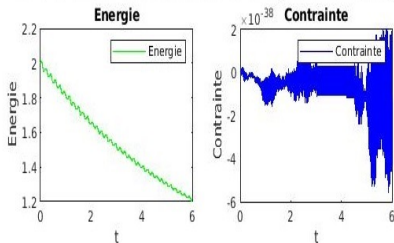
Méthode de Dirac-1



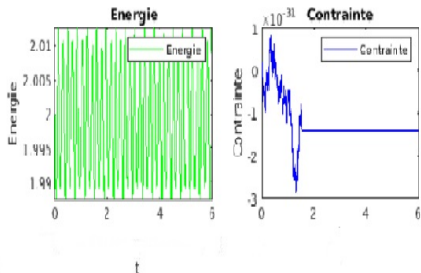
Méthode d'Euler implicite. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



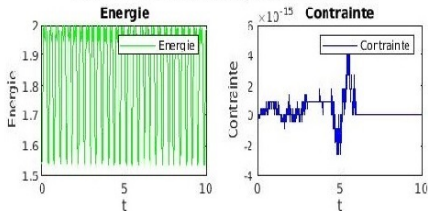
Méthode de Dirac-2. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



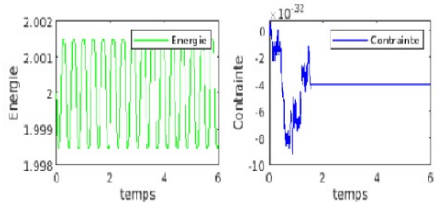
Méthode d'Euler semi-implicite. Evolution de contrainte et d'energie en fonction du temps



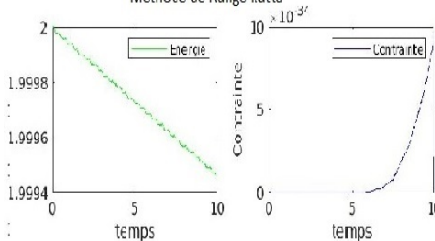
Evolution de contrainte et d'énergie en fonction du temps



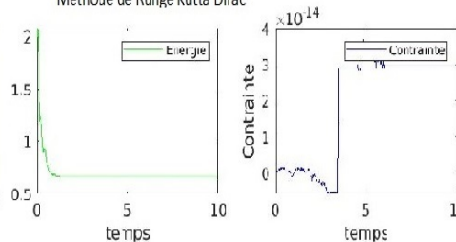
Méthode des trapèzes. Evolution de contrainte et d'énergie en fonction du temps



Methode de Runge Kutta



Methode de Runge Kutta Dirac



La comparaison de la contrainte et de l'énergie (le système contraint à 3 particules).

Ordre	Méthode	Contrainte, max	Énergie, max
1	EEM	$2.1344 \cdot 10^{-61}$	37.0433
1	IEM	$3.6 \cdot 10^{-63}$	1.7777
1	ESM	$8.1796 \cdot 10^{-62}$	$1.5798 \cdot 10^{-4}$
1	Dirac-1	$6.6049 \cdot 10^{-76}$	$1.5799 \cdot 10^{-4}$
2	Trapèzes	$8.4640 \cdot 10^{-63}$	$2.3395 \cdot 10^{-6}$
2	Dirac-2	$3.1136 \cdot 10^{-75}$	0.6297
4	Runge-Kutta	$9.7508 \cdot 10^{-67}$	$2.8584 \cdot 10^{-7}$
4	Dirac-Runge-Kutta	$1.3915 \cdot 10^{-27}$	-

La comparaison de la contrainte et de l'énergie obtenu par DRK (le système à 3 particules), l'intervalle est  $[0, 1]$ .

Pas	Contrainte RMSE	Énergie RMSE
0.01	$7.0131 \cdot 10^{-16}$	0.8192
0.002	$1.2410 \cdot 10^{-15}$	0.4213
0.001	$9.8689 \cdot 10^{-16}$	0.3514
$6.66 \cdot 10^{-4}$	$2.3072 \cdot 10^{-15}$	0.3289
$5 \cdot 10^{-4}$	$4.0335 \cdot 10^{-15}$	0.3177
$4 \cdot 10^{-4}$	$9.1594 \cdot 10^{-15}$	0.3110
$3.7 \cdot 10^{-4}$	$4.3596 \cdot 10^{-15}$	0.3091
$3.33 \cdot 10^{-4}$	$1.4083 \cdot 10^{-14}$	0.3064
$2.85 \cdot 10^{-4}$	$5.7809 \cdot 10^{-15}$	0.3036
$2.5 \cdot 10^{-4}$	$2.5493 \cdot 10^{-15}$	0.3014

La comparaison de la contrainte et de l'énergie obtenu par DRK (le traîneau de Chaplygin), l'intervalle est  $[0, 1]$ .

Pas	Contrainte RMSE	Énergie RMSE
0.01	$1.2284 \cdot 10^{-17}$	0.0129
0.002	$1.331 \cdot 10^{-17}$	0.0048
0.001	$1.3306 \cdot 10^{-17}$	0.0025
$6.6 \cdot 10^{-4}$	$1.4304 \cdot 10^{-17}$	0.0018
$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.303 \cdot 10^{-17}$	0.0016
$5 \cdot 10^{-4}$	$1.3263 \cdot 10^{-17}$	0.00332
$4.3 \cdot 10^{-4}$	$1.3493 \cdot 10^{-17}$	0.003157
$4 \cdot 10^{-4}$	$1.3614 \cdot 10^{-17}$	0.0031
$3.37 \cdot 10^{-4}$	$1.4196 \cdot 10^{-17}$	0.0033

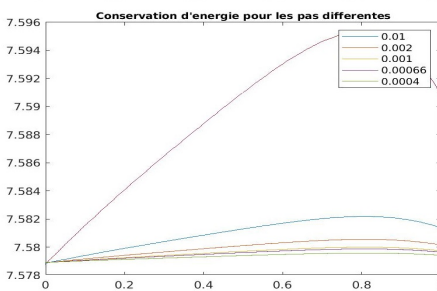
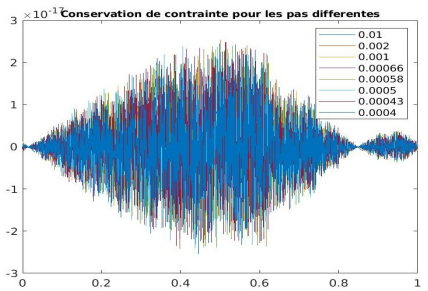
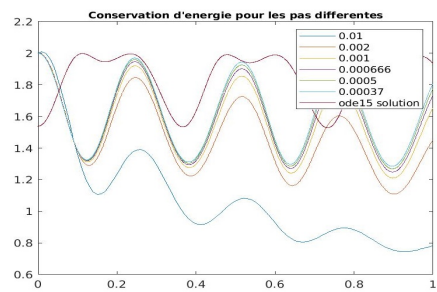
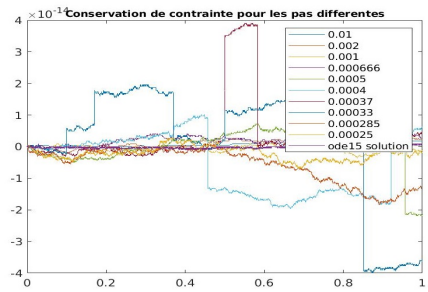


Figure: Contrainte et l'énergie avec les pas differents

## Conclusions

- ① Le système non-holonome.
  - ① La contrainte est le plus préservée pour les méthodes de Dirac-2, Runge-Kutta et Dirac-Runge-Kutta. L'énergie est conservée le mieux par les intégrateurs de Dirac-1, Dirac-2 et Runge-Kutta.
  - ② La méthode de Dirac-Runge-Kutta est appliquée sur l'intervalle d'une seconde avec les pas différents. Contrainte arrive à se conserver mieux lorsque on diminue le pas. Énergie arrive à se conserver mieux lorsque on diminue le pas.

## Conclusions

- ① Le système holonome.
  - ① La contrainte est le plus préservée pour les méthodes de Dirac-2, Runge-Kutta et Dirac-1. L'énergie est conservée le mieux par les intégrateurs de trapèzes et Runge-Kutta.
  - ② La méthode de Dirac-Runge-Kutta est appliquée sur l'intervalle d'une seconde avec les pas différents. La contrainte a une tendance légèrement s'accroître si on prend le pas plus petit. L'énergie arrive à se conserver mieux lorsque on diminue le pas.

## Remarques et perspectives

Tout les expériences sont implémentées au moyens des applications de Matlab. On ne garantit pas la précision des valeurs obtenues. On peut donc envisager les perspectives suivantes, sur les quelles je travaille actuellement, spécifiquement:

- ① Je travaille sur le développement de code généralisé applicable pour systèmes non holonomes et holonomes en Python.
- ② En perspective on peut montrer que la méthode de Dirac-Runge-Kutta qui est introduit conserve vraiment la structure de Dirac.