



Base d'intégrité minimale pour la formulation d'énergies cubiques magnéto-élastiques GDR-GDM

TAURINES Julien

En collaboration avec : Desmorat R., Hubert O., Kolev B., Olive M.

école —————
normale —————
supérieure —————
paris-saclay —————



Plan de la présentation

- 1 Énergie magnéto-élastique cubique
- 2 Formulation d'une loi de comportement magnéto-élastique

Énergie magnéto-élastique cubique

- 1 Énergie magnéto-élastique cubique
- 2 Formulation d'une loi de comportement magnéto-élastique

Contexte physique

Phénomènes principaux

- champ \mathbf{H} \Rightarrow aimantation \mathbf{m} (densité de moments) ;
- aimantation \mathbf{m} \Rightarrow magnétostriction ϵ^μ

Contexte physique

Phénomènes principaux

- champ \mathbf{H} \Rightarrow aimantation \mathbf{m} (densité de moments) ;
- aimantation \mathbf{m} \Rightarrow magnétostriction ϵ^μ

Échelles de modélisation

- échelle macroscopique : comportement isotrope, isotrope transverse
- échelle locale : contrainte et aimantation homogènes au sein d'un domaine magnétique (P-E Weiss 1906)

Contexte physique

Phénomènes principaux

- champ $\mathbf{H} \Rightarrow$ aimantation \mathbf{m} (densité de moments) ;
- aimantation $\mathbf{m} \Rightarrow$ magnétostriction ϵ^μ

Échelles de modélisation

- échelle macroscopique : comportement isotrope, isotrope transverse
- échelle locale : contrainte et aimantation homogènes au sein d'un domaine magnétique (P-E Weiss 1906)

Échelle du domaine : loi de comportement cubique (P.Curie 1894)

Loi de comportement

Densité d'énergie libre de Gibbs

$$\Psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) + \Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) + \Psi^\mu(\mathbf{m})$$

Loi de comportement

Densité d'énergie libre de Gibbs

$$\Psi(m, \sigma) = \Psi^e(\sigma) + \Psi^{\mu\sigma}(m, \sigma) + \Psi^\mu(m)$$

Déformation

$$\epsilon = -\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Psi^e}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Psi^{\mu\sigma}}{\partial \sigma} = \epsilon^e + \epsilon^{\mu\sigma}$$

Loi de comportement

Densité d'énergie libre de Gibbs

$$\Psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) + \Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) + \Psi^\mu(\mathbf{m})$$

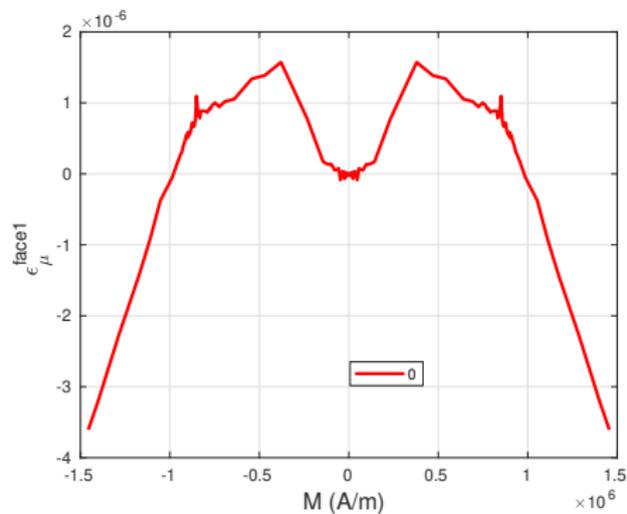
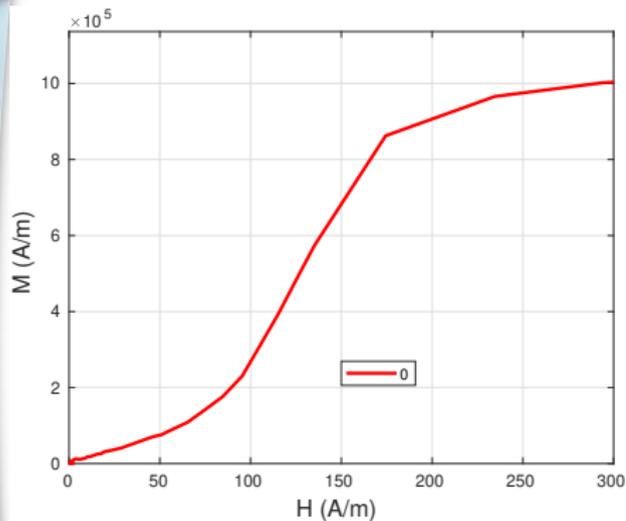
Déformation

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\partial \Psi^e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \Psi^{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^{\mu\sigma}$$

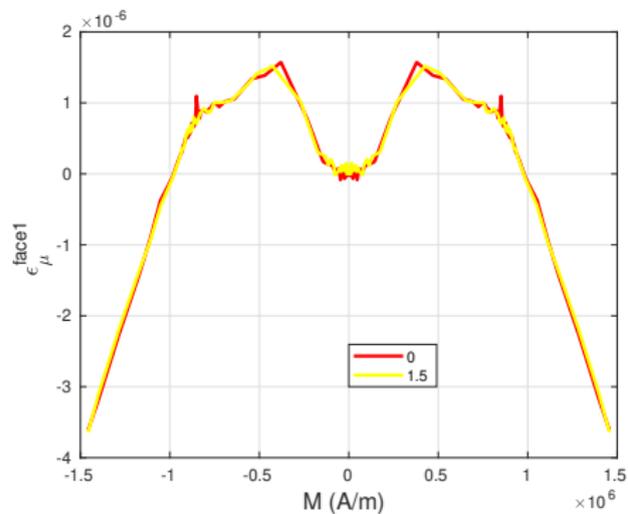
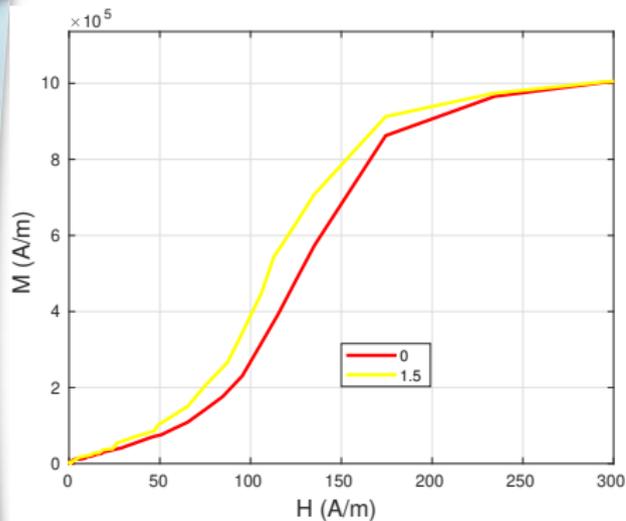
Champ magnétique

$$\mu_0 \mathbf{h} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} = -\frac{\partial \Psi^{\mu\sigma}}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial \mathbf{m}}$$

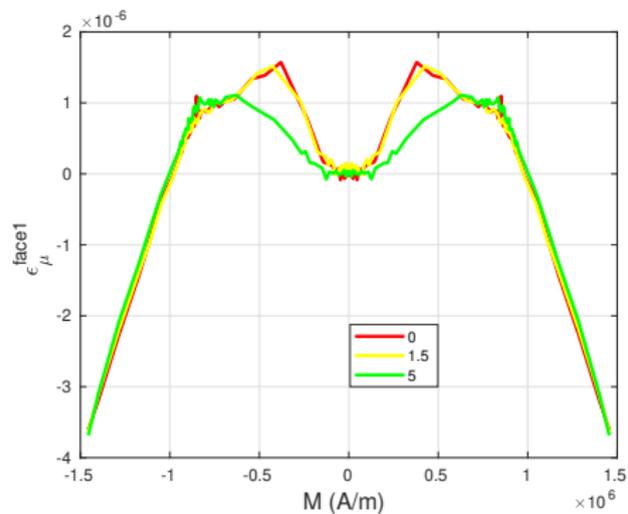
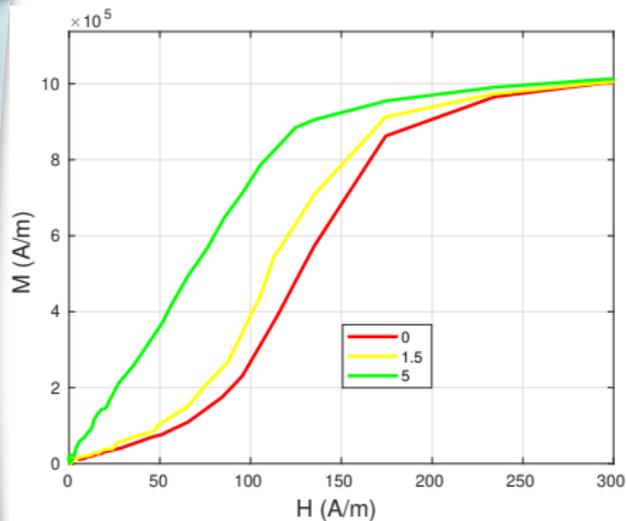
Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



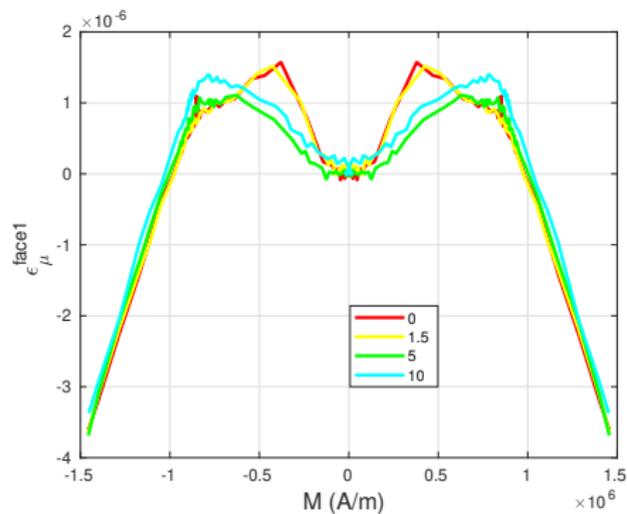
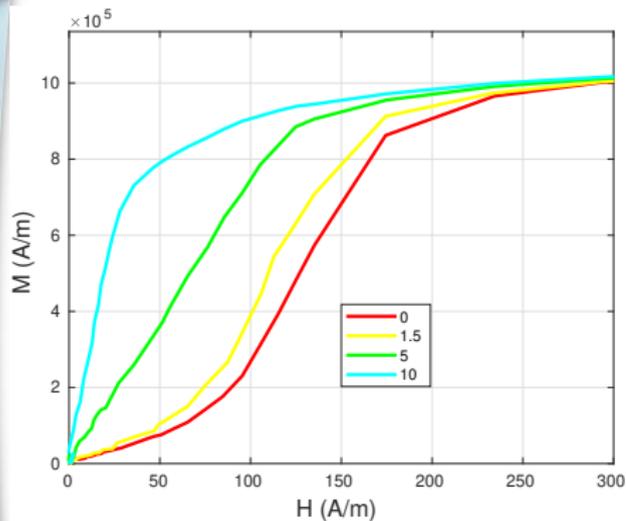
Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



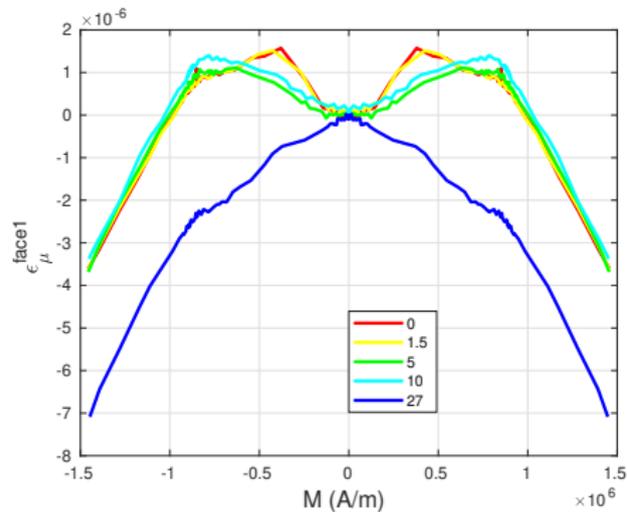
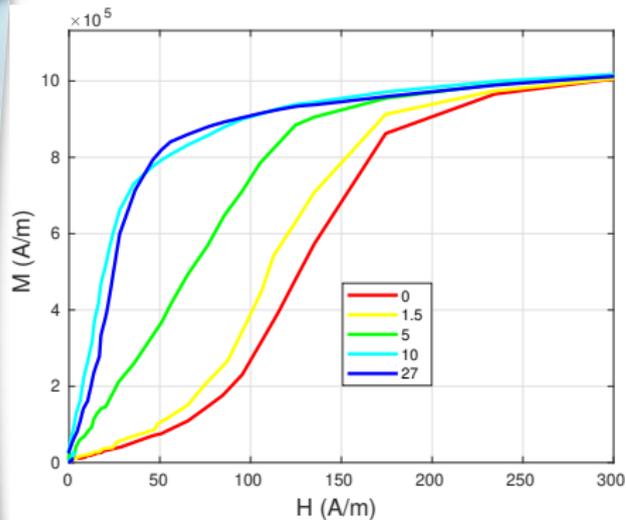
Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



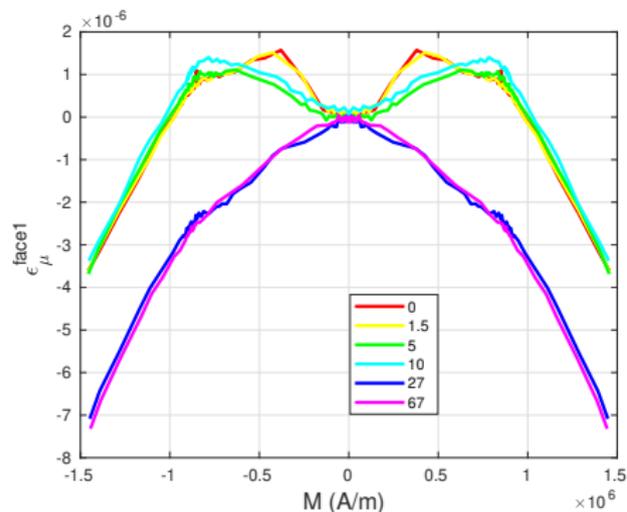
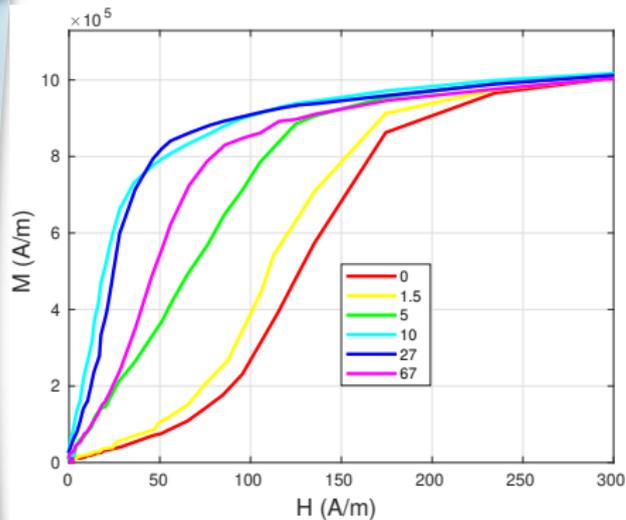
Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



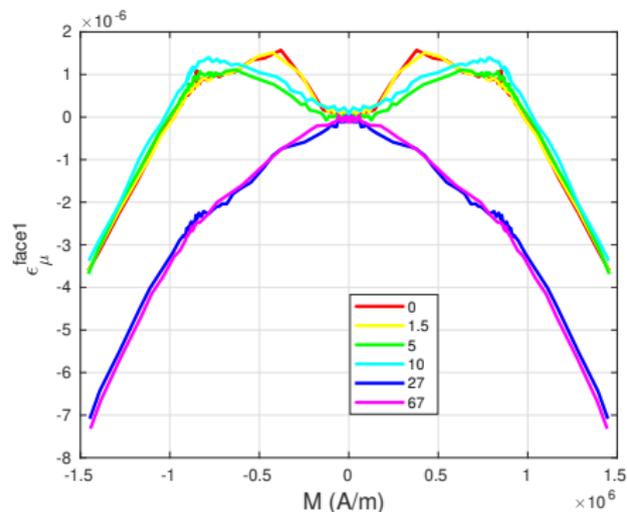
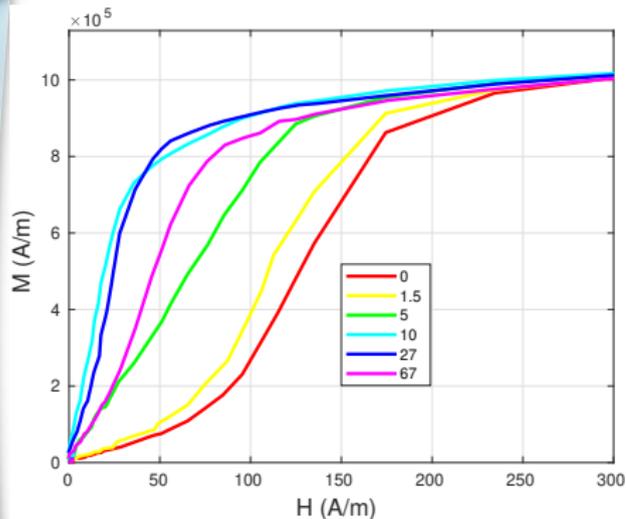
Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



Observations expérimentales sur Fe-3%Si GO



Observations

- comportement magnétique non-monotone
- changement de signe de la déformation

Couplage magnéto-élastique : approche tensorielle

Faire intervenir la contrainte (morphic effect Mason 1951)

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})$$

Couplage magnéto-élastique : approche tensorielle

Faire intervenir la contrainte (morphic effect Mason 1951)

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathbb{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}))$$

□ tenseur ordre 6

Couplage magnéto-élastique : approche tensorielle

Faire intervenir la contrainte (morphic effect Mason 1951)

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathbb{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}))$$

❑ tenseur ordre 6

Problèmes

- ❑ calculs très lourds hors du cadre isotrope
- ❑ compliqué de déterminer le nombre de coefficients "matériau"

Couplage magnéto-élastique : approche tensorielle

Faire intervenir la contrainte (morphic effect Mason 1951)

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathbb{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}))$$

- ❑ tenseur ordre 6

Problèmes

- ❑ calculs très lourds hors du cadre isotrope
- ❑ compliqué de déterminer le nombre de coefficients "matériau"

Autre possibilité

- ❑ utiliser une base d'intégrité minimale de $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$. En isotropie :

$$\|\mathbf{m}^2\|, \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \text{tr } \boldsymbol{\sigma}'^2, \text{tr } \boldsymbol{\sigma}'^3, \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{m}, \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}'^2 \mathbf{m}$$

- ❑ utiliser une écriture polynomiale (Smith et al. 1963)

Algèbre des invariants

- $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) \in V$ avec $V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$
- les fonctions polynomiales $\psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$ définissent l'algèbre $\mathbb{R}[V]$
- $\mathbb{R}[V]^G$ est l'algèbre des polynômes G -invariants, de type fini (Hilbert 1893)

Algèbre des invariants

- $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) \in V$ avec $V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$
- les fonctions polynomiales $\psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$ définissent l'algèbre $\mathbb{R}[V]$
- $\mathbb{R}[V]^G$ est l'algèbre des polynômes G -invariants, de type fini (Hilbert 1893)

Algèbre des polynômes G invariants

- $\mathbb{R}[V]^G = \{P \in \mathbb{R}[V], P(g \star \mathbf{v}) = P(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall g \in G\}$

Algèbre des invariants

- $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) \in V$ avec $V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$
- les fonctions polynomiales $\psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$ définissent l'algèbre $\mathbb{R}[V]$
- $\mathbb{R}[V]^G$ est l'algèbre des polynômes G -invariants, de type fini (Hilbert 1893)

Algèbre des polynômes G invariants

- $\mathbb{R}[V]^G = \{P \in \mathbb{R}[V], P(g \star \mathbf{v}) = P(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall g \in G\}$

Algèbre de type finie : base d'intégrité minimale

- $\exists (l_1, \dots, l_n)$ minimale, $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall \psi \in \mathbb{R}[V]^G, \psi = P(l_1, \dots, l_n)$

Bornes théoriques

Borne de Noether

□ $\deg(I_k) \leq |G|$ (Noether 1916)

Bornes théoriques

Borne de Noether

- $\deg(I_k) \leq |G|$ (Noether 1916)

Application au groupe du cube \mathbb{O}

- 24 rotations (sous-groupe \mathbb{O}^+)
- 24 isométries qui inversent l'orientation
- $|\mathbb{O}^+| = 24$

Bornes théoriques

Borne de Noether

- $\deg(I_k) \leq |G|$ (Noether 1916)

Application au groupe du cube \mathbb{O}

- 24 rotations (sous-groupe \mathbb{O}^+)
- 24 isométries qui inversent l'orientation
- $|\mathbb{O}^+| = 24$

Corolaire d'un résultat de Schmid 1991

- Pour le groupe \mathbb{O}^+ on obtient $\deg(I_k) \leq 12$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_\sigma) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_m^\alpha z_\sigma^\beta, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\sigma}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Intérêt principal

- connaissance du nombre d'invariants linéairement indépendants pour un bi-degré donné
- peut être toujours calculée a priori (Molien 1897)

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en m et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_m, z_\sigma) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_m^\alpha z_\sigma^\beta, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Intérêt principal

- connaissance du nombre d'invariants linéairement indépendants pour un bi-degré donné
- peut être toujours calculée a priori (Molien 1897)

Exemple : développement jusqu'au bi-degré (2,1)

$$H_G(z_m, z_\sigma) = 1 + 1z_m^0z_\sigma^1 + 1z_m^2z_\sigma^0 + 3z_m^2z_\sigma^1 \dots$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\sigma}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Intérêt principal

- connaissance du nombre d'invariants linéairement indépendants pour un bi-degré donné
- peut être toujours calculée a priori (Molien 1897)

Exemple : développement jusqu'au bi-degré (2,1)

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = 1 + 1z_{\mathbf{m}}^0 z_{\sigma}^1 + 1z_{\mathbf{m}}^2 z_{\sigma}^0 + 3z_{\mathbf{m}}^2 z_{\sigma}^1 \dots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\text{tr}(\sigma)$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_\sigma) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_m^\alpha z_\sigma^\beta, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Intérêt principal

- connaissance du nombre d'invariants linéairement indépendants pour un bi-degré donné
- peut être toujours calculée a priori (Molien 1897)

Exemple : développement jusqu'au bi-degré (2,1)

$$H_G(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_\sigma) = 1 + 1z_m^0z_\sigma^1 + 1z_m^2z_\sigma^0 + 3z_m^2z_\sigma^1 \dots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\text{tr}(\sigma)$
- 1 invariant de bi-degré (2,0) : $\|\mathbf{m}\|^2$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\sigma}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Intérêt principal

- connaissance du nombre d'invariants linéairement indépendants pour un bi-degré donné
- peut être toujours calculée a priori (Molien 1897)

Exemple : développement jusqu'au bi-degré (2,1)

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = 1 + 1z_{\mathbf{m}}^0 z_{\sigma}^1 + 1z_{\mathbf{m}}^2 z_{\sigma}^0 + 3z_{\mathbf{m}}^2 z_{\sigma}^1 \dots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\text{tr}(\sigma)$
- 1 invariant de bi-degré (2,0) : $\|\mathbf{m}\|^2$
- 3 invariants de bi-degré (2,1) : $\text{tr}(\sigma)\|\mathbf{m}\|^2 + 2$ autres à déterminer

Construction des invariants

Décomposition en représentations irréductibles pour $G = \mathbb{O}$

$$\sigma = \sigma^d + \sigma^{\bar{d}} + \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{1}$$

$$\sigma^d = \mathbf{P}_{\mathbb{O}}^d : \sigma, \quad \sigma^{\bar{d}} = \mathbf{P}_{\mathbb{O}}^{\bar{d}} : \sigma$$

$$\mathbf{P}_{\mathbb{O}}^{\bar{d}} := \frac{1}{2} \sum_{i < j} \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ij}, \quad \mathbf{e}_{ij} := \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \quad (i \neq j),$$

$$\mathbf{P}_{\mathbb{O}}^d := \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbb{O}}^{\bar{d}},$$

Dans la base canonique du cube :

$$\sigma^d = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix}, \quad \sigma^{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Construction des invariants

Équivariance

- Application *équivariante* $\varphi : V \rightarrow W$ linéaire, avec G qui agit sur V et W :

$$\varphi(g \star \mathbf{v}) = g \star \varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall g \in G$$

- 2 opérations de ce type : la contraction et le produit vectoriel généralisé

Produit vectoriel généralisé

$$\mathbf{s}^1 \times \mathbf{s}^2 = -(\mathbf{s}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{s}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3)$$

avec le tenseur de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \det(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$

Résultats

Bases minimales

- ❑ 60 invariants pour \mathbb{O}^+
- ❑ 30 invariants pour \mathbb{O} . On peut avoir une base pour \mathbb{O} sans produit vectoriel généralisé.

Résultats

Bases minimales

- ❑ 60 invariants pour \mathbb{O}^+
- ❑ 30 invariants pour \mathbb{O} . On peut avoir une base pour \mathbb{O} sans produit vectoriel généralisé.

Quelques invariants purement élastiques

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d, \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{d3}), \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}, (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}}$$

Résultats

Bases minimales

- ❑ 60 invariants pour \mathbb{O}^+
- ❑ 30 invariants pour \mathbb{O} . On peut avoir une base pour \mathbb{O} sans produit vectoriel généralisé.

Quelques invariants purement élastiques

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d, \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{d3}), \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}, (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}}$$

Invariants purement magnétiques

$$\|\mathbf{m}\|^2, (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}}, \text{tr}((\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}3})$$

Résultats

Bases minimales

- ❑ 60 invariants pour \mathbb{O}^+
- ❑ 30 invariants pour \mathbb{O} . On peut avoir une base pour \mathbb{O} sans produit vectoriel généralisé.

Quelques invariants purement élastiques

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d, \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{d3}), \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}, (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}}$$

Invariants purement magnétiques

$$\|\mathbf{m}\|^2, (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}}, \text{tr}((\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}3})$$

Quelques invariants couplés

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}, (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : \boldsymbol{\sigma}^d, (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : ((\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})$$

Formulation d'une loi de comportement magnéto-élastique

- 1 Énergie magnéto-élastique cubique
- 2 Formulation d'une loi de comportement magnéto-élastique

Loi de comportement d'élasticité

Densité d'énergie (degré 2 en contrainte)

$$\Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) = c_{020} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + c_{002} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} + c_{010,010} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2$$

Loi de comportement d'élasticité

Densité d'énergie (degré 2 en contrainte)

$$\Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) = c_{020} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + c_{002} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} + c_{010,010} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2$$

Déformation élastique

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = -\frac{\partial \Psi^e(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -2c_{020} \boldsymbol{\sigma}^d - 2c_{002} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} - 2c_{010,010} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}$$

Loi de comportement d'élasticité

Densité d'énergie (degré 2 en contrainte)

$$\Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) = c_{020} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + c_{002} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} + c_{010,010} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2$$

Déformation élastique

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = -\frac{\partial \Psi^e(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -2c_{020} \boldsymbol{\sigma}^d - 2c_{002} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} - 2c_{010,010} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}$$

Identification des coefficients

$$c_{020} = -\frac{1+\nu}{2E}, \quad c_{002} = -\frac{1}{4}\mu \quad \text{et} \quad c_{010,010} = -\frac{1}{18}\kappa = -\frac{1+\nu}{6E}$$

Loi de magnéto-élasticité

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi_1^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) + \Psi_2^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$$

Ecriture tensorielle

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}))$$

Loi de magnéto-élasticité

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi_1^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) + \Psi_2^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$$

Écriture tensorielle

$$\Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}))$$

Écriture polynomiale

$$\Psi_1^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \left(c_{210}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d + c_{201}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} + c_{200,010} \|\mathbf{m}\|^2 \mathbf{1} \right) : \boldsymbol{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = & c_{220}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : \boldsymbol{\sigma}^{d^2} + c_{211}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} \boldsymbol{\sigma}^d) \\ & + \left[c_{202}^a(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d + c_{202}^b(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} \right] : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}^2} \\ & + \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \left[c_{210,010}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : \boldsymbol{\sigma}^d + c_{201,010}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} \right] \\ & + \|\mathbf{m}\|^2 \left[c_{200,020} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + c_{200,002} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} + c_{200,010,010} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 \right] \end{aligned}$$

Et pour les ordres supérieurs ?

$m \backslash \sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	3	6	11	18	32	48	75	111	160
2	0	2	6	14	31	60	106	180	288	442	659
4	1	3	10	24	53	102	185	312	504	777	1161
6	1	4	13	34	73	144	262	444	717	1112	1660
8	1	5	17	42	95	186	378	576	933	1443	2162
10	1	6	20	52	115	228	375	708	1146	1748	2661

TABLE – Nombre de coefficients "matériau" pour différents ordres

Et pour les ordres supérieurs ?

$m \backslash \sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	3	6	11	18	32	48	75	111	160
2	0	2	6	14	31	60	106	180	288	442	659
4	1	3	10	24	53	102	185	312	504	777	1161
6	1	4	13	34	73	144	262	444	717	1112	1660
8	1	5	17	42	95	186	378	576	933	1443	2162
10	1	6	20	52	115	228	375	708	1146	1748	2661

TABLE – Nombre de coefficients "matériau" pour différents ordres

Lien avec la littérature

3 coefficients : μ , μ^* , κ

Et pour les ordres supérieurs ?

$m \backslash \sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	3	6	11	18	32	48	75	111	160
2	0	2	6	14	31	60	106	180	288	442	659
4	1	3	10	24	53	102	185	312	504	777	1161
6	1	4	13	34	73	144	262	444	717	1112	1660
8	1	5	17	42	95	186	378	576	933	1443	2162
10	1	6	20	52	115	228	375	708	1146	1748	2661

TABLE – Nombre de coefficients "matériau" pour différents ordres

Lien avec la littérature

3 coefficients : μ , μ^* , κ

2 coefficients : λ_{100} et λ_{111}

Et pour les ordres supérieurs ?

$m \backslash \sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	3	6	11	18	32	48	75	111	160
2	0	2	6	14	31	60	106	180	288	442	659
4	1	3	10	24	53	102	185	312	504	777	1161
6	1	4	13	34	73	144	262	444	717	1112	1660
8	1	5	17	42	95	186	378	576	933	1443	2162
10	1	6	20	52	115	228	375	708	1146	1748	2661

TABLE – Nombre de coefficients "matériau" pour différents ordres

Lien avec la littérature

3 coefficients : μ , μ^* , κ

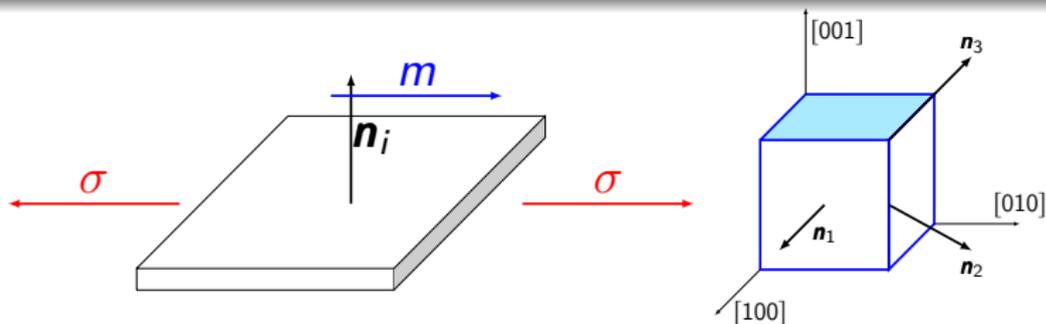
2 coefficients : λ_{100} et λ_{111}

6 coefficients : "the Morpich effect involves 6 measurable material constants" Mason 1951

Simplification pour des sollicitations planes

Base minimale avant simplification

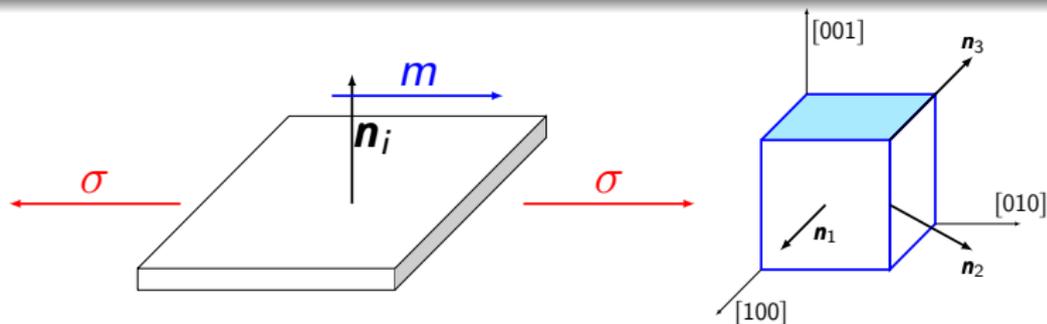
- ❑ 60 invariants pour \mathbb{O}^+
- ❑ 30 invariants pour \mathbb{O}



Simplification pour des sollicitations planes

Base minimale avant simplification

- ❑ 60 invariants pour \mathbb{O}^+
- ❑ 30 invariants pour \mathbb{O}



σ et m plans

- ❑ $n_1 = \langle 100 \rangle$: il ne reste que 6 invariants pour \mathbb{O} et \mathbb{O}^+
- ❑ $n_2 = \langle 110 \rangle$: il ne reste que 15 invariants pour \mathbb{O} et \mathbb{O}^+
- ❑ $n_3 = \langle 111 \rangle$: il ne reste que 8 invariants pour \mathbb{O} et 18 pour \mathbb{O}^+

Conclusion et perspectives

Résultats

- ❑ Détermination de la base minimale d'intégrité de 60 invariants pour \mathbb{O}^+ et 30 pour \mathbb{O} susceptibles d'intervenir dans la formulation d'une densité d'énergie libre de Gibbs (écriture intrinsèque)
- ❑ Détermination du nombre de coefficients "matériau" pour une loi de degré fixé
- ❑ Réduction du nombre d'invariants pour des restrictions à des états de contraintes (et aimantations) planes

Conclusion et perspectives

Résultats

- ❑ Détermination de la base minimale d'intégrité de 60 invariants pour \odot^+ et 30 pour \odot susceptibles d'intervenir dans la formulation d'une densité d'énergie libre de Gibbs (écriture intrinsèque)
- ❑ Détermination du nombre de coefficients "matériau" pour une loi de degré fixé
- ❑ Réduction du nombre d'invariants pour des restrictions à des états de contraintes (et aimantations) planes

Perspectives

- ❑ Prise en compte du champ électrique à l'aide du formalisme de la relativité restreinte pour formuler un tenseur de contraintes électromagnétiques
- ❑ Modélisation d'une coque/plaque magnéto-élastique



Merci de votre attention.