Approche hamiltonienne pour la construction d'intégrateurs stables en temps long en mécanique des fluides incompressibles bi-dimensionnels sur la sphère

Oscar Cosserat

Göttingen Mathematische Institut

IRCAM, Mai 2024

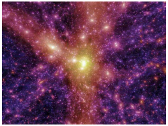
Équations hamiltoniennes en mécanique

Intégrateurs symplectiques

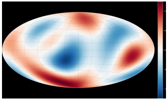
Intégrateurs hamiltoniens de Poisson

Modèle de Zeitlin

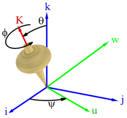
Exemples d'équations hamiltoniennes en mécanique



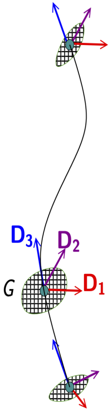
EDO : Problème à *n* corps



EDP : Équation d'Euler



EDO : Mouvement d'une toupie



EDP : poutre de Cosserat

Structure de Poisson

Definition

Dans $\mathbb{R}^n$, une structure de Poisson est un champ de matrices anti-symétriques π : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow so(n) \\ x \longrightarrow \pi(x) \end{array}$ vérifiant la relation de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

où

$$\{f, g\}(x) = \nabla_x f^T . \pi(x) . \nabla_x g$$

est le *crochet de Poisson* des fonctions f et g.

Remarque

On peut définir une structure de Poisson par son champ de matrices π *ou par ses crochets* $\{., .\}$.

Équations hamiltoniennes

À tout hamiltonien est associé un système dynamique de la façon suivante.

Definition

L'équation différentielle hamiltonienne d'un hamiltonien

$$H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

est

$$\dot{x} = \pi(x) \cdot \nabla_x H.$$

On note

$$\Phi_t^H$$

le flot associé au hamiltonien H.

Exemples d'équations hamiltoniennes

	structure de Poisson π	Hamiltonien H
Pb à n corps	$\pi = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$	énergies cinétique + potentielle
Solide rigide	$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$	$< x, I \cdot x >$
Euler incompressible sur $\mathbb{S}^2$	$\int_{\mathbb{S}^2} w\{\delta f, \delta g\}$	$\int_{\mathbb{S}^2} < w, \triangle^{-1} w >$

Pour la poutre de Cosserat : travail en cours avec Loïc Le Marrec.

Morphismes de Poisson

Definition

Entre deux structures de Poisson $(\mathbb{R}^n, \pi_1)$ et $(\mathbb{R}^m, \pi_2)$,

$$\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

est un morphisme de Poisson si

$$\nabla_x \alpha^T \cdot \pi_1(x) \cdot \nabla_x \alpha = \pi_2(\alpha(x)).$$

Définition

On définit un intégrateur par une famille : $\varphi_{\Delta t} : x_n \mapsto x_{n+1}$ dépendant du pas de temps Δt.

Definition

Dans l'espace $\{(q,p)\}$ des positions-impulsions, un intégrateur $\varphi_{\Delta t}$ est dit **symplectique** si c'est un morphisme de Poisson pour la structure de Poisson $\pi(q,p) = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} := J$.

Les intégrateurs symplectiques servent en astrophysique, en dynamique moléculaire, en optique...

Théorème de stabilité en temps long

Théorème (Benettin et Giorgilli, 1994)

Soit $\varphi_{\Delta t}$ *un intégrateur symplectique d'ordre s pour un hamiltonien* H. Sous de bonnes hypothèses, *il existe un hamiltonien* $H_{\Delta t} = H + O((\Delta t)^s)$ *tel que*[1] *pour tout* $\Delta t \leq \epsilon^*$, *si* $k \leq \frac{1}{\Delta t}$,

1. $$\|\Phi^{H_{\Delta t}}_{k\Delta t} - (\varphi_{\Delta t})^k\| \leq \exp(-\frac{\epsilon^*}{\Delta t})$$

2. $$\|H_{\Delta t}(x_k) - H_{\Delta t}(x_0)\| \leq \exp(-\frac{\epsilon^*}{\Delta t})$$

[1] à constantes près

Exemples

Proposition (La méthode saute-mouton)

$$q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = (\Delta t)^2 f(q_n)$$

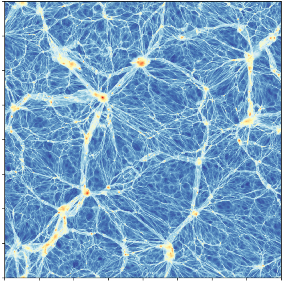
est un intégrateur symplectique pour l'EDO

$$\ddot{q} = f(q).$$

Les méthodes de Runge-Kutta symplectique (Euler symplectique, etc...) et les méthodes de splitting sont les deux grandes classes d'intégrateurs symplectiques de la littérature.

Application en astronomie

- Simulation Millennium du projet Virgo (2005) : problème à N corps pour $N \approx 10^10$ et la méthode saute-mouton
- "Large-scale dark matter simulations" (Angulo & Hahn, 2021) : review des simulations du problème à N corps. Les simulations les plus efficaces utilisent des intégrateurs symplectiques obtenus par splitting.



Champ de densité obtenu par une simulation de mécanique céleste à grande échelle

Définition

Definition (Intégrateur hamiltonien de Poisson)

Un intégrateur $\varphi_{\Delta t}$ est dit *hamiltonien de Poisson* s'il est le flot d'une équation hamiltonienne non-autonome.

Remarque

Une équation hamiltonienne non-autonome est une équation hamiltonienne pour laquelle le hamiltonien dépend du temps : $\dot{x} = \pi(x) \cdot \nabla_x H_t$.

Pourquoi ?

Proposition

Tout intégrateur **symplectique** *est un cas particulier d'intégrateur* **hamiltonien de Poisson**.

Par ailleurs[2] :

1. c'est la bonne généralisation des intégrateurs symplectiques aux structures de Poisson générales
2. j'en ai trouvé pleins

Théorème (C., non publié)

Pour les intégrateurs hamiltoniens de Poisson, les mêmes estimées en temps long existent que pour les intégrateurs symplectiques.

[2] voir "Theory and Construction of Structure-preserving Numerical Methods in Poisson Geometry", C., 2023

Exemple

Proposition

Sur l'algèbre des matrices anti-hermitiennes de taille n $su(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}, A^\dagger = -A\}$, *pour tout endomorphisme* $u\colon su(n) \to (n)$, *l'équation*

$$\dot{A} = [A, u(A)]$$

est hamiltonienne pour H *et* $\{.,.\}$ *donnés par*

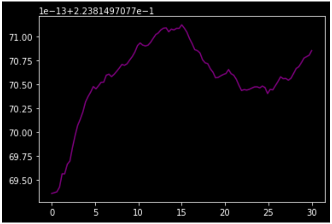
$$H(A) = < A, u(A) >$$

et

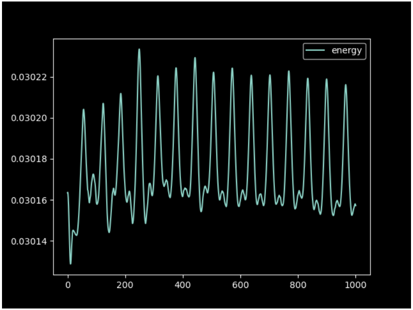
$$\{f, g\}(A) = < A, [\nabla_A f, \nabla_A g] > .$$

Simulations numériques

Pour un endomorphisme $u = \triangle_n^{-1}$ particulier et un intégrateur hamiltonien de Poisson à l'ordre 1 :



Préservation d'un Casimir : $n = 30$, $T = 60$, $\Delta T = 10^{-2}$



Préservation du hamiltonien : $n = 256$, $T = 1000$, $\Delta T = 1$

Figure: La trajectoire discrète oscille autour de la solution continue

Équation d'Euler sur $\mathbb{S}^2$

L'équation d'Euler en vitesse eulerienne sur $\mathbb{S}^2$ est :

$$\begin{cases} \dot{u} + \nabla_u u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases}$$

et se reformule en vorticité par :

$$\begin{cases} \dot{\omega} + \{\psi, \omega\}_{\mathbb{S}^2} = 0 \\ \triangle\psi = \omega \end{cases}, \tag{1}$$

où

- $\triangle$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami
- $\{.,.\}_{\mathbb{S}^2}$ sont donnés par la forme symplectique sur la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$

Euler est une EDP hamiltonienne

Proposition (Arnol'd)

L'équation d'Euler est hamiltonienne pour

$$H(\omega) = \int_{\mathbb{S}^2} \omega.\psi$$

et

$$\{F, G\}(\omega) = \int_{\mathbb{S}^2} \omega.\{\delta F, \delta G\}_{\mathbb{S}^2}(\omega).$$

Question

Comment utiliser cette structure hamiltonienne pour fabriquer des méthodes numériques aussi stables en temps longs que celles obtenues en dimension finie ?

Idée

Idée : Remplacer la structure de hamiltonienne de dimension infinie par une structure hamiltonienne de dimension finie, sur laquelle on applique un intégrateur hamiltonien de Poisson.

Remarque

Mais on ne connaît pas en général de **sous-algèbres de Poisson de dimension finie** *capturant asymptotiquement la géométrie du système dynamique.*

Exemple

Korteweg-de Vries périodique et l'algèbre de Virasoro

Meilleure idée : le modèle de Zeitlin

- Procédure de projection de l'EDP hamiltonienne sur une équation hamiltonienne de **grande dimension**

$$\dot{\omega} = \{\triangle^{-1}\omega, \omega\} \text{ dans } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2) \rightsquigarrow \dot{W} = [\triangle_n^{-1} W, W] \text{ dans } su(n)$$

Euler	Zeitlin
vorticité $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$	matrice de vorticité $W \in su(n)$
fonction de courant $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2)$	matrice de courant $P \in su(n)$
Laplacien $\triangle \colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^2) \circlearrowleft$	Laplacien discret $\triangle_n^{-1} \colon su(n) \circlearrowleft$
Hamiltonien $H(\omega) = \int_{\mathbb{S}^2} \omega\psi$	hamiltonien $H_n(W) = \mathrm{Tr}(WP)$
Casimirs $C_k = \int_{\mathbb{S}^2} \omega^k$	Casimirs $C_k^n = \mathrm{Tr}(W^k)$
$\omega\left(\omega^{-1}(\{x\})\right)$	valeurs propres de W
niveaux de ω	espaces propres de W

Résultats de convergence

Théorème (Zeitlin quand $n \to \infty \simeq$ Euler)

- $\|\omega\|_\infty - \frac{C}{n} \leq \|W_n\| \leq \|\omega\|_\infty$. *Plus généralement,* $\lim_{n\to\infty} C_k^n = C_k$.
- *Convergence du hamiltonien :* $\lim_{n\to\infty} H_n(W) = H(\omega)$

Remarque

La convergence n'est **pas** *une convergence de trajectoire quand* $n \to \infty$.

Simulation numérique

2 idées

Simulations en temps long remplacer la sphère par une surface de Riemann quelconque (ellipse...)

Cascades d'énergie de Kolmogorov en mécanique des fluides compressible. Comparaison avec la DEC ?