

# Modélisation éléments-finis quadridimensionnelle GDR GDM

Emmanuelle Rouhaud, Benoît Panicaud  
Alexandre Charles, Richard Kerner  
Mingchuan Wang, Israa Choucair, Roula El Nahas

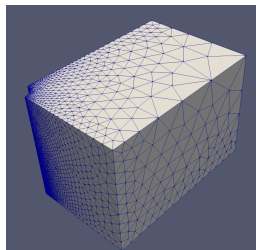
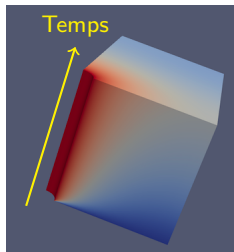
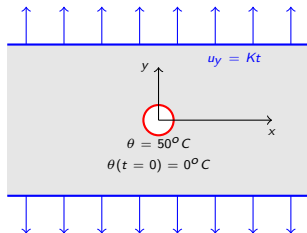
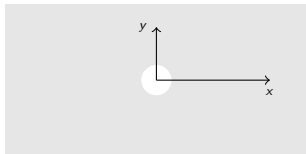
Université de technologie de Troyes, Safran, Sorbonne Université

5 novembre 2020



# Introduction : Résultat d'un calcul

- Plaque trouée sollicitée : allongement et température



# Plan de l'exposé

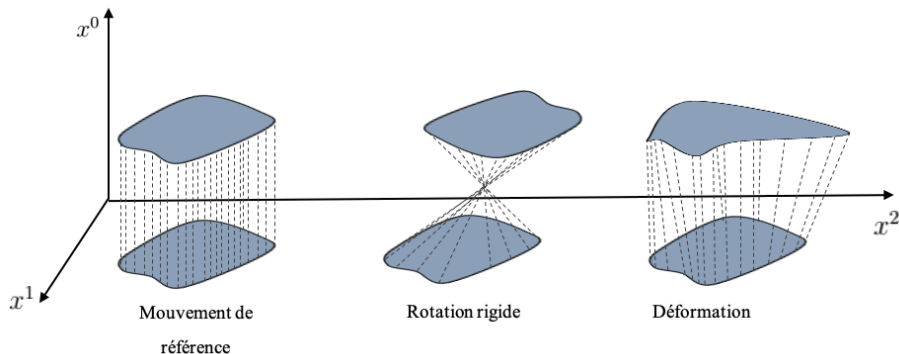
- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

# Outils et hypothèses pour construire les modèles

- Soit un domaine espace-temps  $\Omega$  (hypervolume) de frontière  $\partial\Omega$  (volume)
- On souhaite étudier les transformations de la matière par rapport au mouvement de référence
- Soit un système de coordonnées 4D  $x^\mu$ .
- Un tenseur métrique  $\mathbf{g}$  de signature  $(1, -1, -1, -1)$



# Observateurs et covariance

- Observateurs définis en un point  $M$  de  $\Omega$  : 4 vecteurs de base
- Choisir un système de coordonnées 4D = avoir défini un observateur en tout point
- Postulat : des observateurs inertiels existent en tout point. On définit un système inertiel de coordonnées avec  $x^0 = ct$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $t$  le temps absolu et dans lequel les composantes du tenseur métrique sont

$$g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Les quantités physiques sont représentées par des champs de tenseurs sur  $\Omega$ .

Une description *covariante* = invariante par changement d'observateurs.

# L'intervalle $ds$

- Intervalle constant :

$$ds^2 = (cd\tau)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

où  $\tau$  est le temps propre.

- Pour un observateur inertiel avec  $x^0 = ct$  et  $g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= (cdt)^2 \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx^1}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right] \\ &= (cdt)^2 \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

où  $v^i = \frac{dx^i}{dt}$  la vitesse 3D pour un observateur inertiel. On définit le facteur

$$\gamma = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}}.$$

- La quadrivitesse est définie par :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad \text{et donc} \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} = 1$$

- Pour un observateur inertiel avec  $x^0 = ct$  et  $\gamma = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$$u^\mu \left( \gamma, \frac{\gamma}{c} \frac{dx^i}{dt} \right) \quad u^\mu \left( \gamma, \frac{\gamma}{c} v^i \right) \quad \text{ou} \quad cu^\mu (\gamma c, \gamma v^i)$$

- On définit les observateurs propres tels que :

$$\hat{u}^\mu (1, 0, 0, 0)$$

en tout point.

- Le vecteur vitesse est un vecteur normé dans la direction du temps.

# Notion de projecteurs

**Rappel** : Décomposition du vecteur contrainte  $\vec{C}$  en mécanique des milieux continus classique :

$$\vec{C} = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

avec la contrainte normale :  $\sigma = \vec{C} \cdot \vec{n}$

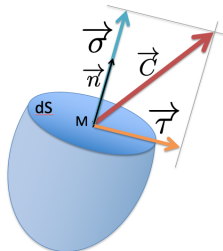
et tangentielle :  $\vec{\tau} = \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{n}) \vec{n}$

On a aussi :  $\vec{C} = \mathbb{I} \vec{C}$  et :

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \mathbb{I} \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ &= (\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \vec{C} \end{aligned}$$

On définit les projecteurs :  $\vec{n}$  et  $(\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n})$

Exemple : si  $\vec{n} = \vec{e}_x$ ,  $C_x = \sigma$  et  $\vec{\tau} = (0, C_y, C_z)$



# Notion de projecteurs

**Objectif** : Décomposer les différents phénomènes sur le temps et l'espace

- Définition générale du projecteur temporel :  $\vec{u}$
- Définition générale du projecteur spatial :  $(\mathbf{g}^{-1} - \vec{u} \otimes \vec{u})$
- Application à un vecteur :  
composante temporelle  $C_t$ , composante spatiale  $\vec{C}$

$$\vec{C} = C_t \vec{u} + \vec{C} \quad \text{avec} \quad C_t = \vec{C} \cdot \vec{u} \quad \vec{C} = C^b (\mathbf{g}^{-1} - \vec{u} \otimes \vec{u})$$

- Application à un tenseur  $T$  d'ordre deux :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$$

- Pour un observateur propre, càd avec  $\hat{u}^\mu(1, 0, 0, 0)$ , on a  $\hat{C}^\mu(C_t, \overline{\hat{C}}^i)$  et

$$\hat{\mathbf{T}}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & & & \\ \hat{q}^2 & & \overline{\hat{T}}^{ij} & \\ \hat{q}^3 & & & \end{pmatrix}$$

# Dérivée covariante et projection sur le temps

- La dérivée covariante de  $\nabla\mathcal{T}$  de  $\mathcal{T}$  :

$$d\mathcal{T} = \nabla\mathcal{T}d\vec{x} \quad \text{et} \quad \nabla\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

- Le transport covariant : projection sur le temps de la dérivée covariante :

$$\frac{d\mathcal{T}}{ds} = \vec{u} \cdot \nabla\mathcal{T}$$

- Exemple pour la quadrivitesse  $\vec{u}$  et pour un observateur inertiel

$$\nabla\vec{u} \rightarrow \nabla_{\mu}u^{\nu} = \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad \frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{u} \cdot \nabla\vec{u} \rightarrow \frac{du^{\nu}}{ds} = u^{\mu} \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

avec  $x^0 = ct$  et  $u^{\mu} (\gamma, \frac{\gamma}{c}v^i)$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{ds} &= u^{\mu} \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = u^0 \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^0} + u^i \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^i} = \gamma \frac{\partial u^{\nu}}{\partial (ct)} + \frac{\gamma}{c} v^i \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^i} \\ &= \frac{\gamma}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) u^{\nu} \end{aligned}$$

On définit la quadri-accélération :  $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{u} \cdot \nabla\vec{u}$  qui est covariante.  
Remarque  $\vec{a} \cdot \vec{u} = 0$

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

# Définition d'un champ de tenseur impulsion-énergie $\mathbf{T}$

Soit un tenseur  $\mathbf{T}$ , tenseur impulsion-énergie, d'ordre 2 symétrique décrivant le contenu énergétique de la matière.

- Peut être vu comme une généralisation du tenseur des contraintes de la 3D
- Dimension des termes dans un système inertiel de coordonnées : énergie par unité de volume 3D.
- On projette le tenseur impulsion-énergie sur le temps et l'espace et :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U}\vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$$

# Interprétation du tenseur impulsion-énergie

Dans le système propre de coordonnées avec  $\hat{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , on a

$$\hat{T}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \hat{q}^2 & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \hat{q}^3 & \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet d'interpréter physiquement chaque composante :

- $\mathcal{U}$  densité d'énergie totale :  $\mathcal{U} = \rho_c c^2 = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{\epsilon_{int}}{c^2}\right)$   
où  $\rho_c$  masse volumique et  $\tilde{\rho}_c$  masse volumique au repos.
- $\vec{\hat{q}}$  flux d'énergie  $\approx$  flux de chaleur
- $\vec{\hat{T}} = \sigma$  tenseur des contraintes
- Chaque colonne du tenseur peut être considérée comme un flux d'énergie au travers d'un des éléments de volume 3D, "surfaces" de l'hypervolume.

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation**
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

- Soit un domaine espace-temps  $\mathcal{D}$
- Conservation de la masse au repos  $\Rightarrow$

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \nabla \cdot (\tilde{\rho}_c \vec{u}) = 0$$

- Conservation du tenseur impulsion-énergie  $\mathbf{T} \Rightarrow$

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

avec  $\mathbf{T} = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{e_{int}}{c^2}\right) \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$ , on obtient :

$$\tilde{\rho}_c \frac{de_{int}}{ds} \vec{u} + \tilde{\rho}_c (c^2 + e_{int}) \vec{a} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{T}} = 0$$

# Projection sur le temps de la conservation de $\mathbf{T}$

- Conservation du tenseur impulsion-énergie  $\mathbf{T} \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

- On projette sur le temps :

$$\vec{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \left( \tilde{\rho}_c \frac{de_{int}}{ds} \vec{u} + \tilde{\rho}_c (c^2 + e_{int}) \vec{a} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{T}} \right) = 0$$

$$\tilde{\rho}_c \frac{de_{int}}{ds} = \overline{\mathbf{T}} : \mathbf{d} - \nabla \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{a} \quad \text{avec } \mathbf{d} = \text{sym}(\nabla \vec{u})$$

La projection sur le temps de la conservation du tenseur impulsion-énergie correspond à un bilan covariant de l'énergie interne :  
Equivalent du 1er principe de la thermodynamique.

La projection sur l'espace de la conservation du tenseur impulsion-énergie est l'équivalent du bilan de l'impulsion.

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

# Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie

- Conservation du tenseur impulsion-énergie  $\mathbf{T} \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

Soit un domaine espace-temps  $\Omega$  (hypervolume) de frontière  $\partial\Omega$  (volume)  
Pour tout  $u^*$ , fonction test, cinématiquement admissible :

$$\int_{\Omega} [u^* \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T})] d\Omega = 0$$

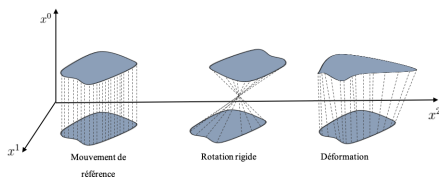
$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (u^* \mathbf{T}) - \mathbf{T} : \nabla u^*] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{d}^* d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}n) \cdot u^* dV$$

où  $\mathbf{d}^* = \text{sym}(\nabla u^*)$ , et  $n$  vecteur normal à  $\partial\Omega$

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème**
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?



Mouvement étudié  $x^\mu$  : une transformation / au mouvement de référence  $X^\mu$  :

$$x^\mu = \phi(X^\mu)$$

$$\text{et } ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\lambda} dX^\kappa dX^\lambda$$

On définit  $F$  le “gradient de la transformation” : application tangente de  $\phi$ , pour définir une déformation.

# Hypothèses physiques

- Pas de gravitation, pas de phénomène électromagnétique
- Pas d'échange de molécules par diffusion (systèmes fermés)
- Pas de réactions chimiques, nucléaires, pas de transformations de phases
- Pas de discontinuités internes du milieu (pas de rupture, pas d'endommagement...), pas d'irréversibilités (plasticité, viscosité...)
- Pas d'effet dynamique
- Couplage thermomécanique
- Matériau élastique
- Diffusion de la chaleur : loi de Fourier
- Géométrie 2D du système

- On choisit  $(\theta, x^i)$  comme inconnues du problème
- Relier  $\mathbf{T}$  aux inconnues du problème  $(\theta, x^i)$ , dans le système propre de coordonnées :

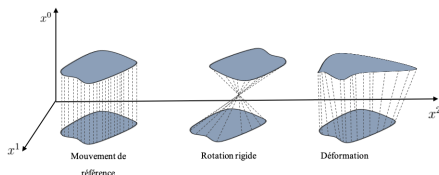
$$\hat{T}^{\mu\nu}(\theta, F) \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \hat{q}^2 & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \hat{q}^3 & \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Avec :

- $\mathcal{U}(\theta, F)$  densité d'énergie totale :  $\mathcal{U} = \tilde{\rho}_c c^2 \left( \mathcal{I} + \frac{e_{int}}{c^2} \right)$   
où  $e_{int}$  est composée de l'énergie thermique et élastique.
- $\vec{\hat{q}}(\theta)$  flux de chaleur : loi de Fourier
- $\sigma(\theta, F)$  : thermo-élasticité

# Position du problème

Soit un domaine espace-temps  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$



On cherche  $(\theta, x^i)$  solution de :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}(\theta, F) \mathbf{d}^* d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}(\theta, F) n u^* dV$$

pour tout  $u^*$  cinématiquement admissible et :

- $(\theta, x^i)$  connu sur  $\partial\Omega^1$
- $\mathbf{T}n$  connu sur  $\partial\Omega^2$

Conservation de l'énergie assurée par la quatrième équation

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D**
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

# Implémentation EF 4D

- Implémentation dans FEniCS, proche de l'esprit et de l'écriture mathématiques
- Jeremy Bleyer  
<https://comet-fenics.readthedocs.io/en/latest/intro.html>
- Poutre élastique soumise à son propre poids

```
E = Constant(1e5)
nu = Constant(0.3)
model = "plane_stress"

mu = E/2/(1+nu)
lmbda = E*nu/(1+nu)/(1-2*nu)
if model == "plane_stress":
    lmbda = 2*mu*lmbda/(lmbda+2*mu)

def sigma(v):
    return lmbda*tr(eps(v))*Identity(2) + 2.0*mu*eps(v)
```

```
rho_g = 1e-3
f = Constant((0, -rho_g))

V = VectorFunctionSpace(mesh, 'Lagrange', degree=2)
du = TrialFunction(V)
u_ = TestFunction(V)
a = inner(sigma(du), eps(u_))*dx
l = inner(f, u_)*dx
```

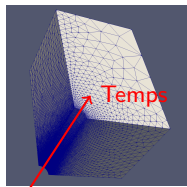
```
def left(x, on_boundary):
    return near(x[0], 0.)

bc = DirichletBC(V, Constant((0.,0.)), left)

u = Function(V, name="Displacement")
solve(a == l, u, bc)

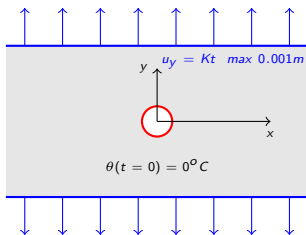
plot(1e3*u, mode="displacement")
```

- FEniCS : maillage 3D → implémentation du problème 2D +1D.



# Calculs EF 4D sollicitation thermomécanique avec FEniCS

- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- $t_{final} = 10000s$
- Sollicitation : allongement seul suivant  $y$



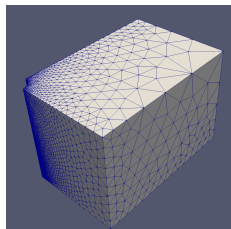
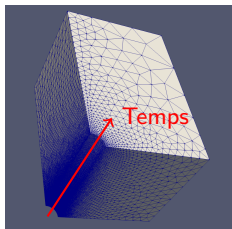
Young 70 GPa, Poisson 0.3

Masse volumique 2700 kg/m<sup>3</sup>

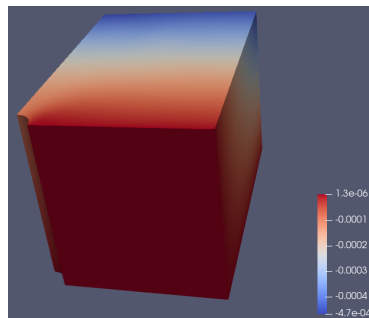
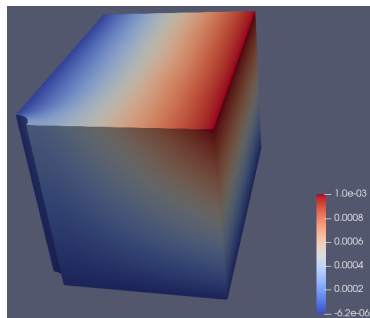
Dilatation thermique : 23. 10<sup>-6</sup> K<sup>-1</sup>

Conductivité thermique : 237 J/ s/m/K

Capacité thermique 2457 kJ/m<sup>3</sup>/K

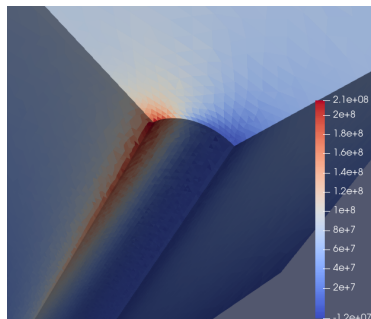
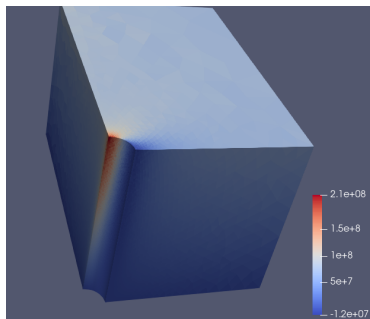


- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant  $y$
- Déplacements en  $y$  et  $x$

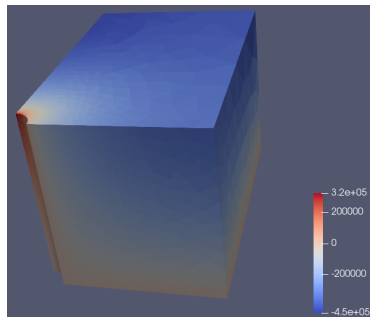
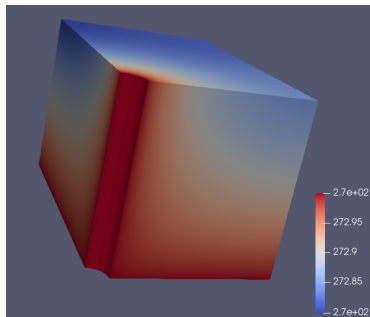


# Calculs EF 4D sollicitation thermomécanique avec FEniCS

- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant y
- Contrainte  $\sigma_{yy} \rightarrow T^{22}$

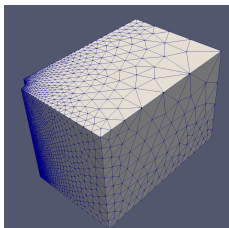
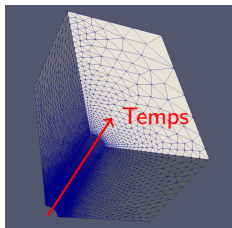
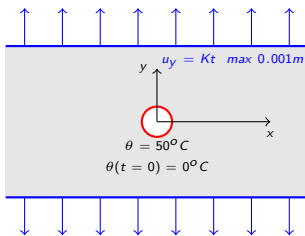


- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant  $y$
- Température et variation d'énergie interne  $T^{00}$



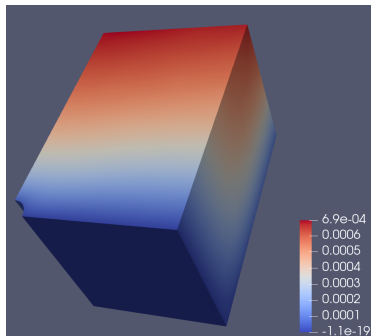
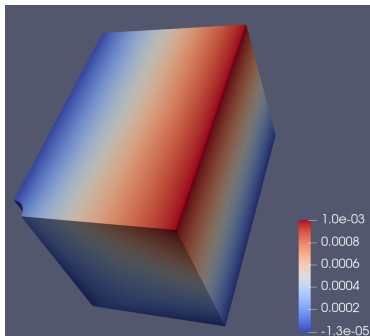
# Calculs EF 4D sollicitation thermomécanique avec FEniCS

- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant  $y$  - température imposée au niveau du trou

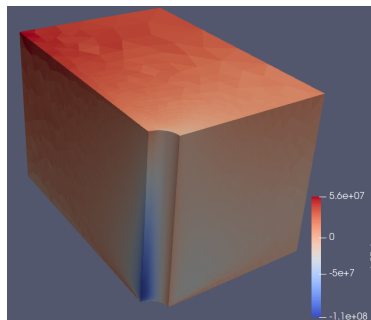


# Calculs EF 4D sollicitation thermomécanique avec FEniCS

- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant  $y$  - température imposée au niveau du trou
- Déplacements en  $y$  et  $x$

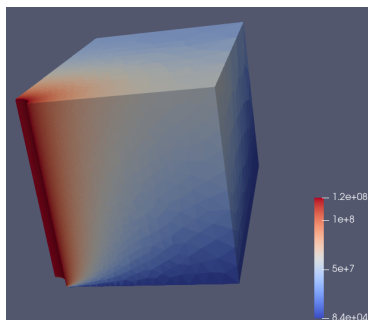
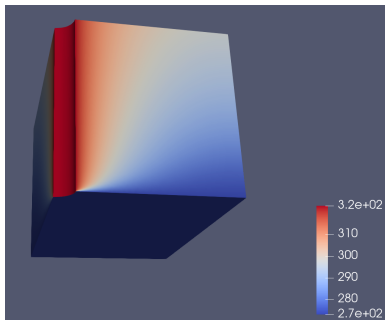


- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant  $y$  - température imposée au niveau du trou
- Contrainte  $\sigma_{yy} \rightarrow T^{22}$



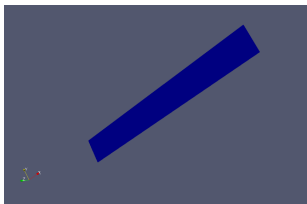
# Calculs EF 4D sollicitation thermomécanique avec FEniCS

- Plaque trouée (2m x 4m) en aluminium ; trou de 10cm
- Sollicitation : allongement suivant  $y$  - température imposée au niveau du trou
- Température et variation d'énergie interne  $T^{00}$



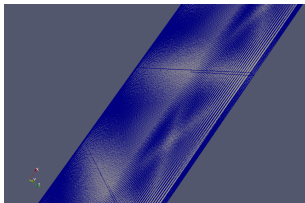
## Paramètres d'entrées

- Géométrie = poutre se déformant dans le temps
- 2 dim. d'espace et 1 de temps



Paramètre	Valeur	Unité
Longueur $L_x$	1	m
Largeur $L_y$	0.01	m
Temps $L_t/c$	80000	s
	→ 8	s

- Maillage



Paramètre	Valeur
$N_x$	100
$N_y$	3
$N_t$	100

## Paramètres d'entrées

- Matériau = acier, homogène et isotrope
- Thermoélasticité HPP ; variables  $\theta$  et  $F(x)$  (ou  $\bar{e}(dep)$  ;  $dep = x - X$ )

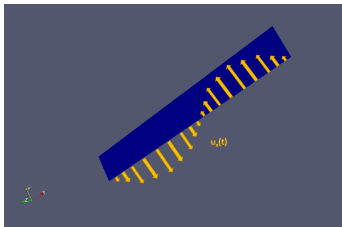
$$\begin{aligned}
 T_{\sigma}^{\mu\nu} \approx & \Lambda(e_{\alpha}^{\beta}(\delta_{\beta}^{\alpha} - u^{\alpha}u_{\beta}))(g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}) \\
 & + 2\mu e^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\mu} - u^{\mu}u_{\alpha})(\delta_{\beta}^{\nu} - u^{\nu}u_{\beta}) \\
 & - (2\mu + 3\Lambda)\alpha\Delta\theta(g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu})
 \end{aligned}$$

- Dissipation thermique (Fourier)  $q^{\mu} = \frac{\lambda}{c}\bar{g}^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\theta = \frac{\lambda}{c}(g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu})\nabla_{\nu}\theta$

Paramètre	Valeur	Unité
Young $E$	250	GPa
Poisson $\nu$	0	adim
Densité $\tilde{\rho}_c$	7850	kg/m <sup>3</sup>
Capacité th. $C_{m\nu}$	520	J/kg/K
Conductivité th. $\lambda$	50	W/m/K
	→ 500000	W/m/K
Dilatation th. $\alpha$	13	$\mu\text{m}/\text{m}/\text{K}$

# Calculs EF 4D sous sollicitation cyclique, avec FEniCS

- Sollicitation et CL ( $x^1 = x; x^2 = y; x^0 = ct$ )



- Initialement

$$\forall x, \forall y, dep^\mu(t=0) = (dep^0, 0, 0)$$

$$\forall x, \forall y, \theta(t=0) = \theta_0 = 293K$$

- Spatialement (encastrement et sollicitation cyclique)

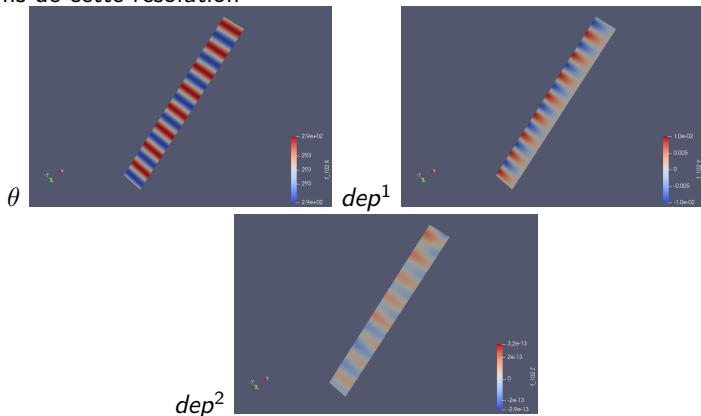
$$\forall t, \forall y, dep^\mu(x=0) = (dep^0, 0, 0)$$

$$\forall t, \forall y, dep^1(x=L_x) = dep_{max} \sin(\omega t)$$

- avec  $\omega = 2\pi \cdot 10^{-4} rad/s \rightarrow 2\pi rad/s$  (8 cycles) et  $dep_{max} = 10^{-2} m$  (HPP)

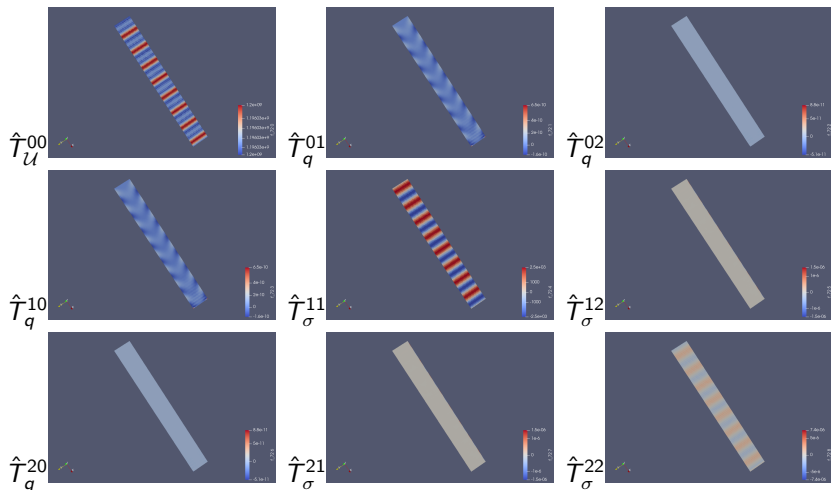
# Calculs EF 4D sous sollicitation cyclique, avec FEniCS

- On résout la forme variationnelle 2D+1D avec 3 degrés de liberté ( $\theta$ ,  $dep^1$ ,  $dep^2$ ).
- Solutions de cette résolution



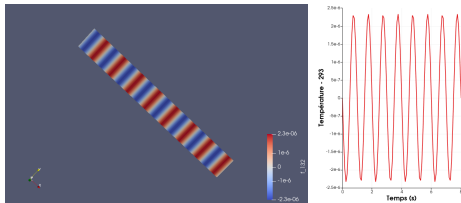
- Auto-échauffement, mais faible variation de température
- Présence d'un déplacement transversal (couplage thermoélastique), mais négligeable ( $\approx 10^{-13}$ )

## Résultats pour le tenseur impulsion-énergie $T^{\mu\nu} \approx \hat{T}^{\mu\nu}$



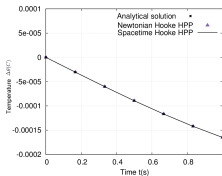
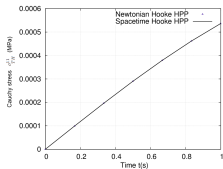
# Calculs EF 4D sous sollicitation cyclique, avec FEniCS

- Calcul de la variation de température  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ .



- On peut comparer à une résolution Newtonnienne numérique.
- On peut comparer à une solution analytique. Pour un système localement adiabatique ( $q^\mu \approx 0$ ) et HPP ( $I_{I,d} = \text{trace}(\mathbf{d}) \approx \bar{g}_{\mu\nu} \frac{d\bar{\epsilon}^{\mu\nu}}{dt}$ ), on obtient :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{(2\mu + 3\lambda)\alpha}{\tilde{\rho}_c C_{m\nu} \mathcal{V}_0} \theta \frac{d\mathcal{V}(t)}{dt} \Rightarrow \ln(\theta(t)/\theta_0) = -\beta(\mathcal{V}(t) - \mathcal{V}_0) \quad (1)$$



## Quelques conclusions partielles

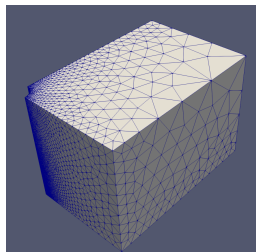
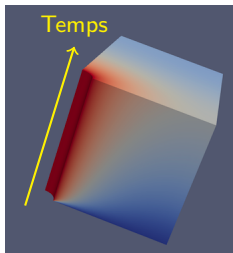
- Le calcul EF 4D permet de traiter des problèmes statiques ou dynamiques
- Il permet de restituer l'effet de l'auto-échauffement dû à une source thermoélastique (réversible)
- Généralisation des modèles de conduction thermique en 4D dans Al Nahas et al., JNET, 2020, <https://doi.org/10.1515/jnet-2019-0074>
- Problématique de modélisation et d'identification des paramètres de l'auto-échauffement
- Très bon accord avec les approches Newtonniennes (num et anal) en HPP (adiabatique)
- Le calcul devrait permettre de trouver des échauffements importants (expérimentalement, on trouve  $\Delta\theta = 50^{\circ}C$  pour  $\omega = 20kHz$  et  $N_{cycle} = 45 \cdot 10^5$ )
- Il existe deux temps caractéristiques dans le problème ; pour appréhender les 2, il faut pouvoir jouer drastiquement sur le pas de temps (temps et mémoire de calculs)
- Possibilité de sauts de cycles ?

# Plan

- 1 Présentation de l'approche relativiste espace-temps
- 2 Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie  $T$
- 3 Lois de conservation
- 4 Forme faible de la conservation du tenseur impulsion-énergie
- 5 Position du problème
- 6 Exemples de calculs EF 4D
- 7 Conclusion : Pourquoi une approche relativiste ?

# Pourquoi une approche relativiste pour les éléments-finis ?

- Une formulation covariante
- Une intégration qui garantit la conservation de l'énergie
- Un maillage espace-temps



# The End

# Quelques définitions et propriétés utiles des tenseurs

- Changement d'observateurs des composantes d'un tenseur (densité  $\mathcal{T}$  de poids  $W$ )

$$\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \right|^W \frac{\partial \tilde{\xi}^\mu}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \tilde{\xi}^\nu}{\partial \xi^\kappa} \mathcal{T}^{\lambda\kappa} \quad (2a)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\mu\nu} = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \right|^W \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \tilde{\xi}^\mu} \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial \tilde{\xi}^\nu} \mathcal{T}_{\lambda\kappa} \quad (2b)$$

- Shift de la variance des composantes d'un tenseur

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \mathcal{T}^{\alpha\beta} \quad (3a)$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \mathcal{T}_{\alpha\beta} \quad (3b)$$

# Les transports et dérivées utilisés en 4D

- La dérivée covariante utilisant les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{S} = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\xi^{\lambda}} - W\Gamma_{\kappa\lambda}^{\kappa}\mathcal{S} \quad (4a)$$

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial\xi^{\lambda}} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathcal{T}^{\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu}\mathcal{T}^{\mu\kappa} - W\Gamma_{\kappa\lambda}^{\kappa}\mathcal{T}^{\mu\nu} \quad (4b)$$

- Le transport covariant

$$u^{\lambda}\nabla_{\lambda}\mathcal{S} = \frac{d\mathcal{S}}{ds} - Wu^{\lambda}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\kappa}\mathcal{S} \quad (5a)$$

$$u^{\lambda}\nabla_{\lambda}\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{d\mathcal{T}^{\mu\nu}}{ds} + u^{\lambda}(\Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathcal{T}^{\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu}\mathcal{T}^{\mu\kappa} - W\Gamma_{\kappa\lambda}^{\kappa}\mathcal{T}^{\mu\nu}) \quad (5b)$$

- Pour un observateur inertiel, tel que  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$

$$u^{\lambda}\nabla_{\lambda}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{ds} = u^{\lambda}\frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}}(\cdot) = u^4\frac{\partial}{\partial\xi^4}(\cdot) + u^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\cdot) \quad (6)$$

# Les transports et dérivées utilisés en 4D

- La dérivée de Lie dans le champ de quadrivitesse

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{S}) = u^\lambda \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi^\lambda} + W \mathcal{S} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \xi^\lambda} \quad (7a)$$

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{T})_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}}{\partial \xi^\lambda} + \mathcal{T}_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \xi^\mu} + \mathcal{T}_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \xi^\nu} + W \mathcal{T}_{\mu\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \xi^\lambda} \quad (7b)$$

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{T})^{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial \xi^\lambda} - \mathcal{T}^{\lambda\nu} \frac{\partial u^\mu}{\partial \xi^\lambda} - \mathcal{T}^{\mu\lambda} \frac{\partial u^\nu}{\partial \xi^\lambda} + W \mathcal{T}^{\mu\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \xi^\lambda}. \quad (7c)$$

- Propriétés de la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_u(u)^\mu = 0 \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{T}(v, w, \dots)) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial v} \mathcal{L}_u(v) + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial w} \mathcal{L}_u(w) + \dots \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_u(\text{"constante mat."}) \neq 0 \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_u(X)^\mu \neq g^{\mu\nu} \mathcal{L}_u(X)_\nu \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_u(g)^{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mathbf{g} \text{ correspond à une isométrie} \quad (12)$$

# Les problèmes de la MMC Newtonienne en grandes transformations

- Pourquoi ne pas se satisfaire du traitement Newtonien des changements d'observateur (objectivité en MMC) ?
  - 1 Les observateurs Newtoniens sont des solides rigides (avec un temps absolu)  
→ confusion/équivalence entre changement d'observateurs et invariance par superposition de corps rigide
  - 2 Comment construire un modèle de comportement pour un observateur qui se déforme ?
- Les problèmes cinématiques en grandes transformations
  - 1 Comment/ pourquoi choisir parmi les transports objectifs ?
  - 2 Comment choisir entre les formalismes Lagrangien, Eulérien et convectif ?
  - 3 Quelle variable cinématique choisir pour une description donnée ? réponse donnée actuellement : elles se valent toutes !

# Définition du tenseur impulsion-énergie $T$

**Approche mathématique** On projette le tenseur-impulsion énergie **sur le temps**, **sur le temps et l'espace**, et **sur l'espace**

$$\mathcal{U} = u_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta \quad (13a)$$

$$q^\mu = \Pi^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta \quad (13b)$$

$$T^\mu_\sigma = \bar{T}^{\mu\nu} = \Pi^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} \Pi^\nu_\beta \quad (13c)$$

Ce qui permet d'écrire de façon unique :

$$T^{\mu\nu} = T^\mu_{\mathcal{U}} + T^\mu_q + T^\mu_\sigma \quad (14)$$

$$= \mathcal{U} u^\mu u^\nu + q^\mu u^\nu + u^\mu q^\nu + T^\mu_\sigma \quad (15)$$

# Modèle de comportement

Soit dans le repère propre :

$$\hat{T}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \hat{q}^2 & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \hat{q}^3 & \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (\lambda \text{tr}(\mathbf{E}) - \kappa(\theta - \theta_0)) \mathbf{g} + 2\mu \mathbf{E} \quad (16)$$

$$x^\mu = x^\mu(X^\mu)$$

$$\text{et } ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\kappa} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\lambda} dX^\kappa dX^\lambda$$

On définit le "gradient de la transformation"  $F^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}$  et par exemple le tenseur de dilatation et le tenseur de déformation de Lagrange :

$$\mathbf{C} = F^T \mathbf{g} F \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_{ref})$$

# Construction des modèles de comportement et de dissipation en choisissant un potentiel énergétique

- On réinjecte ces développements dans Clausius-Duhem

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \tilde{\rho}_c \left( \eta \mathcal{L}_u(\theta) + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \mathcal{L}_u(\theta) \right) + \tilde{\rho}_c \left( \frac{\bar{\Gamma}_I^{n_1}}{n_1} \frac{\lambda}{\rho_c} \bar{\mathbf{g}}^{\mu\nu} d_{\mu\nu} + \frac{\bar{\Gamma}_{II}^{n_2}}{n_2} \frac{\mu}{\rho_c} \bar{\mathbf{g}}^{\mu\nu} d_{\mu\nu} \right) \\ & + \tilde{\rho}_c \left( \frac{\lambda}{\rho_c} \bar{\Gamma}_I^{n_1-1} A_I^{\mu\nu} d_{\mu\nu} + \frac{\mu}{\rho_c} \bar{\Gamma}_{II}^{n_2-1} A_{II}^{\mu\nu} d_{\mu\nu} \right) = T_\sigma^{\mu\nu} d_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (17)$$

- Pour des transformations indépendantes et réversibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{L}_u(\theta), \eta &= -\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \\ \forall d_{\mu\nu}, T_\sigma^{\mu\nu} &= \frac{\bar{\Gamma}_I^{n_1}}{n_1} \lambda \bar{\mathbf{g}}^{\mu\nu} + \frac{\bar{\Gamma}_{II}^{n_2}}{n_2} \mu \bar{\mathbf{g}}^{\mu\nu} + \left( \lambda \bar{\Gamma}_I^{n_1-1} A_I^{\mu\nu} + \mu \bar{\Gamma}_{II}^{n_2-1} A_{II}^{\mu\nu} \right)^{Sym} \end{aligned} \quad (18)$$

# Construction des modèles de comportement et de dissipation en choisissant un potentiel énergétique

- On obtient le modèle d'élasticité suivant :

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})^2}{2}\lambda\bar{g}^{\mu\nu} + (\bar{e}_{\alpha\beta}\bar{e}^{\alpha\beta})\mu\bar{g}^{\mu\nu} + \lambda(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})(\bar{g}^{\mu\nu} - 2\bar{e}^{\mu\nu}) + 2\mu\bar{e}^{\mu\nu} - 4\mu\left(\bar{e}^{\mu}_{\beta}\bar{e}^{\beta\nu}\right)^{Sym} \quad (19)$$

$$= \lambda(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\left(\bar{g}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\bar{g}^{\mu\nu} - 2\bar{e}^{\mu\nu}\right) + 2\mu\left(\bar{e}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(e_{\alpha\beta}\bar{e}^{\alpha\beta})\bar{g}^{\mu\nu} - 2\left(\bar{e}^{\mu}_{\beta}\bar{e}^{\beta\nu}\right)^{Sym}\right) \quad (20)$$

- On regarde le comportement en petites déformations  $\forall\mu, \nu, e^{\mu\nu} \ll 1$  :

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} \simeq \lambda(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\bar{g}^{\mu\nu} + 2\mu\bar{e}^{\mu\nu} \quad (21)$$

$$= \lambda(e_{\alpha}^{\beta}(\delta^{\alpha}_{\beta} - u^{\alpha}u_{\beta}))(\bar{g}^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}) + 2\mu e^{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\alpha} - u^{\mu}u_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} - u^{\nu}u_{\beta}) \quad (22)$$

# Passage à la limite non-relativiste

- On traite le cas HPP pour un observateur inertiel

$$\begin{aligned} T_{\sigma}^{\mu\nu} &= \lambda(e_{\alpha}^{\beta}(\delta_{\beta}^{\alpha} - \gamma^2 v^{\alpha} v_{\beta}/c^2))(\eta^{\mu\nu} - \gamma^2 v^{\mu} v^{\nu}/c^2) \\ &+ 2\mu e^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\mu} - \gamma^2 v^{\mu} v_{\alpha}/c^2)(\delta_{\beta}^{\nu} - \gamma^2 v^{\nu} v_{\beta}/c^2) \end{aligned} \quad (23)$$

- On fait  $v \ll c$  et  $e_4^4$  (vitesse de déformation/c)  $\ll 1$ , ce qui donne :

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} \approx \lambda(e_{\alpha}^{\beta} \delta_{\beta}^{\alpha}) \eta^{\mu\nu} + 2\mu e^{\mu\nu} \quad (24)$$

$$\approx \lambda(e_a^b \delta_b^a) \eta^{\mu\nu} + 2\mu e^{\mu\nu} \quad (25)$$

- On se place dans le cas d'un observateur propre ( $\hat{\lambda} = J\lambda$  et  $\hat{\mu} = J\mu$ ), d'où pour les composantes spatiales

$$\hat{T}_{\sigma}^{ij} = J\lambda(\hat{e}_a^b \delta_b^a + \hat{e}_4^4 - \hat{e}_4^{\beta} \hat{u}_{\beta}) \hat{g}^{ij} + 2J\mu \hat{e}^{ij} \quad (26)$$

- On fait  $\hat{e}_4^{\beta}$  (vitesse de déformation/c)  $\ll 1$ , ce qui donne :

$$\hat{T}_{\sigma}^{ij} \approx J\lambda(\hat{e}_a^b \delta_b^a) \hat{g}^{ij} + 2J\mu \hat{e}^{ij} \quad (27)$$

# Les grandes étapes de la démarche permettant d'être covariant et thermodynamiquement compatible

- Cadre 4D
- Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie
- Etablissement des lois de conservation et de bilan
- Obtention de l'inégalité de Clausius-Duhem
- Définition de la cinématique et plus généralement des variables d'états
- Construction des modèles de comportement et de dissipation en choisissant un potentiel énergétique