Réduction hamiltonienne et théorie géométrique des invariants

Espaces quotients en géométrie différentielle (sur $\mathbb{R}$)

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M, \ (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \ \text{ est propre.}$$

Espaces quotients en géométrie différentielle (sur $\mathbb{R}$)

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M,\ (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \text{ est propre.}$$

Pour une telle action, toutes les G-orbites sont fermées dans M.

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M,\ (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \ \text{ est propre.}$$

Pour une telle action, toutes les G-orbites sont fermées dans M.

Exemple (d'une action non propre)

Espaces quotients en géométrie différentielle (sur $\mathbb{R}$)

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M,\ (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \text{ est propre.}$$

Pour une telle action, toutes les G-orbites sont fermées dans M.

Exemple (d'une action non propre)

L'action de $G = (\mathbb{R}, +)$ sur le tore $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ via $t \cdot (x, y) = (x + t, y + \alpha t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas propre.

Espaces quotients en géométrie différentielle (sur $\mathbb{R}$)

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M,\ (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \ \text{ est propre.}$$

Pour une telle action, toutes les G-orbites sont fermées dans M.

Exemple (d'une action non propre)

L'action de $G = (\mathbb{R}, +)$ sur le tore $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ via $t \cdot (x, y) = (x + t, y + \alpha t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas propre.

Théorème (conséquence du *slice Theorem*)

Espaces quotients en géométrie différentielle (sur $\mathbb{R}$)

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M,\ (g,m) \mapsto (g \cdot m, m) \text{ est propre.}$$

Pour une telle action, toutes les G-orbites sont fermées dans M.

Exemple (d'une action non propre)

L'action de $G = (\mathbb{R},+)$ sur le tore $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ via $t \cdot (x,y) = (x+t, y+\alpha t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas propre.

Théorème (conséquence du *slice Theorem*)

Soit M une variété lisse munie d'une action **propre** *et* **libre** *d'un groupe de Lie réel G.*

Espaces quotients en géométrie différentielle (sur $\mathbb{R}$)

Soit G un groupe de Lie réel qui agit sur une variété lisse M.
L'action est dite *propre* si l'application

$$G \times M \to M \times M,\ (g, m) \mapsto (g \cdot m, m) \ \text{ est propre.}$$

Pour une telle action, toutes les G-orbites sont fermées dans M.

Exemple (d'une action non propre)

L'action de $G = (\mathbb{R}, +)$ sur le tore $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ via $t \cdot (x, y) = (x + t, y + \alpha t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ n'est pas propre.

Théorème (conséquence du *slice Theorem*)

Soit M une variété lisse munie d'une action **propre** *et* **libre** *d'un groupe de Lie réel G. Alors l'espace quotient M/G est une variété lisse, et la projection $M \to M/G$ est un fibré G-principal.*

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X et $\mathrm{Spec}(A) = \{$les idéaux maximaux de l'algèbre $A\}$.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X et $\mathrm{Spec}(A) = \{$les idéaux maximaux de l'algèbre $A\}$.

C'est une variété algébrique affine, dont les points s'identifient aux orbites fermées dans X,

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X et $\mathrm{Spec}(A) = \{\text{les idéaux maximaux de l'algèbre } A\}$.

C'est une variété algébrique affine, dont les points s'identifient aux orbites fermées dans X, et on a une application continue et surjective

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X et $\mathrm{Spec}(A) = \{$les idéaux maximaux de l'algèbre $A\}$.

C'est une variété algébrique affine, dont les points s'identifient aux orbites fermées dans X, et on a une application continue et surjective

$$X/G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X /\!/ G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X et $\mathrm{Spec}(A) = \{\text{les idéaux maximaux de l'algèbre } A\}$.

C'est une variété algébrique affine, dont les points s'identifient aux orbites fermées dans X, et on a une application continue et surjective

$$X/G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

Remarque

Si toutes les orbites de X sont fermées, alors $X/G = X/\!/G$.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Soit maintenant G un groupe algébrique **réductif** complexe (ex : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$...) qui agit sur une variété algébrique affine X.

On définit alors le *quotient catégorique*

$$X/\!/G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G),$$

où $\mathbb{C}[X]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales G-invariantes sur X et $\mathrm{Spec}(A) = \{$les idéaux maximaux de l'algèbre $A\}$.

C'est une variété algébrique affine, dont les points s'identifient aux orbites fermées dans X, et on a une application continue et surjective

$$X/G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

Remarque

Si toutes les orbites de X sont fermées, alors $X/G = X/\!/G$.
C'est le cas en particulier si l'action de G sur X est libre.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x,y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.
2. *Si* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *par multiplication à gauche, alors* $X/G = X/\!/G = \mathbb{C}^*$ *et* $X \to X/G$ *est le déterminant.*

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.
2. *Si* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *par multiplication à gauche, alors* $X/G = X/\!/G = \mathbb{C}^*$ *et* $X \to X/G$ *est le déterminant.*

Théorème (conséquence du *Luna slice Theorem*)

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.
2. *Si* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *par multiplication à gauche, alors* $X/G = X/\!/G = \mathbb{C}^*$ *et* $X \to X/G$ *est le déterminant.*

Théorème (conséquence du *Luna slice Theorem*)

Soit X *une variété algébrique affine lisse munie d'une action libre d'un groupe algébrique réductif* G.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.
2. *Si* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *par multiplication à gauche, alors* $X/G = X/\!/G = \mathbb{C}^*$ *et* $X \to X/G$ *est le déterminant.*

Théorème (conséquence du *Luna slice Theorem*)

Soit X *une variété algébrique affine lisse munie d'une action libre d'un groupe algébrique réductif* G. *Alors l'espace quotient* X/G *est une variété algébrique affine lisse, et la projection* $X \to X/G$ *est un fibré* G*-principal*

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.
2. *Si* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *par multiplication à gauche, alors* $X/G = X/\!/G = \mathbb{C}^*$ *et* $X \to X/G$ *est le déterminant.*

Théorème (conséquence du *Luna slice Theorem*)

Soit X *une variété algébrique affine lisse munie d'une action libre d'un groupe algébrique réductif* G. *Alors l'espace quotient* X/G *est une variété algébrique affine lisse, et la projection* $X \to X/G$ *est un fibré* G*-principal (pour la topologie analytique ou la topologie étale).*

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemples

1. *Si* $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X//G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X*.*
2. *Si* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $X = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *par multiplication à gauche, alors* $X/G = X//G = \mathbb{C}^*$ *et* $X \to X/G$ *est le déterminant.*

Théorème (conséquence du *Luna slice Theorem*)

Soit X *une variété algébrique affine lisse munie d'une action libre d'un groupe algébrique réductif* G*. Alors l'espace quotient* X/G *est une variété algébrique affine lisse, et la projection* $X \to X/G$ *est un fibré* G*-principal (pour la topologie analytique ou la topologie étale).*

Problème avec le quotient $X//G$: il ne "voit" que les orbites fermées.

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{\, f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g \cdot x) = \chi(g)f(x)\}.$$

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{\ f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g \cdot x) = \chi(g) f(x)\}.$$

Alors on peut recouvrir l'ouvert G-stable (possiblement vide)

$$X_\chi^{ss} = \{x \in X \mid \exists n \geq 1,\ \exists f \in \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n} \text{ t.q. } f(x) \neq 0\} \subset X$$

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{\ f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g \cdot x) = \chi(g) f(x) \}.$$

Alors on peut recouvrir l'ouvert G-stable (possiblement vide)

$$X_\chi^{ss} = \{x \in X \mid \exists n \geq 1,\ \exists f \in \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n} \text{ t.q. } f(x) \neq 0\} \subset X$$

par des ouverts affines G-stables $X_1, \ldots, X_N$.

Les quotients $X_i /\!/ G$ se recollent pour former une variété algébrique quasi-projective (pas nécessairement affine)

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi \colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{\, f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g \cdot x) = \chi(g) f(x) \}.$$

Alors on peut recouvrir l'ouvert G-stable (possiblement vide)

$$X_\chi^{ss} = \{ x \in X \mid \exists n \geq 1,\ \exists f \in \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n} \text{ t.q. } f(x) \neq 0 \} \subset X$$

par des ouverts affines G-stables $X_1, \ldots, X_N$.

Les quotients $X_i /\!/ G$ se recollent pour former une variété algébrique quasi-projective (pas nécessairement affine) que l'on note $X /\!/_\chi G$.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{\, f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g \cdot x) = \chi(g) f(x)\}.$$

Alors on peut recouvrir l'ouvert G-stable (possiblement vide)

$$X_\chi^{ss} = \{x \in X \mid \exists n \geq 1,\ \exists f \in \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n} \text{ t.q. } f(x) \neq 0\} \subset X$$

par des ouverts affines G-stables $X_1, \ldots, X_N$.

Les quotients $X_i /\!/ G$ se recollent pour former une variété algébrique quasi-projective (pas nécessairement affine) que l'on note $X /\!/_\chi G$.

Les points du quotient $X /\!/_\chi G$ s'identifient aux orbites fermées dans X_χ^{ss}.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Definition (quotient GIT pour une variété algébrique affine)

On fixe un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ et on note

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{\, f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g\cdot x) = \chi(g)f(x)\}.$$

Alors on peut recouvrir l'ouvert G-stable (possiblement vide)

$$X_\chi^{ss} = \{x \in X \mid \exists n \geq 1,\ \exists f \in \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n} \text{ t.q. } f(x) \neq 0\} \subset X$$

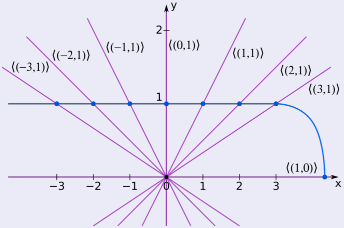
par des ouverts affines G-stables $X_1, \ldots, X_N$.
Les quotients $X_i/\!/G$ se recollent pour former une variété algébrique quasi-projective (pas nécessairement affine) que l'on note $X/\!/_\chi G$.

Les points du quotient $X/\!/_\chi G$ s'identifient aux orbites fermées dans X_χ^{ss}.
En particulier, si $\chi \equiv 1$, alors $X_\chi^{ss} = X$ et $X/\!/_\chi G = X/\!/G$.

Exemple

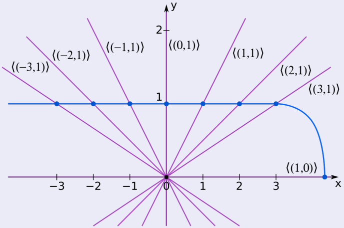
Exemple

On a vu que si $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.



Exemple

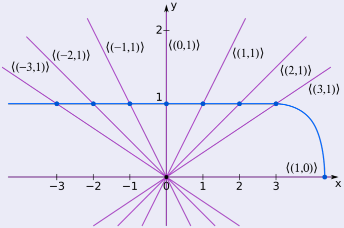
On a vu que si $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$*, alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X*.*



Maintenant si on fixe $\chi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ t \mapsto t^m$ *avec* $m > 0$*,*

Exemple

On a vu que si $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.

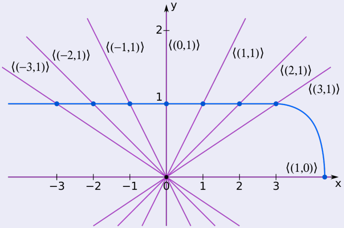


Maintenant si on fixe $\chi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ t \mapsto t^m$ *avec* $m > 0$, *alors* $X^{ss}_{\chi} = \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ *et* $X/\!/_{\chi} G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Espaces quotients en géométrie algébrique (sur $\mathbb{C}$)

Exemple

On a vu que si $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ *agit sur* $X = \mathbb{C}^2$ *via* $t \cdot (x,y) = (tx, ty)$, *alors* $X/G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \sqcup \{0\}$ *mais* $X/\!/G = \{pt\}$ *puisque* $\{0\}$ *est l'unique orbite fermée dans* X.



Maintenant si on fixe $\chi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ t \mapsto t^m$ *avec* $m > 0$, *alors* $X_\chi^{ss} = \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ *et* $X/\!/_\chi G = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Par contre, si on prend $m < 0$, *alors* $X_\chi^{ss} = \varnothing$ *et* $X/\!/_\chi G = \varnothing$.

Résolution des singularités et quotients GIT

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

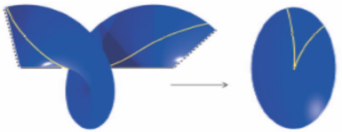
Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et si le morphisme π est projectif et birationnel.

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

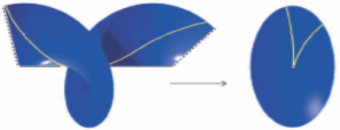
Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et si le morphisme π est projectif et birationnel.



Résolution des singularités et quotients GIT

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et si le morphisme π est projectif et birationnel.



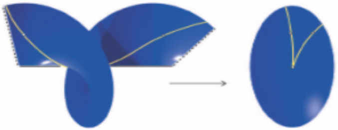
Pour tout caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$, il existe un morphisme projectif

$$\pi_\chi\colon X/\!/_\chi G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

Résolution des singularités et quotients GIT

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et si le morphisme π est projectif et birationnel.



Pour tout caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$, il existe un morphisme projectif

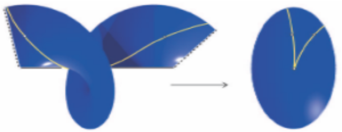
$$\pi_\chi\colon X/\!/_\chi G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

Théorème (Mumford ?)

Résolution des singularités et quotients GIT

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et si le morphisme π est projectif et birationnel.



Pour tout caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$, il existe un morphisme projectif

$$\pi_\chi\colon X/\!/_\chi G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

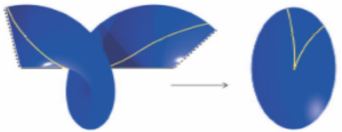
Théorème (Mumford ?)

On suppose qu'il existe $x \in X$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial.

Résolution des singularités et quotients GIT

Definition (désingularisation d'une variété algébrique)

Un morphisme $\pi\colon Y \to Z$ est appelé *désingularisation* de Z si la variété algébrique Y est lisse et si le morphisme π est projectif et birationnel.



Pour tout caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$, il existe un morphisme projectif

$$\pi_\chi\colon X/\!/_\chi G \to X/\!/G,\ \mathcal{O} \mapsto \text{l'unique orbite fermée contenue dans } \overline{\mathcal{O}}.$$

Théorème (Mumford ?)

On suppose qu'il existe $x \in X$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial. Si la variété algébrique $X/\!/_\chi G$ est lisse, alors π_χ est une désingularisation de $X/\!/G$.

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$,

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Exemples

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Exemples

1. *Si G est un groupe de Lie (réel ou complexe) avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors chaque G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété symplectique.*

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Exemples

1. *Si G est un groupe de Lie (réel ou complexe) avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors chaque G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété symplectique.*
2. *Si X est une variété lisse, alors son fibré cotangent $T^\vee X$ est une variété symplectique.*

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Exemples

1. *Si G est un groupe de Lie (réel ou complexe) avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors chaque G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété symplectique.*
2. *Si X est une variété lisse, alors son fibré cotangent $T^\vee X$ est une variété symplectique.*

Motivations :

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Exemples

1. *Si G est un groupe de Lie (réel ou complexe) avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors chaque G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété symplectique.*
2. *Si X est une variété lisse, alors son fibré cotangent $T^\vee X$ est une variété symplectique.*

Motivations :

- Cas réel : les V.S. sont omniprésentes en mécanique classique.

Variétés symplectiques (réelles et complexes)

Definition (variété symplectique)

Une *variété symplectique* (*holomorphe*) est une variété (complexe) lisse X munie d'une 2-forme différentielle (holomorphe) fermée et non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X)$, appelée *forme symplectique* (*holomorphe*).

Exemples

1. *Si G est un groupe de Lie (réel ou complexe) avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors chaque G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété symplectique.*
2. *Si X est une variété lisse, alors son fibré cotangent $T^\vee X$ est une variété symplectique.*

Motivations :

- Cas réel : les V.S. sont omniprésentes en mécanique classique.
- Cas complexe : les V.S.H. sont plus rares !

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu : X \to \mathfrak{g}^*.$$

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu \colon X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu: X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Exemple

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu \colon X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Exemple

Soit $X = V \oplus V^*$ avec V une représentation de G.

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu : X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Exemple

Soit $X = V \oplus V^*$ avec V une représentation de G. La forme symplectique $\omega((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) = \phi_1(v_2) - \phi_2(v_1)$ est G-invariante.

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Exemple

Soit $X = V \oplus V^*$ avec V une représentation de G. La forme symplectique $\omega((v_1,\phi_1),(v_2,\phi_2)) = \phi_1(v_2) - \phi_2(v_1)$ est G-invariante. Une application moment est donnée par $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*,\ (v,\phi) \mapsto (\xi \in \mathfrak{g} \mapsto \phi(\xi \cdot v) \in K)$.

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu : X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Exemple

Soit $X = V \oplus V^*$ avec V une représentation de G. La forme symplectique $\omega((v_1, \phi_1), (v_2, \phi_2)) = \phi_1(v_2) - \phi_2(v_1)$ est G-invariante. Une application moment est donnée par $\mu : X \to \mathfrak{g}^*,\ (v, \phi) \mapsto (\xi \in \mathfrak{g} \mapsto \phi(\xi \cdot v) \in K)$.

En général le quotient X/G n'est pas une variété symplectique, même lorsque c'est une variété lisse,

Réductions hamiltoniennes (cadres réel et complexe)

Soit X une variété symplectique munie d'une G-action qui préserve la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X)$.
Sous certaines hypothèses (action *hamiltonienne*), il existe une application G-équivariante appelée *application moment*

$$\mu \colon X \to \mathfrak{g}^*.$$

En particulier, $\mu^{-1}(0)$ est un fermé G-stable de X.

Exemple

Soit $X = V \oplus V^*$ avec V une représentation de G. La forme symplectique $\omega((v_1,\phi_1),(v_2,\phi_2)) = \phi_1(v_2) - \phi_2(v_1)$ est G-invariante. Une application moment est donnée par $\mu \colon X \to \mathfrak{g}^*,\ (v,\phi) \mapsto (\xi \in \mathfrak{g} \mapsto \phi(\xi \cdot v) \in K)$.

En général le quotient X/G n'est pas une variété symplectique, même lorsque c'est une variété lisse, **mais...**

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G,

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre.

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. Alors $\mu^{-1}(0)/G$ est naturellement munie d'une structure symplectique.

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. Alors $\mu^{-1}(0)/G$ est naturellement munie d'une structure symplectique.

Corollaire (Cas des fibrés cotangents)

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. Alors $\mu^{-1}(0)/G$ est naturellement munie d'une structure symplectique.

Corollaire (Cas des fibrés cotangents)

Soit X une variété lisse munie d'une action libre et propre d'une groupe de Lie réel G,

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu \colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. Alors $\mu^{-1}(0)/G$ est naturellement munie d'une structure symplectique.

Corollaire (Cas des fibrés cotangents)

Soit X une variété lisse munie d'une action libre et propre d'une groupe de Lie réel G, et soit $\mu \colon T^\vee X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment.

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu \colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. Alors $\mu^{-1}(0)/G$ est naturellement munie d'une structure symplectique.

Corollaire (Cas des fibrés cotangents)

Soit X une variété lisse munie d'une action libre et propre d'une groupe de Lie réel G, et soit $\mu \colon T^\vee X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment. Alors on a un isomorphisme de variétés symplectiques $T^\vee(X/G) \simeq \mu^{-1}(0)/G$.

Réductions hamiltoniennes (cadre réel)

Théorème (quotient de Marsden-Weinstein, cadre réel)

Soit X une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne propre d'un groupe de Lie réel G, et soit $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(0)$ est libre. Alors $\mu^{-1}(0)/G$ est naturellement munie d'une structure symplectique.

Corollaire (Cas des fibrés cotangents)

Soit X une variété lisse munie d'une action libre et propre d'une groupe de Lie réel G, et soit $\mu\colon T^\vee X \to \mathfrak{g}^*$ une application moment. Alors on a un isomorphisme de variétés symplectiques $T^\vee(X/G) \simeq \mu^{-1}(0)/G$.

Et on a un énoncé analogue lorsque X est une variété algébrique affine lisse munie d'une action libre d'un groupe algébrique réductif G.

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)//G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$;

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)/\!/G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)//G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Theorem

S'il existe $x \in \mu^{-1}(0)$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial, et un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^{-1}(0)//_\chi G$ est lisse,

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)/\!/G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Theorem

S'il existe $x \in \mu^{-1}(0)$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial, et un caractère $\chi \colon G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G$ est lisse, alors

$$\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

est une désingularisation symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)/\!/G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Theorem

S'il existe $x \in \mu^{-1}(0)$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial, et un caractère $\chi \colon G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G$ est lisse, alors

$$\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

est une désingularisation symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Exemple

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)/\!/G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Theorem

S'il existe $x \in \mu^{-1}(0)$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial, et un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G$ est lisse, alors

$$\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

est une désingularisation symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Exemple

Soit $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ qui agit sur $\mathbb{C}^2$ via $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$.

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)/\!/G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Theorem

S'il existe $x \in \mu^{-1}(0)$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial, et un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G$ est lisse, alors

$$\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

est une désingularisation symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Exemple

Soit $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ qui agit sur $\mathbb{C}^2$ via $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$. Alors $\mu\colon T^\vee\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2*} \to \mathbb{C},\ (v, \phi) \mapsto \phi(v)$ et $\mu^{-1}(0)/\!/G \simeq V(a^2 + bc) \subset \mathbb{C}^3$

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Si l'action du groupe algébrique réductif G sur X n'est pas libre, alors on peut toujours considérer le quotient catégorique $\mu^{-1}(0)/\!/G$ avec $\mu^{-1}(0) \subset T^\vee X$; c'est une variété affine singulière.

Theorem

S'il existe $x \in \mu^{-1}(0)$ dont l'orbite est fermée et le stabilisateur est trivial, et un caractère $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G$ est lisse, alors

$$\mu^{-1}(0)/\!/_\chi G \to \mu^{-1}(0)/\!/G$$

est une désingularisation symplectique de $\mu^{-1}(0)/\!/G$.

Exemple

Soit $G = (\mathbb{C}^*, \times)$ qui agit sur $\mathbb{C}^2$ via $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$. Alors $\mu\colon T^\vee\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2*} \to \mathbb{C},\ (v, \phi) \mapsto \phi(v)$ et $\mu^{-1}(0)/\!/G \simeq V(a^2 + bc) \subset \mathbb{C}^3$ admet la désingularisation symplectique $T^\vee\mathbb{P}^1 \simeq \mu^{-1}(0)/\!/_\chi G$ avec $\chi(t) = t$.

Questions

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Questions

- *Dans quels cas est-ce que la réduction hamiltonienne* $\mu^{-1}(0)//G$ *admet une désingularisation symplectique ?*

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Questions

- *Dans quels cas est-ce que la réduction hamiltonienne* $\mu^{-1}(0)/\!/G$ *admet une désingularisation symplectique ?*
- *Peut-on caractériser les désingularisations symplectiques de la forme* $\mu^{-1}(0)/\!/_{\chi}G$ *avec* $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ *un caractère de* G *?*

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Questions

- *Dans quels cas est-ce que la réduction hamiltonienne* $\mu^{-1}(0)/\!/G$ *admet une désingularisation symplectique ?*
- *Peut-on caractériser les désingularisations symplectiques de la forme* $\mu^{-1}(0)/\!/_{\chi}G$ *avec* $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ *un caractère de* G *?*
- *Quelles sont les propriétés communes de ces désingularisations symplectiques lorsque le caractère* χ *varie ?*

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Questions

- *Dans quels cas est-ce que la réduction hamiltonienne* $\mu^{-1}(0)/\!/G$ *admet une désingularisation symplectique ?*
- *Peut-on caractériser les désingularisations symplectiques de la forme* $\mu^{-1}(0)/\!/_{\chi}G$ *avec* $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ *un caractère de* G *?*
- *Quelles sont les propriétés communes de ces désingularisations symplectiques lorsque le caractère* χ *varie ?*
- *Est-ce qu'il existe d'autres méthodes pour produire des variétés symplectiques holomorphes ?*

Réductions hamiltoniennes (cadre complexe)

Questions

- *Dans quels cas est-ce que la réduction hamiltonienne* $\mu^{-1}(0)/\!/G$ *admet une désingularisation symplectique ?*
- *Peut-on caractériser les désingularisations symplectiques de la forme* $\mu^{-1}(0)/\!/_{\chi}G$ *avec* $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ *un caractère de* G *?*
- *Quelles sont les propriétés communes de ces désingularisations symplectiques lorsque le caractère* χ *varie ?*
- *Est-ce qu'il existe d'autres méthodes pour produire des variétés symplectiques holomorphes ?*

Merci pour votre attention !