

Quelques exemples d'application de l'homologie persistante en mécanique

R. Mosquera^a

en collaboration avec D. Razafindralandy^a, A. Hamdouni^a

^a équipe M2N, LaSIE UMR CNRS 7356, La Rochelle Université

rolando.mosquera_meza@univ-lr.fr

Réunion du GDR - GDM
IRCAM-Paris le 7 mai 2024



Plan de l'exposé

- 1 Rappels sur l'homologie persistante
- 2 Exemples d'application de l'homologie persistante en mécanique
 - Identification et localisation de tourbillons 3D
 - Surveillance de santé structurale des ouvrages d'art

L'homologie

Formalise la notion de « trous » dans une variété topologique et les catégorise, afin d'étudier les espaces topologiques

L'homologie simpliciale :

- Les k -simplexes
- Un complexe simplicial K : ensemble constitué d'une collection finie de k -simplexes
- L'ensemble (de k -chaînes)

$$C_k(K) = \left\{ \sum \epsilon_\sigma \sigma : \sigma \in K(k), \epsilon_\sigma \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

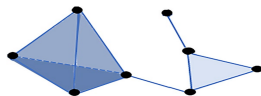
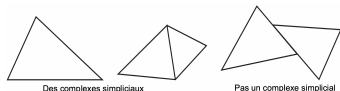
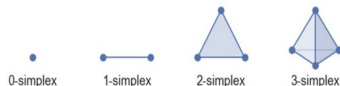
est muni d'une structure de groupe

- L'opérateur de bord

$$\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$$

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma_0, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \sigma_k)$$

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$



Complexe simplicial composé de huit sommets (0-simplexes), 11 arêtes (1-simplexes), cinq triangles (2-simplexes), un tétraèdre (3-simplexes)

L'homologie simpliciale :

$$\bullet \partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$$

- ▶ L'espace des k -cycles

$$\text{Ker}(\partial : C_k \rightarrow C_{k-1})$$

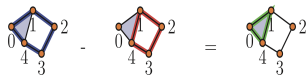
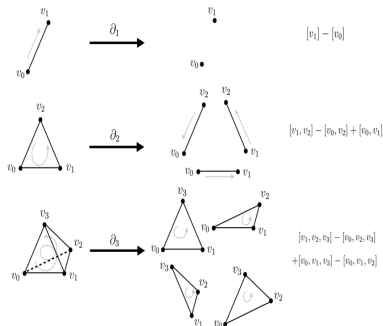
- ▶ L'espace des k -bords

$$\text{im}(\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k)$$

- Le k i-ème groupe d'homologie de K :

$$H_k(K) = \frac{\text{Ker}(\partial : C_k \rightarrow C_{k-1})}{\text{im}(\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k)}$$

Classe les cycles non limitant !



Deux 1-cycles homologues

L'homologie simpliciale :

- Le k i-ème nombre de Betti de K :

$$\beta_k(K) = \dim(H_k(K))$$

- ▶ $\beta_0(K)$ nombre de composantes connexes
- ▶ $\beta_1(K)$ nombre de courbes fermées indépendantes
- ▶ $\beta_2(K)$ nombre de cavités indépendantes

Remarques :

- Les nombres de Betti sont des invariants topologiques, ie. espaces topologiques homéomorphes ont le même nombre de Betti
- Il existe plusieurs théories d'homologie



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$$



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$$



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$$



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 1$$

L'homologie persistante

- Comment extraire des structures topologiques pertinentes directement à partir des données ?

Un ensemble de points en eux-mêmes ne portent aucune structure topologique non triviale !

Démarche :

- ▶ L'ensemble de points sera considéré comme un échantillonnage (bruité) d'un espace topologique sous-jacent
 - ▶ L'homologie des données sera calculée en créant des connexions entre les points de données (choix d'une approximation complexe simpliciale)
 - ▶ En faisant varier l'échelle sur laquelle ces connexions sont établies (choix d'une filtration), des signatures multi-échelles associées aux données seront obtenues
- L'homologie persistante code l'évolution de la topologie à travers les échelles
→ signatures topologiques multi-échelles

L'homologie persistante

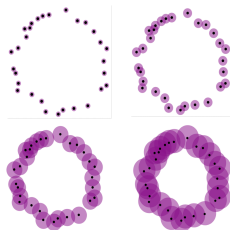
- Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de points
- On ne peut pas utiliser X directement
→ On va épaissir X



- Soit $\epsilon > 0$, on considère l'espace

$$X^\epsilon = \bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)$$

- Idée générale : déduire de $(X^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ des informations topologiques d'un objet sous-jacent



- Comment calculer les groupes d'homologie de X^ϵ ?
→ Nous avons besoin d'une triangulation de X^ϵ

- Le nerf du recouvrement $\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^N$ est le complexe simplicial où les m -simplexes $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_m}\}$ sont caractérisés par :

$$\bigcap_{\ell=0}^m B(x_{i_\ell}, \epsilon) \neq \emptyset$$

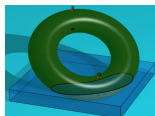
- Th. Le nerf du recouvrement $\{B(x, \epsilon)\}_{x \in X}$ est homotopiquement équivalent à X^ϵ



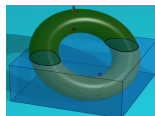
L'homologie persistante

Exemple. Étude de la topologie d'un tore \mathbb{T} à partir de la fonction hauteur

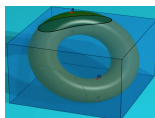
On note $\mathbb{T}^h = \{x \in \mathbb{T} : f(x) \leq h\}$



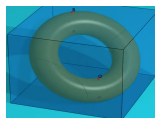
$$P < h < Q$$



$$Q < h < R$$



$$R < h < S$$

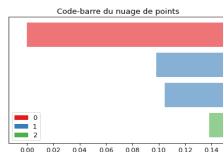
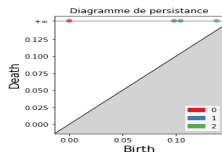
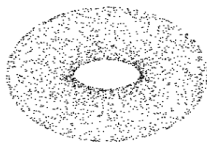


$$h > S$$

- 1 \mathbb{T}^h est homéomorphe à un disque
- 2 \mathbb{T}^h est homéomorphe à un cylindre
- 3 \mathbb{T}^h est homéomorphe à une surface compacte connexe dont le bord est un cercle
- 4 \mathbb{T}^h est le tore

L'homologie persistante

- La « durée de vie de classes d'homologie » sera encodée dans un diagramme de persistance (DP) ou dans un code-barres



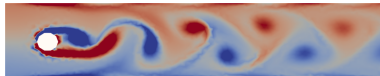
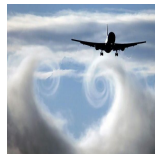
- Les classes qui vivent plus longtemps seront celles qui contiennent des informations topologiques globales de l'espace

- Théorème (stabilité).** Sous des hypothèses de régularité sur les fonctions $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons $d_B(D_f, D_g) \leq \|f - g\|_\infty$ où d_B est la distance entre diagrammes de persistance

Identification et localisation de tourbillons par homologie persistante

Caractéristiques, idées et concepts associés

- Phénomène physique extrêmement complexe
- Vorticité, rotation, mouvement des particules, lignes de courant...
- Manque de consensus sur une définition rigoureuse de tourbillon
- Divers critères d'identification, visualisation et localisation ont été proposés



Les critères classiques Q , Δ , λ_2

Caractéristiques

- Sont des critères locaux (i.e définis point par point) qui dépendent exclusivement des valeurs propres du tenseur du gradient de vitesse ∇v et des invariants associés
- Un tourbillon est identifié comme une région connexe où une inégalité, exprimée en termes de valeurs propres du gradient de vitesse, est vérifiée
- Ex. **Le critère Q**



$$\nabla v = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) + \frac{1}{2} (\nabla v - \nabla v^T) = S + W$$



$$Q = \frac{1}{2} (\|W\|_F - \|S\|_F)$$

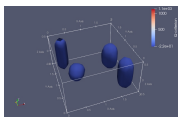
où $\|\cdot\|_F$ dénote la norme de Frobenius

- ▶ Selon ce critère, un tourbillon est défini comme « une région de fluide connexe où $Q > 0$ »

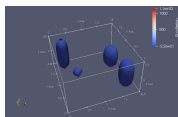
Limites des critères classiques

Utilisation dans la pratique

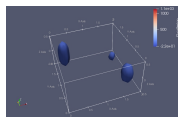
- Un seuil Q_{seuil} est choisi pour éviter des erreurs numériques, ainsi, un tourbillon est défini comme une région connexe où $Q > Q_{\text{seuil}}$
 - ▶ Chaque valeur du seuil donne une structure tourbillonnaire différente
 - ▶ Incapacité à capturer simultanément des tourbillons forts et faibles
 - ▶ Absence d'une interprétation claire de la valeur du seuil
- **Ex.** Modèle analytique de Kufmann-Scully de quatre tourbillons



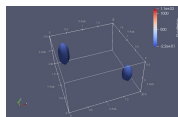
$Q > 0.05$



$Q > 0.1$



$Q > 0.2$



$Q > 0.4$

Identification de tourbillons par homologie persistante

Soient $v(x, t)$ les solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = F(v), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0,$$

où Ω est le domaine spatial. Soit $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{N}^3$ un réseau discret associé à Ω

Principales étapes de la procédure d'identification :

- 1 Définir un complexe cubique K associé au réseau discret $\tilde{\Omega}$
- 2 Considérer une fonction $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (fonction filtre)
- 3 Calculer l'homologie persistante associée à la filtration de sous-niveau définie par f
- 4 Les $N_2 \in \mathbb{N}$ nombres de Betti de dimension 2 (cavités) associés à la filtration, seront les indicateurs de l'existence de N_2 tourbillons

Remarque :

- ▶ Un 2-nombre de Betti est associé à une surface de \mathbb{R}^3

Localisation de tourbillons par homologie persistante

Remarques :

- L'homologie persistante fait correspondre à chaque générateur d'un groupe d'homologie un intervalle de persistante
 - ▶ Barre dans le code-barres créée par des classes d'homologie qui naissent et meurent aux extrémités
- On souhaite reconstruire une structure géométrique associée à chaque intervalle de persistante
 - ▶ Chaque intervalle de persistante n'est pas associé à la classe d'un cycle particulier
- On va introduire la notion de cycle optimal en volume

Localisation de tourbillons par homologie persistante

Cycle optimal en volume :

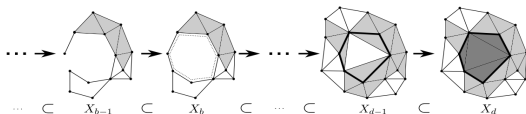
- Soit $D_2 = \{(b_i, d_i)\}_{i=1}^{N_2}$ l'ensemble d'intervalles de persistance associés au nombre de Betti N_2
- Pour chaque intervalle de persistance $(b, d) \in D_2$, $v \in C_3(K_d)$ est un volume persistant si v est la solution du problème :

$$\text{minimise } \|v\|_0,$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} v &= \sigma_d + \sum_{\alpha_k \in \mathbb{Z}_2, \tau_k \in \mathcal{F}_3} \alpha_k \tau_k, \\ (\partial_3 v)_\sigma &= 0 \text{ avec } \sigma \in \mathcal{F}_3, \\ (\partial_3 v)_{\sigma_b} &\neq 0 \end{aligned}$$

où $\|v\|_0$ est le nombre de coefficients non nuls sur le corps \mathbb{Z}_2 et \mathcal{F}_3 est l'ensemble de 3-simplexes σ_k tel que $b < k < d$

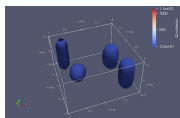


- Si v une solution du problème précédent, alors le bord $\partial_3 v$ de v sera appelé un cycle optimal en volume pour l'intervalle (b, d)

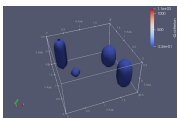
Application numérique de la méthode topologique

Ex.1 (Modèle analytique de Scully) Quatre tourbillons de taille de coeurs différents sont considérés

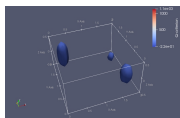
Critère Q : différentes valeurs du seuil sont utilisées



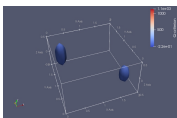
$Q > 0.05$



$Q > 0.1$

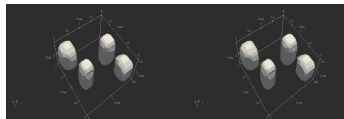


$Q > 0.2$



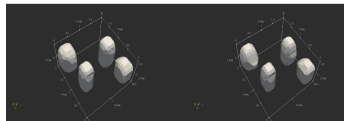
$Q > 0.4$

Critère topologique : différentes fonctions de filtre sont utilisées



Fonction filtre Q

Fonction filtre λ_2



Fonction filtre Δ

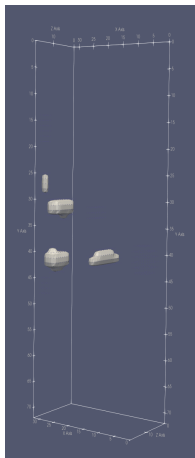
Fonction filtre *VectorRortex*

- ▶ La méthode topologique est robuste face au choix de la fonction de filtre
- ▶ La méthode topologique est capable de capturer des tourbillons forts et faibles

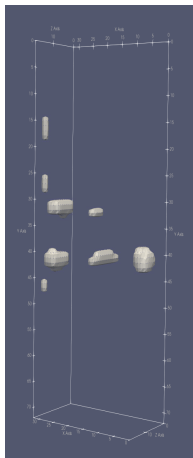
Application numérique de la méthode topologique

Ex.2 (Champs 3D mesurés par Tomo-PIV) Analyse aéroacoustique des jets d'air issue d'une fente rectangulaire et impactant une plaque fendue. $Re = 4415$

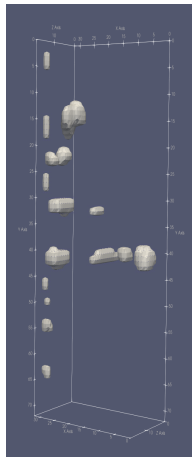
Critère topologique



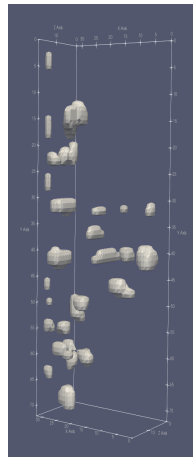
4 surfaces



8 surfaces



16 surfaces

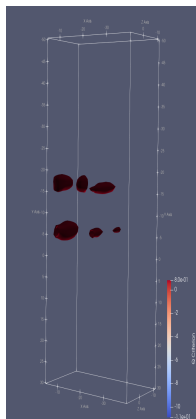


32 surfaces

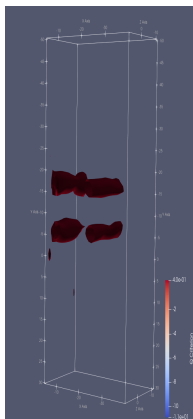
Application numérique de la méthode topologique

Ex.2 (Champs 3D mesurés par Tomo-PIV) Analyse aéroacoustique des jets d'air issue d'une fente rectangulaire et impactant une plaque fendue. $Re = 4415$

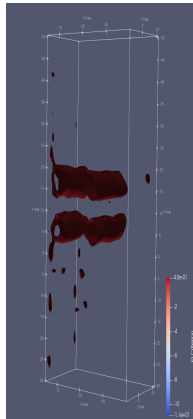
Critère Q



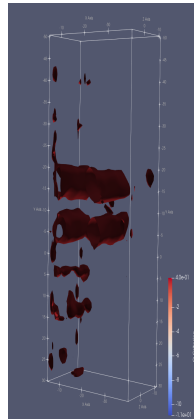
$Q > 0.8$



$Q > 0.4$



$Q > 0.1$

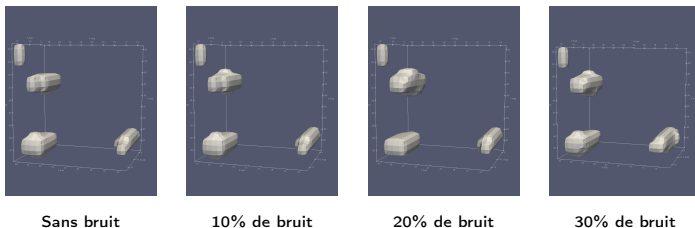


$Q > 0.05$

Application numérique de la méthode topologique

Robustesse au bruit du critère topologique

On va ajouter des bruits gaussiens à la fonction filtre f et nous allons appliquer le critère topologique à chaque nouvelle fonction filtre perturbée



Surfaces associées aux fonctions filtre bruitées

	5%	10%	15%	20%	30%
$\ f - f_b\ _\infty$	1.5	3.1	4.6	6.2	9.4
$d_B(D_f, D_{f_b})$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.1

Valeurs en norme infinie et en distance de Bottleneck

Conclusions sur le critère topologique

Les principales caractéristiques du critère topologique sont les suivantes :

- 1 son caractère non-local, en effet, chaque tourbillon est associé à un invariant topologique qui lui-même est associé à la structure globale d'un espace topologique
- 2 sa capacité à détecter des tourbillons d'intensité différents
- 3 ce critère ne recourt pas à l'utilisation d'un seuillage comme dans le cas des critères classiques, en échange, les tourbillons apparaissent comme descripteurs multi-échelles associés à la topologie de la fonction filtre considérée
- 4 sa robustesse face au choix de la fonction filtre
- 5 ce critère n'a pas besoin de recourir à l'utilisation d'isosurfaces pour visualiser les tourbillons. En effet, l'invariant topologique utilisé comme indicateur de l'existence de tourbillons est directement caractérisé par des surfaces fermées
- 6 ce critère peut-être utilisé pour quantifier le détachement des tourbillons

Détection de dommages dans les ponts

- La surveillance de l'état des structures est importante dans de nombreux domaines
 - ▶ Maintenance de la structure, assurer la sécurité des usagers, ...

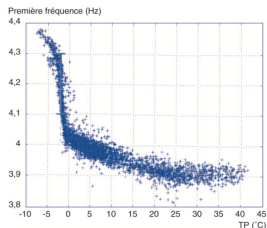
- Diagnostic d'endommagement
 - ▶ **Approche classique** : utiliser les réponses vibratoires de la structure
 - ▶ **L'idée de base** : les paramètres modaux (fréquences, amortissements modaux, déformées modales, ...) dépendent des propriétés physiques de la structure

- Plusieurs méthodes : à base des fréquences naturelles, à base des déformées modales, ...

- **Limites** :
 - ▶ sensibilité des paramètres modaux aux variations climatiques
 - ▶ Les fréquences modales sont une propriété globale de la structure (pas forcément bien adaptées pour localiser spatialement les défauts)
 - ▶ Un dommage peut être détecté à tort ou non détecté



Z24 Benchmark. Pont en béton situé dans le canton de Berne en Suisse

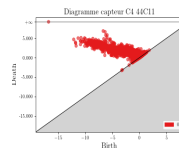
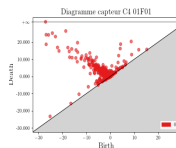
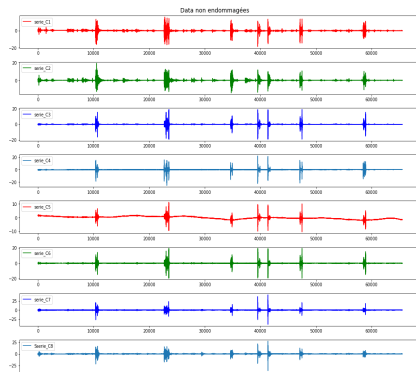


Variation de près de 10% sur la première fréquence pour une variation thermique allant de -5°C à 35°C

Détection de dommages par homologie persistante (étude préliminaire)

Application au pont Z24

- L'idée de base : les endommagements dans une structure ont des effets sur la topologie des mesures vibratoires
 - Les réponses vibratoires considérées seront des séries temporelles obtenues par de capteurs placés sur la structure
 - L'intervalle de persistance associée à chaque série, sera « la caractéristique » utilisée pour classifier les données
 - La méthode de classification proposée sera fondée sur la notion de barycentre de Karcher dans l'espace diagramme de persistante



Série non endommagée

Série endommagée

Détection de dommages par homologie persistante

Application au pont Z24

- Nous considérons un ensemble d'entraînement de taille 300
- Pour chaque série nous calculons son diagramme de persistance
- Le barycentre Karcher de chaque classe série est calculé
- Une nouvelle série sera classifiée selon la distance de son DP aux barycentres

Capteur	Taux de réussite
C ₁	63.5 %
C ₂	63.5 %
C ₃	66 %
C ₄	91 %
C ₅	72 %
C ₆	69 %
C ₇	77 %
C ₈	76 %

Ensemble test de taille 200

Capteur	Taux de réussite
C ₁	65 %
C ₂	70.7 %
C ₃	60.5 %
C ₄	90 %
C ₅	71.6 %
C ₆	67 %
C ₇	79.7 %
C ₈	74.5 %

Ensemble test de taille 400

Conclusions et perspectives sur la détection de dommage par homologie persistante

- Dans le cas du pont Z24 la détection de dommages en utilisant la caractéristique DP, atteint un taux de réussite de 90%
- A partir de réponses vibratoire est-il possible de définir une fonction filtre qui traduit la perte de rigidité comme un invariant topologique ?
- Prendre en compte la température dans la définition de la fonction filtre

Merci pour votre attention