Près d'une feuille singulière : un résultat abstrait et une application numérique

Camille Laurent-Gengoux

Travail joint avec Leonid Ryvkin

Jussieu, Novembre 2020

Table of content

Quelques définitions précises

Définition

Un *feuilletage singulier* sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace $\mathcal{F}$ des champs de vecteurs $\mathfrak{X}(U)$:

1. stable par multiplication par une fonction
2. finiment engendré,
3. stable par crochet de Lie.

Idem sur une variété.

En clair.

Points atteignables.

Exemples sur $\mathbb{R}^3$

On peut considérer l'action de $so(3)$:

$$\vec{Z} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \vec{X} = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,,\ \vec{Y} = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

Ceci définit évidemment un feuilletage singulier.

Proposition

Toute action d'un groupe de Lie définit un feuilletage singulier.

Moralité de l'exemple

Voir cette action comme un feuilletage singulier, c'est "oublier" l'action du groupe et ne considérer que les champs de vecteurs engendrés sur les fonctions lisses par ses générateurs :

$$\left\{ (yf - xg)\frac{\partial}{\partial z} + (xh - zf)\frac{\partial}{\partial y} + (zg - yh)\frac{\partial}{\partial x} \,\middle|\, f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \right\}$$

Autre type d'exemple

Prenons une fonction ϕ sur $\mathbb{R}^n$. Et considérons :

1. les champs de vecteurs qui "tuent" ϕ :

$$\{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X[\phi]\} = 0.$$

2. les champs de vecteurs tangents à $\phi = 0$:

$$\{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. il existe } f_X \text{ et } X[\phi] = f_X\phi = 0\}.$$

Exemples intéressants car en général il n'y a aucune action de groupe derrière.

Notion de feuilles

Idée intuitive.

Notion de feuilles

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier.

Définition

On appelle *distribution tangente en* $m \in \mathcal{U}$ le sous-espace vectoriel de $T_m M$ donné par :

$$T_m\mathcal{F} := \{\ X_{|_m} | X \in \mathcal{F}\}$$

Définition

On appelle *feuille passant par* $m \in M$ l'ensemble des points que l'on peut atteindre en partant de m et en suivant les flots des champs de vecteurs contenus dans $\mathcal{F}$.

Théorème de Hermann

Théorème

Les feuilles

1. sont des variétés,
2. partitionnent M,
3. la feuille passant par m a pour espace tangent $T_m\mathcal{F}$.

Les points singuliers

La plupart des feuilles sont régulières. Définition.

Feuilletage transversal.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage. Etant donné :

1. une feuille
2. un petit disque transversal T

Considérons :

1. la restriction à T
2. des champs de $\mathcal{F}$ tangents à T

C'est une feuilletage singulier sur T (pour T assez petit) appelé *feuilletage transverse à la feuille T*.

Exemples

Par exemple :

1. Feuille régulière
2. Structures de Poisson

Proposition

(Le germe de ce) feuilletage transverse :

1. ne dépend pas du choix du disque transverse,
2. est "constant" le long de la feuille.

Quelques explications

Quelques points fondamentaux :

1. Un champ de vecteur d'un feuilletage singulier est une symétrie infinitésimale de celui-ci.
2. ...et est en fait la somme directe du feuilletage transverse et du feuilletage des champs tangents à la feuille (Cerveau, Dazord, Androulidakis-Skandalis).

Théorème sur le comportement local

Question

Est-il toujours vrai que, semi-localement (= près d'une feuille), un feuilletage est isomorphe à la somme directe :

1. des champs de vecteurs le long de la feuille
2. et de son feuilletage transverse ?

Question

Est-ce vrai si la feuille est simplement connexe ?

Théorème sur le comportement local

Question

Et si la feuille est simplement connexe + le feuilletage transverse transversalement quadratique ?

Théorème (CKG, Ryvkin)

Énoncé précis :

Théorème

Dans un voisinage formel d'une feuille simplement connexe, un feuilletage singulier (localement réel analytique) est la somme directe

1. feuilletage des champs tangents à la feuille
2. et du jet de son champ transverse.

Plus général

Théorème

Dans un voisinage formel d'une feuille simplement connexe,

1. pourvu qu'une certaine algébroïde de Lie ait une partie semi-simple en somme directe
2. (respectivement, que le fibré normal soit plat)

alors le feuilletage singulier (localement réel analytique) est la somme semi-directe (respectivement directe)

1. du feuilletage des champs tangents à la feuille
2. et de la partie du jet de son feuilletage transverse sont la partie linéaire en 0 est résoluble.

(Levi-Malcev)

Démonstration

La démonstration utilise un lemme bien connu en géométrie différentielle.

Lemme

Sur une variété semi-simple, une 1-forme différentielle fermée (à valeurs dans un fibré plat) est exacte.

...et se fait ensuite par récurrence sur les développements de Taylor des champs de vecteurs du fibré transverse.

1. On construit des coordonnées sur le voisinage, qui "trivialisent" jusqu'en degré n,
2. on les modifie en degré $n+1$ pour "trivialiser" jusqu'à l'ordre n,
3. et on continue.

Numérique

Soit X un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$. On dit que X est *de type Euler* si

(i) son linéarisé est l'identité,

(ii) en clair $X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + o(x^2)$.

Théorème

Pour tout champ de Euler, il existe des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_n)$ au voisinage de 0 dans lesquelles :

$$X = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

(uniques à transformation liénaire près).

Question

Comment les trouve t-on ?

Méthode 1 : formel

Méthode 2 : directement les coordonnées d'un point

Comment faire pour le théorème de trivialisation ?

On suppose que la feuille est S^2. Première méthode : on construit les cooordonnées par récurrence.

Comment faire pour le théorème de trivialisation ?

On suppose que la feuille est S^2. Première méthode : le faire "en une fois", mais en trois étape.

suite

Merci de votre attention. Questions