

Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports pour la simulation passive de systèmes couplés

Antoine Falaize^a, Thomas Hélie^b et David Roze^b

Réunion du GDR CNRS n°2043 *Géométrie Différentielle et Mécanique (GDM)*

4 au 6 novembre 2020, Paris Jussieu

^a Team M2N, LaSIE (UMR CNRS 7356), Université de la Rochelle, France

^b Team S3AM, STMS Laboratory (UMR CNRS 9912), IRCAM-CNRS-SU, Paris, France

Contexte

- Modélisation de systèmes **complexes**, **multiphysiques** et **ouverts** au cœur des logiciels de CAE¹.
- Ces systèmes ouverts interagissent en échangeant énergie, matière et/ou information via leurs frontières.
- Ils sont constitués de **sous-systèmes** qui émanent de plusieurs domaines physiques.
- Complexité : nombreux phénomènes intriqués → Modèles algébro-différentiels non-linéaires de grande dimension.

Motivations

- Tous ces systèmes physiques sont **passifs** : accroissement d'énergie totale \leq apports de l'extérieur.
- Préservée dans les modèles, cette propriété assure la **stabilité**.
- Exploitée pour construire schémas numériques et lois de commandes **inconditionnellement stables**.

La passivité est un paradigme de choix pour le développement systématique de logiciels de CAE

1. Computer Aided Engineering

Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP)

- Classe de systèmes introduite en 1995².
- Combine trois paradigmes : (i) modélisation par ports, (ii) mécanique théorique et (iii) théorie du contrôle.
- Fournit une représentation d'état **structurée** selon les échanges de puissance.
- **Garantit la passivité des modèles.**

2. Arjan van der SCHAFT et Bernhard MASCHKE. "The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports". In : AEU. Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik 49.5-6 (1995), p. 362-371.

Paradigme 1 : Les modèles par ports (port-based modeling)

- Théorie introduite par Henry Paynter à la fin des années 50³.
- Cadre unifié pour la modélisation des systèmes multiphysiques.
- Focus sur les flux d'énergie et approche *divide and conquer*.
- Un système physique = (i) **interconnexion** de (ii) **composants**

Ingrédients

1. Composant : système dynamique ouvert qui interagit avec l'extérieur via des **ports**.
2. Port : couple de variables duales (e.g. force/vitesse) dont le produit donne la puissance reçue.
3. Réseau : définit les échanges de puissance internes (entre composants) et avec l'extérieur.

3. Henry M PAYNTER. Analysis and design of engineering systems. MIT press, 1961.

Paradigme 2 : Géométrie différentielle

- Fournit une structure (symplectique) pour la formulation de la dynamique des systèmes conservatifs (Hamiltoniens).
- Pour les SHP, la structure sous-jacente est donnée par la structure d'interconnexion du système.
- Le réseau fourni par la modélisation par ports est décrit mathématiquement par une **structure de Dirac**⁴, qui peut être vue comme une généralisation des lois de Kirchhoff en électronique.
- Cette construction très générale permet de traiter les systèmes ouverts et dissipatifs.
- Une propriété importante est que la composition de deux structures de Dirac est une structure de Dirac.
- Permet de modéliser des systèmes complexes en connectant des systèmes élémentaires décrits dans ce formalisme.

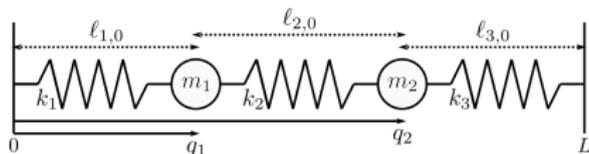
4. Theodore James COURANT. "Dirac manifolds". In : Transactions of the American Mathematical Society 319.2 (1990), p. 631-661.

Paradigme 3 : Théorie du contrôle

- Emphase la possibilité de **contrôler** des systèmes dynamique via des **entrées/sorties**.
- Nombreux développement depuis les fondements en électronique jusqu'à sa forme moderne, géométrique.
- Les propriétés physiques du système contrôlé (symétries, lois de conservations) doivent être **préservées et exploitées**.
- Une classe importante de méthodes exploite la passivité (*passivity based control*).
- Par construction, la théorie des SHP fournit un cadre systématique pour le développement de tels contrôleurs/observateurs via l'approche Interconnection and Damping Assignment for Passivity Based Control (IDA-PBC⁵).

5. Romeo ORTEGA et al. "Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems". In : Automatica 38.4 (2002), p. 585-596.

Exemple introductif : Système masses/ressorts



Configurations : $q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$

Vitesses : $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}(t)$

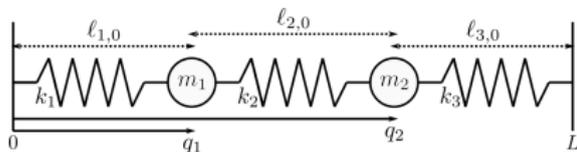
Paramètres : $M = \text{diag}(m_1, m_2)$ et $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$

Quantités de mvt. : $p(t) = M \dot{q}(t)$

Élongations :

$$\ell(q) = \begin{pmatrix} q_1 - \ell_{1,0} \\ q_2 - q_1 - \ell_{2,0} \\ L - q_2 - \ell_{3,0} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_q - \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_{1,0} \\ \ell_{2,0} \\ -\ell_{1,0} - \ell_{2,0} \end{pmatrix}}_{\ell_0}.$$

Exemple introductif : Système masses/ressorts



Configurations : $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$

Vitesses : $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}(t)$

Quantités de mv. : $p(t) = M \dot{q}(t)$

Élongations : $\ell(q) = C q - \ell_0$

$M = \text{diag}(m_1, m_2)$ et $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$

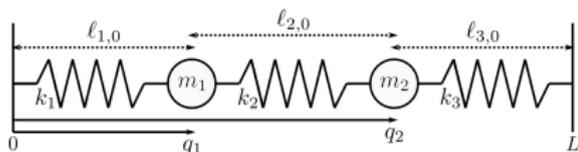
Approche par la mécanique analytique

1. Énergies : cinétique $E_c(\dot{q}) = \frac{\dot{q}^T M \dot{q}}{2}$ et potentielle $E_p(q) = \frac{1}{2} \ell^T(q) K \ell(q)$
2. Lagrangien : $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = E_c(\dot{q}) - E_p(q)$ et principe de moindre action $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ (E-L)
3. Tr. de Legendre : $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, Hamiltonien $\mathcal{H}(p, q) = p^T \dot{q}(p) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(p)) = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + \frac{1}{2} \ell(q)^T K \ell(q)$
4. Équations du mouvement (PFD) : $\frac{dp}{dt} = -\nabla_q \mathcal{H}(p, q) = -C^T K \ell(q)$
5. Par construction $\frac{dq}{dt} = \nabla_p \mathcal{H}(p, q) = \dot{q}$

Système dynamique :

$$\begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ +\text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_p \mathcal{H}(p, q) \\ \nabla_q \mathcal{H}(p, q) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \text{ (et forme symplectique).}$$

Exemple introductif : Système masses/ressorts



Configurations : $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$

Vitesses : $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}(t)$

Quantités de mv. : $p(t) = M \dot{q}(t)$

Élongations : $\ell(q) = C q - \ell_0$

$M = \text{diag}(m_1, m_2)$ et $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$

Approche par les systèmes Hamiltoniens à Ports

1. Inventaire des composants :

Composants	État	Énergie	Port vitesse	Port force
2 Masses	$x_m(t) = p$	$h_m(x_m) = \frac{1}{2} x_m^T M^{-1} x_m$	$v_m = \dot{q} = \nabla h_m(x_m)$	$f_m = M \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{dx_m}{dt}$
3 Ressorts	$x_k(t) = \ell$	$h_k(x_k) = \frac{1}{2} x_k^T K x_k$	$v_k = \frac{d\ell}{dt}$	$f_k = K x_k = \nabla h_k(x_k)$

2. État (variables d'énergie) : $x = (x_m, x_k) \in \mathbb{R}^5$

3. Fonction de stockage (Hamiltonien) : $H : x \mapsto h_m(x_m) + h_k(x_k) \in \mathbb{R}_+$

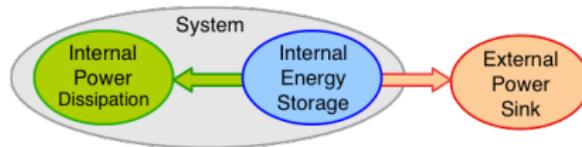
4. Équations du mouvement (PFD) : $f_m = -C^T f_k = -C \nabla_{x_k} H(x)$

5. Par construction : $v_k = C v_m = C \nabla_{x_m} H(x)$

Système dynamique :

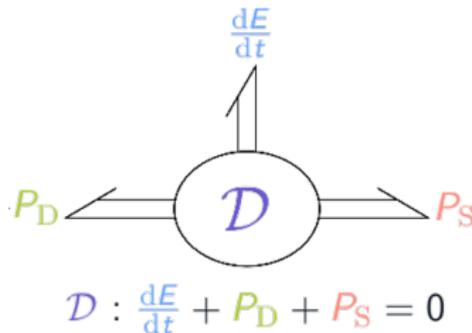
$$\begin{pmatrix} \frac{dx_m}{dt} \\ \frac{dx_k}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -C^T \\ +C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{x_m} H(x) \\ \nabla_{x_k} H(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \text{ (et forme dégénérée } \neq \text{ symplectique).}$$

Systèmes Hamiltoniens à Ports



Bilan de puissance $\frac{dE}{dt} + P_D + P_S = 0$

- Énergie stockée E (J),
- Puissance dissipée P_D (W),
- Puissance échangée via les entrées/sorties P_S (W),
- Structure de Dirac \mathcal{D} .



Systemes Hamiltoniens à Ports en dimension finie

Structure de Dirac (définition)

- \mathcal{F} un e.v. de dimension N finie (espace des flux) et $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$ sont dual (espace des efforts),
- Espace des puissances $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ muni du crochet de dualité

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) & \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle \end{cases}$$

On définit l'appariement symétrique

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{B} & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1), (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2)) & \mapsto \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \end{cases}$$

Définition : Structure de Dirac

Une structure de Dirac sur $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est un sous-espace linéaire $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ où

$$\mathcal{D}^\perp = \{(\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{B}, \langle \langle (\mathbf{f}, \mathbf{e}), (\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{e}}) \rangle \rangle = 0, \forall (\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{e}}) \in \mathcal{D}\}$$

Structure de Dirac (représentations)

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^N$, $\langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = \sum_{i=1}^N f_i e_i$ le produit scalaire usuel, et deux matrices $E, F \in \mathbb{R}^{N \times N}$.
Alors

Représentation image $\mathcal{D} = \{(\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{B}, \exists \lambda \in \mathbb{R}^N \mathbf{f} = F^T \lambda, \mathbf{e} = E^T \lambda\}$

Représentation noyau $\tilde{\mathcal{D}} = \{(\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{B}, F\mathbf{f} + E\mathbf{e} = \mathbf{0}\}$

sont des structures de Dirac si et seulement si

1. EF^T est antisymétrique pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
2. $\text{rang}[E \ F] = \dim \mathcal{F}$ avec $[E \ F]$ la concaténation horizontale.

Généralement en pratique

- F est symétrique définie positive,
- E est antisymétrique.

Une conséquence pratique : $\langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = 0, \forall (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{D}$.

Composants stockants (définitions)

Relation constitutive pour le composant s

Fonction de stockage (Hamiltonien) H_s de l'état x_s .

Énergie stockée $E_s(t) = H_s(x_s(t)) \geq 0$.

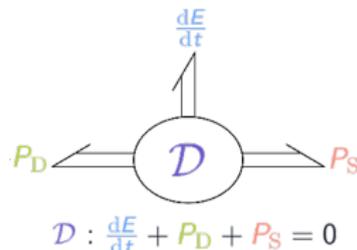
Puissance reçue $\frac{dE_s}{dt} = H'_s(x_s) \frac{dx_s}{dt}$

Variables de port pour le composant s

Puissance reçue $\frac{dE_s}{dt} = f_s v_s$.

contrôle v $v_s = \frac{dx_s}{dt} \implies f_s = H'_s(x_s)$.

contrôle f $f_s = \frac{dx_s}{dt} \implies v_s = H'_s(x_s)$.



Énergie totale dans les n_E composants stockants

- $x = (x_1, \dots, x_{n_E})$.
- $E = H(x) = \sum_{s=1}^{n_E} H_s(x_s) \geq 0$.
- $\frac{dE}{dt} = \nabla H^T \frac{dx}{dt} = \sum_{s=1}^{n_E} \frac{dH_s}{dx_s} \frac{dx_s}{dt}$.

Masse

État : Qtté de mv. $x_m = m v_m$.

Hamiltonien : Énergie cinétique $H_m(x_m) = \frac{x_m^2}{2m}$.

Vitesse : $v_m = H'_m(x_m) = \frac{x_m}{m}$ (effort).

Force : Force d'inertie $f_m = \frac{dx_m}{dt} = m \frac{dv_m}{dt}$ (flux).

Raideur cubique

État : Élongation ℓ_k .

Hamiltonien : Énergie potentielle $H_k(x_k) = \frac{Kx_k^2}{2} \left(1 + \epsilon \frac{x_k^2}{2} \right)$.

Vitesse : $v_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{d\ell_k}{dt}$ (flux).

Force : Rappel $f_k = H'_k(x_k) = K \ell_k (1 + \epsilon \ell_k^2)$ (effort).

Composants dissipatifs (définitions)

Relation constitutive du composant d

Fonction de dissipation z_d de la variable w_d .

Puissance reçue (dissipée) $P_{Dd}(t) = z_d(w_d(t)) \geq 0$.

Variables de port pour le composant d

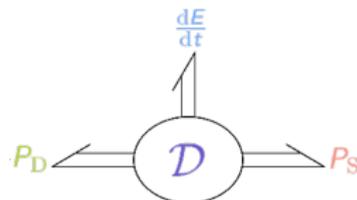
Puissance reçue $P_{Dd}(t) = e_d f_d \geq 0$

contrôle v $v_d = w_d \implies f_d = z_d(w_d)$.

contrôle f $f_d = w_d \implies v_d = z_d(w_d)$.

Puissance dissipée au total dans n_D composants dissipatifs

- $w = (w_1, \dots, w_{n_D})$.
- $z(w) = (z_1(w_1), \dots, z_{n_D}(w_{n_D}))$.
- $P_D = z(w)^T \cdot w = \sum_{d=1}^{n_D} z_d(w_d) w_d \geq 0$.



$$D : \frac{dE}{dt} + P_D + P_S = 0$$

Amortissement linéaire, contrôlé en vitesse

Variable : Vitesse d'élongation $w_a = \dot{\ell}_a$.

Fonction : Force de résistance $z_a(w_a) = a w_a$, avec $a > 0$.

Vitesse : $v_a = w_a$ (flux).

Force : $f_a = z_a(w_a) = a v_a$ (effort).

Puissance dissipée $P_D = f_a v_a = a \dot{\ell}_a^2$.

Amortissement linéaire, contrôlé en force

Variable : Force de résistance $w_a = f_a$.

Fonction : Vitesse d'élongation $z_a(w_a) = w_a/a$, avec $a > 0$.

Force : $f_a = w_a$ (flux).

Vitesse : $v_a = z_a(w_a) = f_a/a$ (effort).

Puissance dissipée $P_D = f_a v_a = f_a^2/a$.

Ports externes (definitions)

Entrée et sortie sur le port p

Qté pilotée u (entrée) et qté observée y (sortie) colocalisées.

Puissance reçue $P_{Sp}(t) = u_p(t) y_p(t)$.

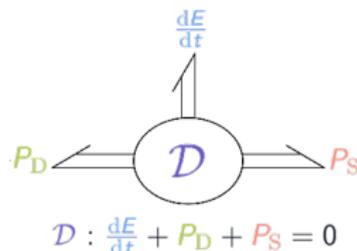
P_{Sp} est la puissance qui sort du système sur le port p .

Variables de puissance sur le port p

Puissance reçue $P_{Sp}(t) = e_p f_p$

contrôle v $v_p = y_p \implies f_p = u_p$ (force appliquée).

contrôle f $f_p = y_p \implies v_p = u_p$ (vitesse imposée).



Puissance totale sur n_S ports externes

- $u = (u_1, \dots, u_{n_S})$.
- $y = (y_1, \dots, y_{n_S})$.
- $P_S = u^T \cdot y = \sum_{p=1}^{n_S} u_p y_p$.

Force imposée

Entrée : force $u_U = f_U$.

Sortie : vitesse colocalisée $y_U = v_U$.

Force : $f_U = u_U$ (effort).

Vitesse : $v_U = y_U$ (flux).

Puissance reçue $P_S = f_U e_U$.

Composants

Stockage $f_x = \frac{dx}{dt}$, $e_x = \nabla H(x)$

Dissipation $f_w = w$, $e_w = z(w)$

Ports $f_y = y$, $e_y = u$

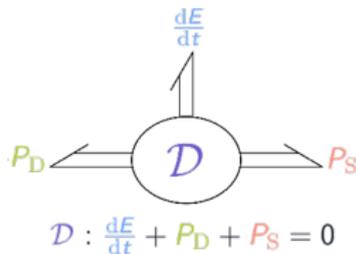
Encode le bilan de puissance

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{f} \\ &= \underbrace{\nabla H(x)^T \cdot \frac{dx}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{z(w) \cdot w}_{P_D} + \underbrace{u^T \cdot y}_{P_S} \end{aligned}$$

Réseau (structure de Dirac)

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_w \\ f_y \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_w \\ e_y \end{pmatrix}$$

avec (généralement) $\mathbf{f} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}$ et $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$.



Système Hamiltonien à ports en dimension finie

$$\begin{array}{l} \text{Stockage} \\ \text{Dissipation} \\ \text{Ports} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ w \\ y \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} +J_{xx} & +J_{xw} & +J_{xy} \\ -J_{xw}^T & +J_{ww} & +J_{wy} \\ -J_{xy}^T & -J_{wy}^T & +J_{yy} \end{pmatrix}}_J \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ z(w) \\ u \end{pmatrix}}_e$$

Les J_{aa} sont antisymétriques.

Dissipations linéaires (cas explicite)

- Si K une matrice symétrique définie positive et $z(w) = K \cdot w$,
- et $J_{ww} = 0$, $J_{wy} = 0$ (condition qui peut être relaxée),

Alors les dissipations peuvent être contractée dans la structure d'interconnexion.

SHP avec dissipation contractée

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (J_{xx} - R) \cdot \nabla H(x) + J_{xy} \cdot u, \\ y &= -J_{xy}^T \cdot \nabla H(x) + J_{yy} \cdot u. \end{aligned}$$

Interprétation

- J_{xx} : interconnexion conservative,
- $R = J_{xw}^T \cdot K \cdot J_{xw}$: interconnexion résistive (symétrique définie positive).

Schéma numérique préservant la structure SHP à temps discret

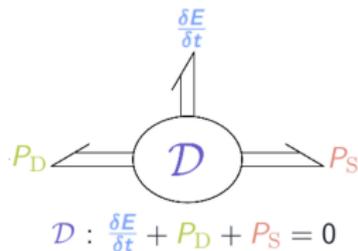


Schéma numérique préservant la structure SHP à temps discret

Objectif

Garantir un bilan de puissance à temps discret : $\frac{\delta E}{\delta T}[k] + P_D[k] + P_S[k] = 0$,
avec $\delta E[k]$ l'accroissement d'énergie au pas de temps k .

Choix : schéma à un pas

- $\frac{\delta E[k]}{\delta T} = \frac{E[k+1]-E[k]}{\delta T} = \frac{H(x[k+1]) - H(x[k])}{\delta T}$
- On veut retrouver la *chain rule* à temps discret (ici pour un Hamiltonien *séparé* mais se généralise) :

$$\frac{E[k+1] - E[k]}{\delta T} = \sum_{n=1}^{n_E} \frac{H_n(x_n[k+1]) - H_n(x_n[k])}{x_n[k+1] - x_n[k]} \cdot \frac{x_n[k+1] - x_n[k]}{\delta T}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\rightarrow \frac{\delta x[k]}{\delta T} = \frac{x[k+1]-x[k]}{\delta T} \\ \nabla H(x) &\rightarrow \nabla^d H(x[k], \delta x[k]) \triangleq \text{gradient discret}^6 \end{aligned}$$

avec

$$\left[\nabla^d H(x, \delta x) \right]_n = \frac{H_n([x + \delta x]_n) - H_n([x]_n)}{[\delta x]_n} \xrightarrow{[\delta x]_n \rightarrow 0} \frac{dH_n}{dx_n}(x_n).$$

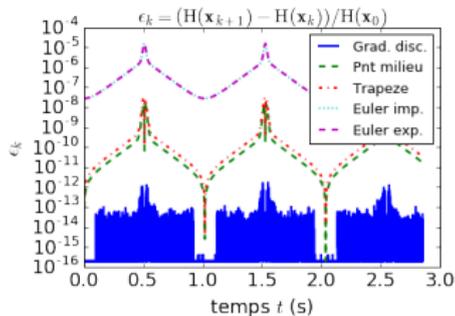
Las structure SHP est préservée à temps discret \Rightarrow **passivité numérique garantie**.

6. Toshiaki ITOH et Kanji ABE. "Hamiltonian-conserving discrete canonical equations based on variational difference quotients". In : Journal of Computational Physics 76.1 (1988), p. 85-102.

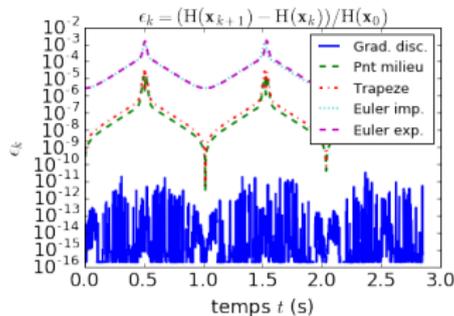
Exemple : $x \in \mathbb{R}^2$, $H(x) = \log(\cosh(x_1)) + \cosh(x_2)$

Erreur relative sur le bilan de puissance (f_e : Fréquence d'échantillonnage)

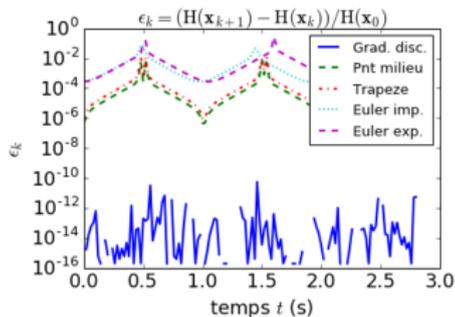
$f_e = 5000\text{Hz}$



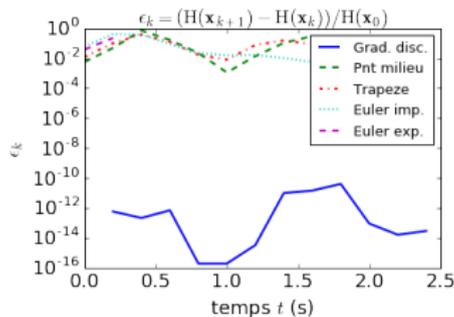
$f_e = 500\text{Hz}$



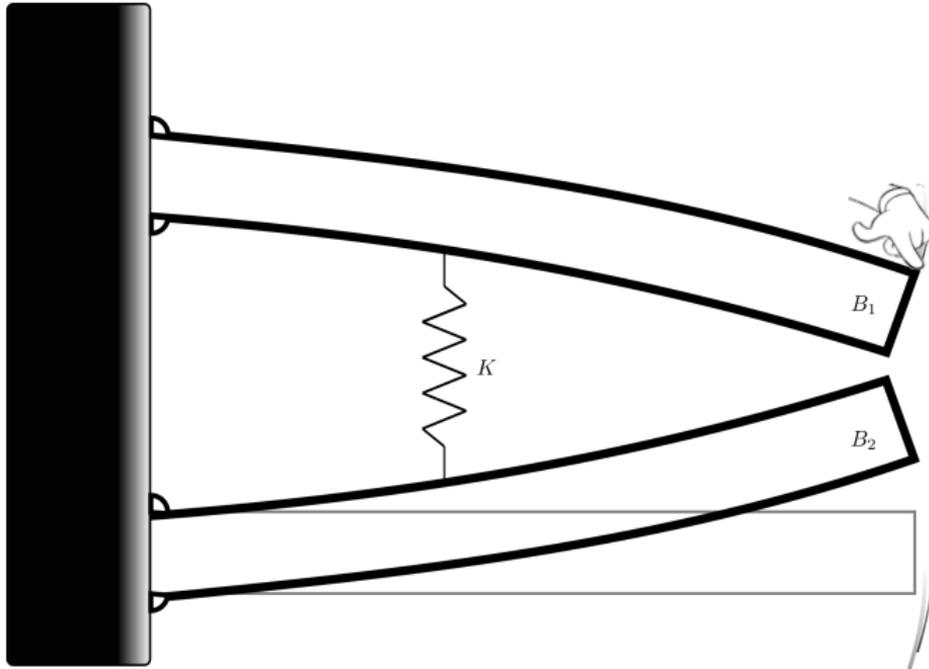
$f_e = 50\text{Hz}$



$f_e = 5\text{Hz}$



Application : Couplage de deux poutres encastrées-libres



Modèle d'Euler-Bernoulli

- $\xi_i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}_+$ la variable spatiale le long de la poutre i .
- $q_i(\xi, t) \in \mathbb{R}$ la déflexion de la poutre i .
- Le modèle d'Euler-Bernoulli est donné par

$$\rho_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2}(\xi_i, t) + \alpha_i \frac{\partial q_i}{\partial t}(\xi_i, t) + \kappa_i \frac{\partial^4 q_i}{\partial \xi^4}(\xi_i, t) = \gamma_i(\xi_i) f_i(t),$$

avec ρ_i la masse linéique, α_i le coefficient d'amortissement, κ_i la rigidité de flexion et $\gamma_i(\xi_i) f_i(t)$ la force distribuée.

Projection sur la base modale tronquée

- Base modale tronquée $\Psi(\xi_i) = (\psi_1(\xi_i), \dots, \psi_m(\xi_i))$.
- Déplacements modaux $\mathbb{R}^m \ni q_i(t) = \int_{\Omega_i} \Psi(\xi_i) q(\xi_i, t) d\xi_i$.
- Forces modales $\mathbb{R}^m \ni F_i(t) = \Gamma_i f_i(t)$, $\Gamma_i = \int_{\Omega_i} \Psi(\xi_i) \gamma_i(\xi_i) d\xi_i$.
- Matrice des nombres d'onde $L = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$, $k_{i,j} = \sqrt[4]{\omega_{i,j} \frac{\rho_i}{\kappa_i}}$ avec $\omega_{i,j}$ les pulsations propres.

Modèle d'Euler-Bernoulli - SHP

- État $x_i = (q_i, \rho_i \frac{dq_i}{dt})^T \in \mathbb{R}^{2m}$, énergie $H_i(x_i) = \frac{1}{2}x_i^T Q_i x_i$, $Q_i = \text{diag}(\kappa_i L, \rho_i^{-1} \text{Id})$.
- Variable de dissipation $w_i = \frac{dq_i}{dt}$, fonction de dissipation $z_i(w_i) = \alpha_i w_i$.
- Entrée $u_i = f_i$ (force), sortie $y_i = -\Gamma_i^T \frac{dq_i}{dt}$ (vitesse reconstruite).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_i}{dt} \\ w_i \\ y_i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & +\text{Id} & 0 & 0 \\ -\text{Id} & 0 & -\text{Id} & +\Gamma_i \\ \hline 0 & +\text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_i^T & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \nabla H_i(x_i) \\ z_i(w_i) \\ u_i \end{pmatrix}$$

Poutre 1 : ajout d'un deuxième port de connexion pour contrôle

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ w_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Id} & 0 & -\text{Id} & +\Gamma_1 & +\bar{\Gamma}_1 \\ 0 & +\text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\Gamma}_1^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\Gamma}_1^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_1(x_1) \\ z_1(w_1) \\ u_1 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix}$$

Poutre 2 : c.f. slide précédent

Raideur : 2 ports de connexion (piloté en vitesse)

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_K}{dt} \\ y_1^K \\ y_2^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_K(x_K) \\ u_1^K \\ u_2^K \end{pmatrix}$$

Connexion de B_i avec K

$$\begin{pmatrix} u_i^K \\ u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i^K \\ y_i \end{pmatrix}$$

Entrée de K = Sortie de B_i (égalité de vitesses) \Rightarrow Entrée de B_i = - Sortie de K
Ainsi la puissance reçue par K sur le port i est la puissance perdue par B_i :

$$\begin{pmatrix} y_i^K \\ y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^K \\ u_i \end{pmatrix} = y_i^K u_i^K + y_i u_i = 0.$$

Système couplé

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_K}{dt} \\ w_1 \\ w_2 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{\{B_1, B_2, K\}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_1(x_1) \\ \nabla H_2(x_2) \\ \nabla H_K(x_K) \\ z_1(w_1) \\ z_2(w_2) \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix}$$

Systèmes Hamiltoniens à Ports en dimension infinie Résultats récents dans la thèse d'Anass Serhani ⁷

7. Anass SERHANI. "Systèmes couplés d'EDPs, vus comme des systèmes Hamiltoniens à ports avec dissipation : Analyse théorique et simulation numérique". Thèse de doct. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-SUPAERO), Université de Toulouse, 2020.

- Systèmes à paramètres distribués régis par des EDP sur un domaine spatial Ω .
- Théorème de Stokes : lien entre la variation d'énergie dans Ω et le flux d'énergie sur le bord $\partial\Omega$.
- Structure de Dirac associée : **structure de Stokes-Dirac**⁸

8. AJ VAN DER SCHAFT et Bernhard M MASCHKE. "Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow". In : Journal of Geometry and physics 42.1-2 (2002), p. 166-194.

Structure de Stokes-Dirac

- Soient \mathcal{X} un espace de Hilbert, $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ et \mathcal{F} son dual topologique par rapport à l'espace pivot \mathcal{X} .
- Soit l'espace des puissances $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ muni du crochet de dualité

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \begin{cases} \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) & \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \end{cases}$$

On définit l'appariement symétrique

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathcal{B} & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1), (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2)) & \mapsto \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1 \rangle_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} + \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \end{cases}$$

Définition : Structure de Stokes-Dirac

Une structure de Dirac sur $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est un sous-espace linéaire $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ pour l'appariement $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$.

SHP en dimension infinie : Structure générique

- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine spatial de bord $\partial\Omega$ régulier par morceaux.
- Une structure générique de SHP en dimension infinie est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(\xi, t) &= (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}(x(\xi, t)), & \xi \in \Omega, t \geq 0, \\ u_{\partial}(\xi, t) &= \mathcal{B} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}(x(\xi, t)), & \xi \in \partial\Omega, \\ y_{\partial}(\xi, t) &= \mathcal{C} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}(x(\xi, t)), & \xi \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- $x \in \mathcal{X}$ est la variable d'énergie, dans l'espace de Hilbert \mathcal{X} muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{X}}$.
- \mathcal{H} est le Hamiltonien du système, associé à l'énergie $E(t) = \mathcal{H}(x(\cdot, t)) = \int_{\Omega} h(x(\xi, t)) d\xi$.
- $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}$ est la variable de co-énergie avec $\frac{\delta}{\delta x}$ la dérivée variationnelle par rapport à x .
- \mathcal{J} est l'opérateur de structure, formellement anti-symétrique⁹.
- $\mathcal{R} = \mathcal{G}\mathcal{K}\mathcal{G}^*$ est l'opérateur de dissipation borné symétrique positif¹⁰ où \mathcal{K} est la loi constitutive et \mathcal{G} un opérateur borné.
- u_{∂} et y_{∂} sont le contrôle et l'observation frontière colocalisés.
- \mathcal{B} et \mathcal{C} sont les opérateur de contrôle et d'observation frontière, non bornés, surjectifs et vérifiant

$$(\mathcal{J}v, \tilde{v})_{\mathcal{X}} + (v, \mathcal{J}\tilde{v})_{\mathcal{X}} = \langle \mathcal{B}v, \mathcal{C}\tilde{v} \rangle_{\partial\Omega} + \langle \mathcal{B}\tilde{v}, \mathcal{C}v \rangle_{\partial\Omega}, \quad \forall v, \tilde{v} \in D(\mathcal{J}).$$

9. Opérateur linéaire fermé de domaine $D(\mathcal{J})$ dense dans \mathcal{X} tel que $(\mathcal{J}v, \tilde{v})_{\mathcal{X}} = -(v, \mathcal{J}\tilde{v})_{\mathcal{X}}$, $\forall v, \tilde{v} \in D(\mathcal{J}) \cap D(\mathcal{J}^*)$.

10. Le cas non borné est étudié dans la thèse d'A. Serhani

- La méthode des éléments finis partitionnés¹¹ (PFEM) permet de retrouver une structure de Dirac en dimension finie.
- La convergence est analysée en détail dans la thèse d'A. Serhani.

11. cardoso2019partitioned.

Merci de votre attention.