

Filtrage numérique et industrie de la navigation

Silvère Bonnabel
Journées du GDR GDM
Jeudi 21 nov 2023
IRCAM



Filtrage numérique et industrie de la navigation

Collaborateurs scientifiques pour les travaux présentés



Axel Barrau



Martin Brossard



Paul Chauchat



Marion Pilté



Martin Barczyk



Pierre Rouchon



Philippe Martin



Erwan Salaün

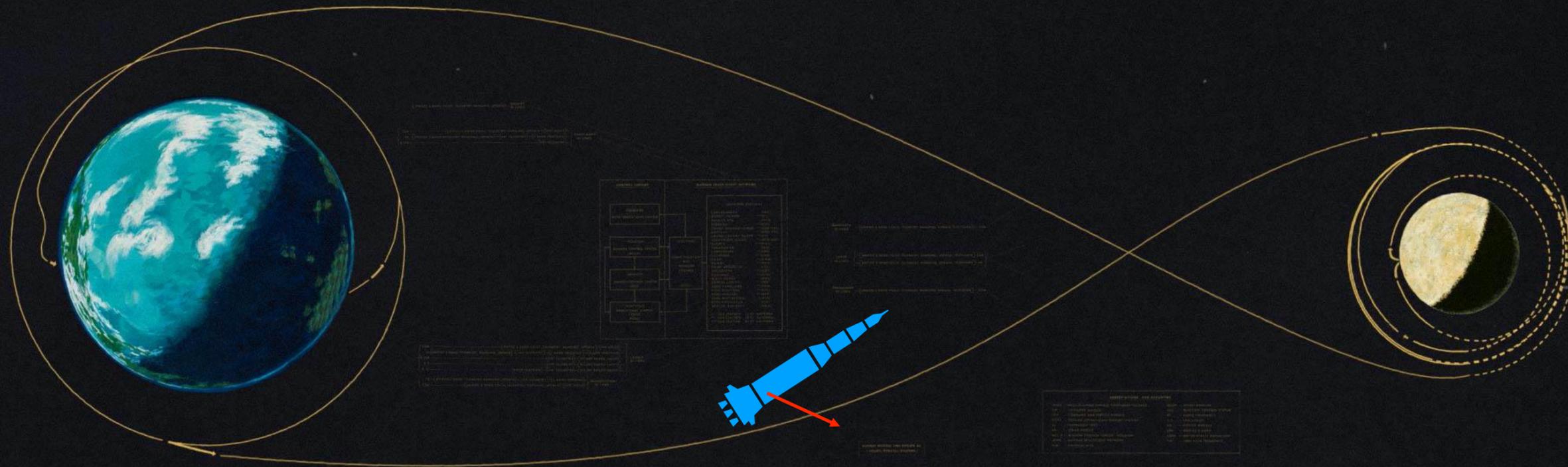
+ ingénieurs SAGEM / Safran
Electronics & Defense



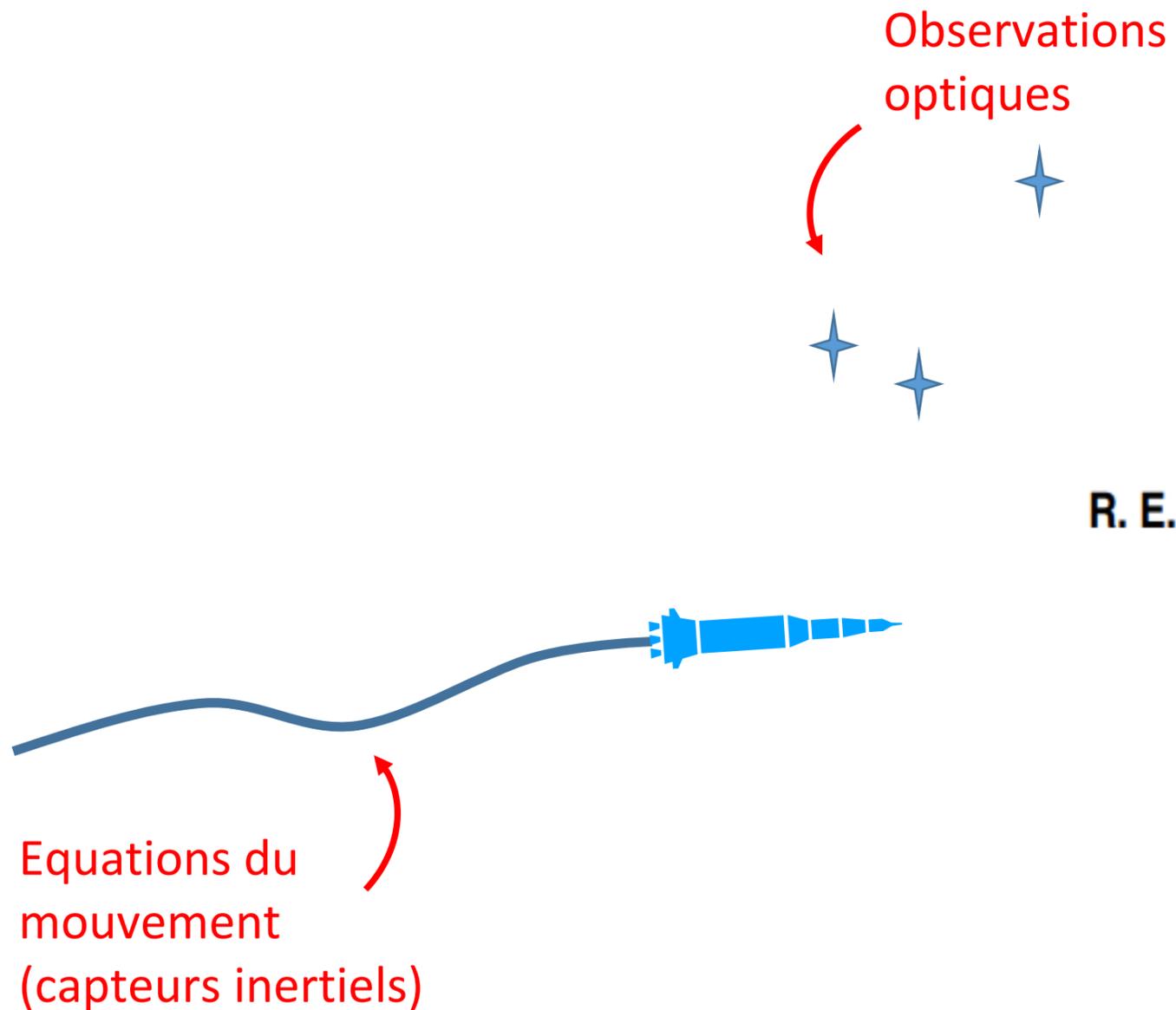
Merci !

Un vieux problème technologique

- Fin des années 50, études de faisabilité d'une mission lunaire
- Un des verrous : guidage, navigation, contrôle



Navigation spatiale



Comment intégrer en temps réel
une observation (filtrage) ?

1960
R. E. KALMAN

**A New Approach to Linear Filtering
and Prediction Problems¹**

Comment intégrer en temps réel
une observation (optique) ?



Etat = position, vitesse, orientation

$$p(\mathbf{X}) = \mathcal{N}(\mu, \mathbf{P})$$

✦ Observation

$$\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) + V$$



Correction

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \approx \mathcal{N}(\mu^+, \mathbf{P}^+)$$

Nécessite de propager
l'incertitude entre 2 observations
= cet exposé

Equations non-linéaires

- Dynamique non-linéaire de la navigation
- Comment propager l'incertitude ?

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = f(\mathbf{X}_n) = f(\mu_n + \xi_n) \approx \mu_{n+1} + \mathbf{J}_f(\mu_n)\xi_n$$

$$\Rightarrow \xi_{n+1} \approx \mathcal{N}(0, \mathbf{J}_f(\mu_n)\mathbf{P}_n\mathbf{J}_f(\mu_n)^T)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{C}_b^n$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^k + \dots + (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{v}_{eb}^n$$

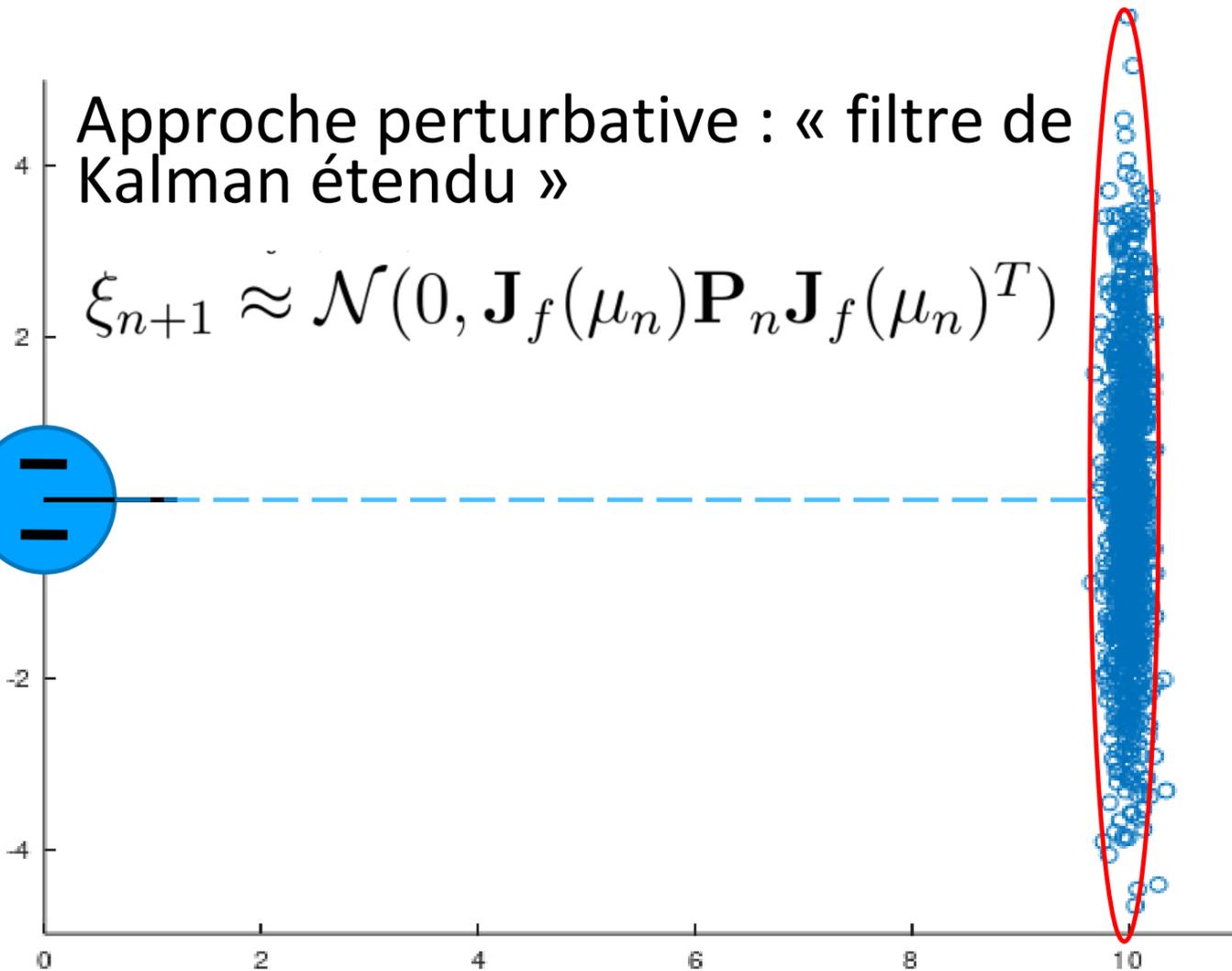
$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

Approche perturbative (NASA) : « filtre de Kalman étendu »

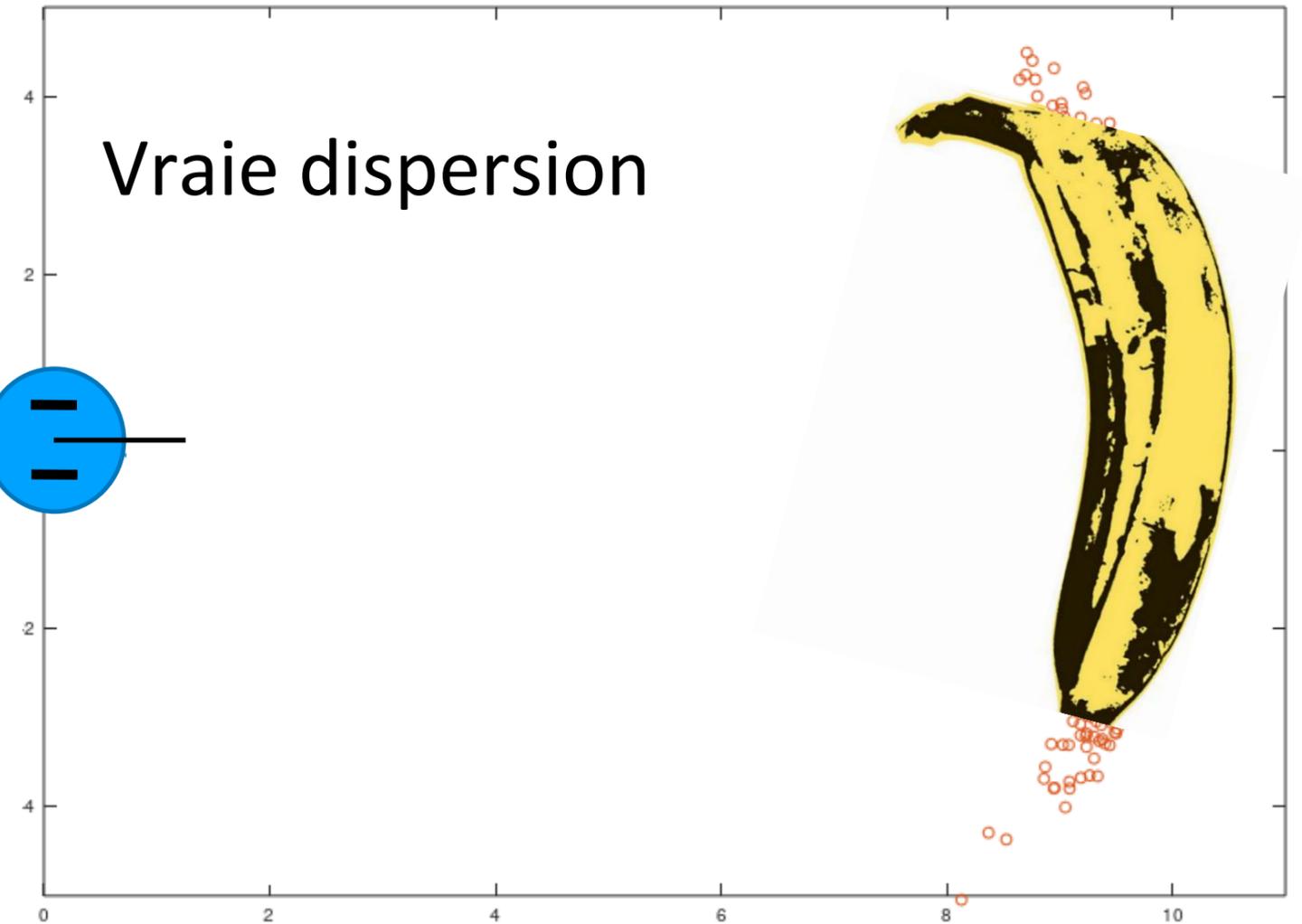
Propagation d'une erreur (gaussienne) de cap

Approche perturbative : « filtre de Kalman étendu »

$$\xi_{n+1} \approx \mathcal{N}(0, \mathbf{J}_f(\mu_n) \mathbf{P}_n \mathbf{J}_f(\mu_n)^T)$$

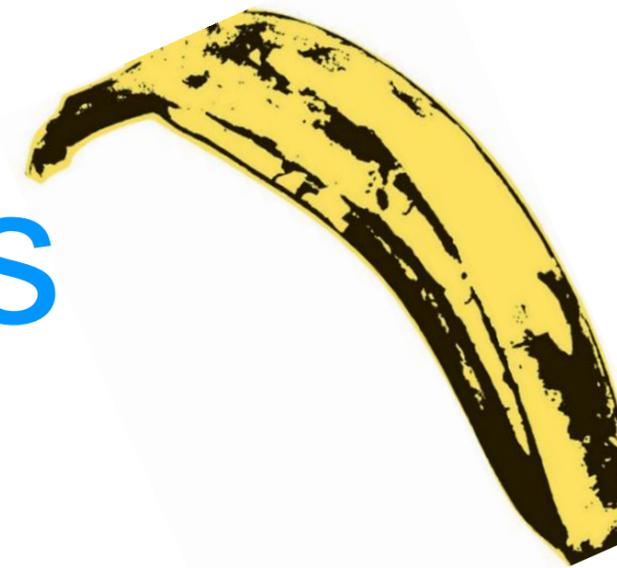


Vraie dispersion

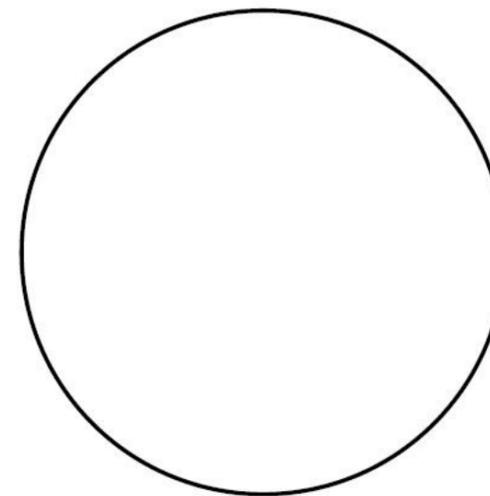
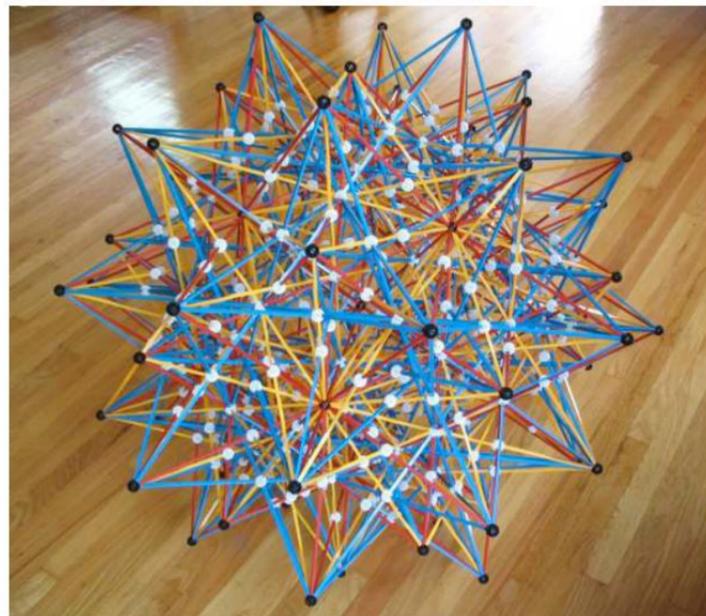


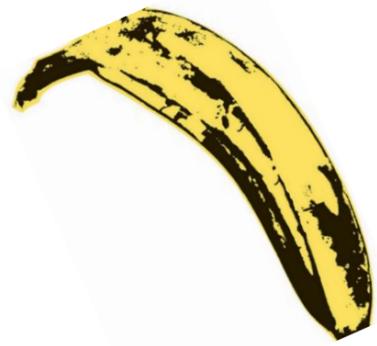
Long, A. W., Wolfe, K. C., Mashner, M. J., & Chirikjian, G. S. **The banana distribution is Gaussian**: A localization study with exponential coordinates. *Robotics: Science and Systems (RSS)*. 2013.

Explications



- Notion de groupe de Lie, en l'honneur de Sophus Lie (1842-1899)
- Groupe discret (cristallographie)
- Groupe continu (ex : toutes les rotations)





Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal = orientation uniquement

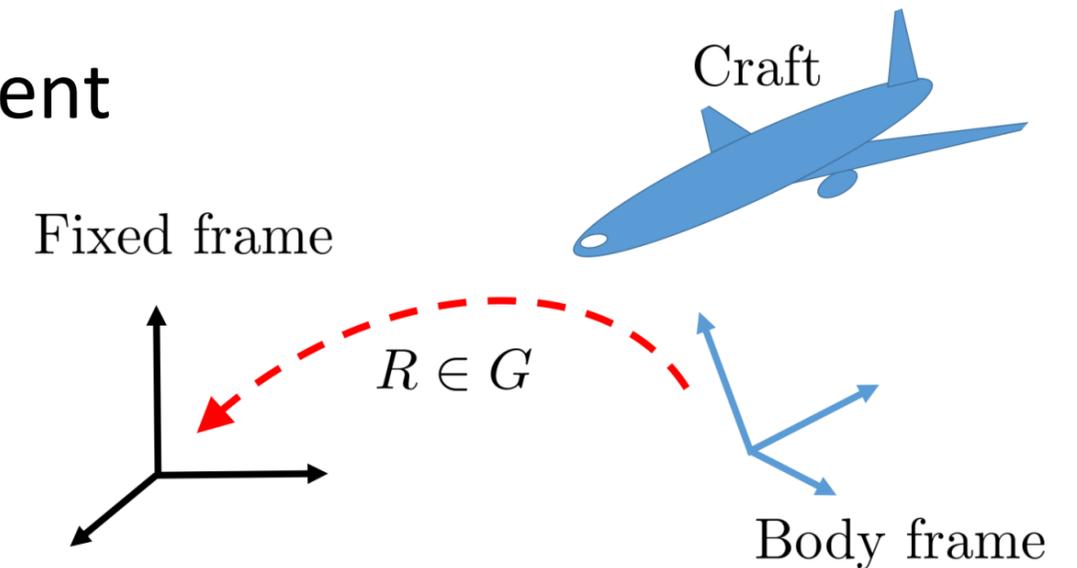
$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1 \}$$

- Dynamique non-linéaire (SO(3) n'est pas un EV)

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$
$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$(\xi)_\times b := \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Petite
rotation
aléatoire

Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

$$\mu \exp[(\xi)_{\times}] \Omega = \mu \left[\sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_{\times}^k \right] \Omega$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

$$\xi \times \Omega b = \Omega (\Omega^{-1} \xi \times b) \Rightarrow (\xi)_{\times} \Omega = \Omega [(\Omega^{-1} \xi)_{\times}]$$

$$[(\xi)_{\times}] [(\xi)_{\times}] \Omega = [(\xi)_{\times}] \Omega [(\Omega^{-1} \xi)_{\times}] = \Omega [(\Omega^{-1} \xi)_{\times}]^2$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

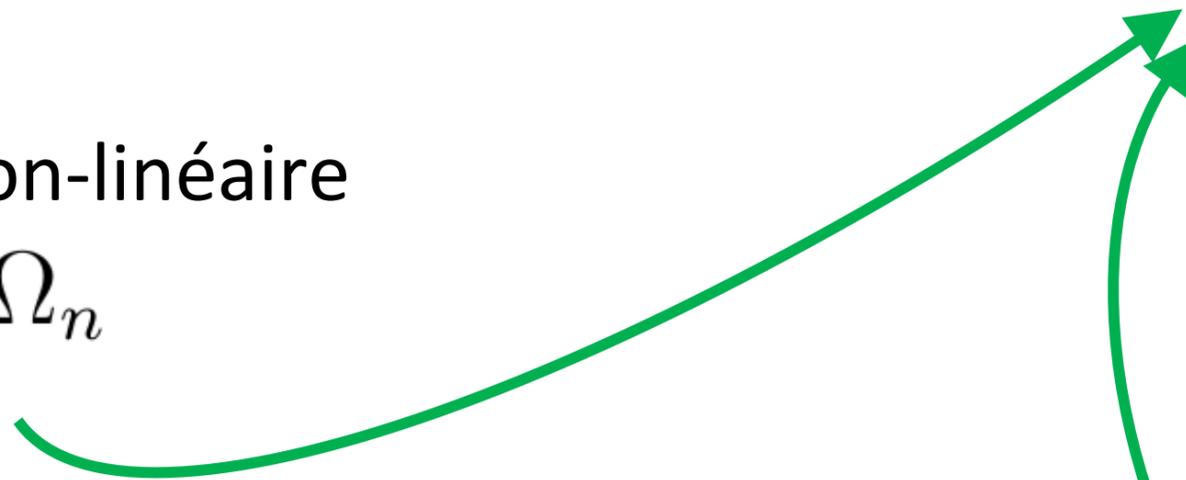


$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_\times] \Omega = \mu \left[\sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_\times^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_\times]^k \Omega = \Omega (\Omega^{-1} \xi)_\times^k$$



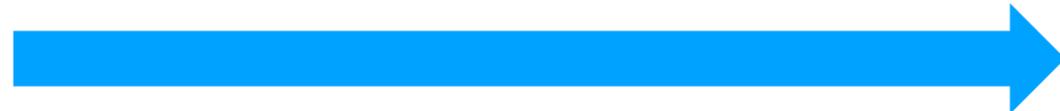
Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$



$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_{\times}] \Omega = \mu \left[\sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_{\times}^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_{\times}]^k \Omega = \Omega (\Omega^{-1} \xi)_{\times}^k$$

$$\mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}] \Omega_n = (\mu_n \Omega_n) \exp[(\Omega_n^{-1} \xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_{n+1} = \Omega_n^{-1} \xi_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_{\times}]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1 \}$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

Propagation exacte !

$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_\times] \Omega = \mu \left[\sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_\times^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_\times]^k \Omega = \Omega (\Omega^{-1} \xi)_\times^k$$

$$\mu_n \exp[(\xi_n)_\times] \Omega_n = (\mu_n \Omega_n) \exp[(\Omega_n^{-1} \xi_n)_\times]$$

$$\xi_{n+1} = \Omega_n^{-1} \xi_n$$

Explications cas simple

- Groupe de Lie Spécial Orthogonal

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I_3, \det \mathbf{R} = 1\}$$

$$\mu_{n+1} := f(\mu_n)$$

- Dynamique non-linéaire

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \Omega_n$$

- Incertitudes

$$\mathbf{X}_n \approx \mu_n + \xi_n, \xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$



$$\mathbf{R}_n = \mu_n \exp[(\xi_n)_\times]$$

$$\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_n)$$

$$\mu \exp[(\xi)_\times] \Omega = \mu \left[\sum_k \frac{1}{k!} (\xi)_\times^k \right] \Omega$$

$$[(\xi)_\times]^k \Omega = (\Omega^{-1} \xi)_\times^k$$

$$\mu_n \exp[(\xi_n)_\times] \Omega_n = (\mu_n \Omega_n) \exp[(\Omega_n^{-1} \xi_n)_\times]$$

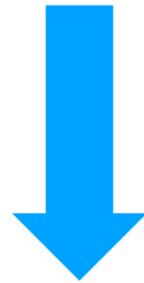
$$\xi_{n+1} = \Omega_n^{-1} \xi_n$$

$$\Rightarrow \xi_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \Omega_n^{-1} \mathbf{P}_n \Omega_n)$$

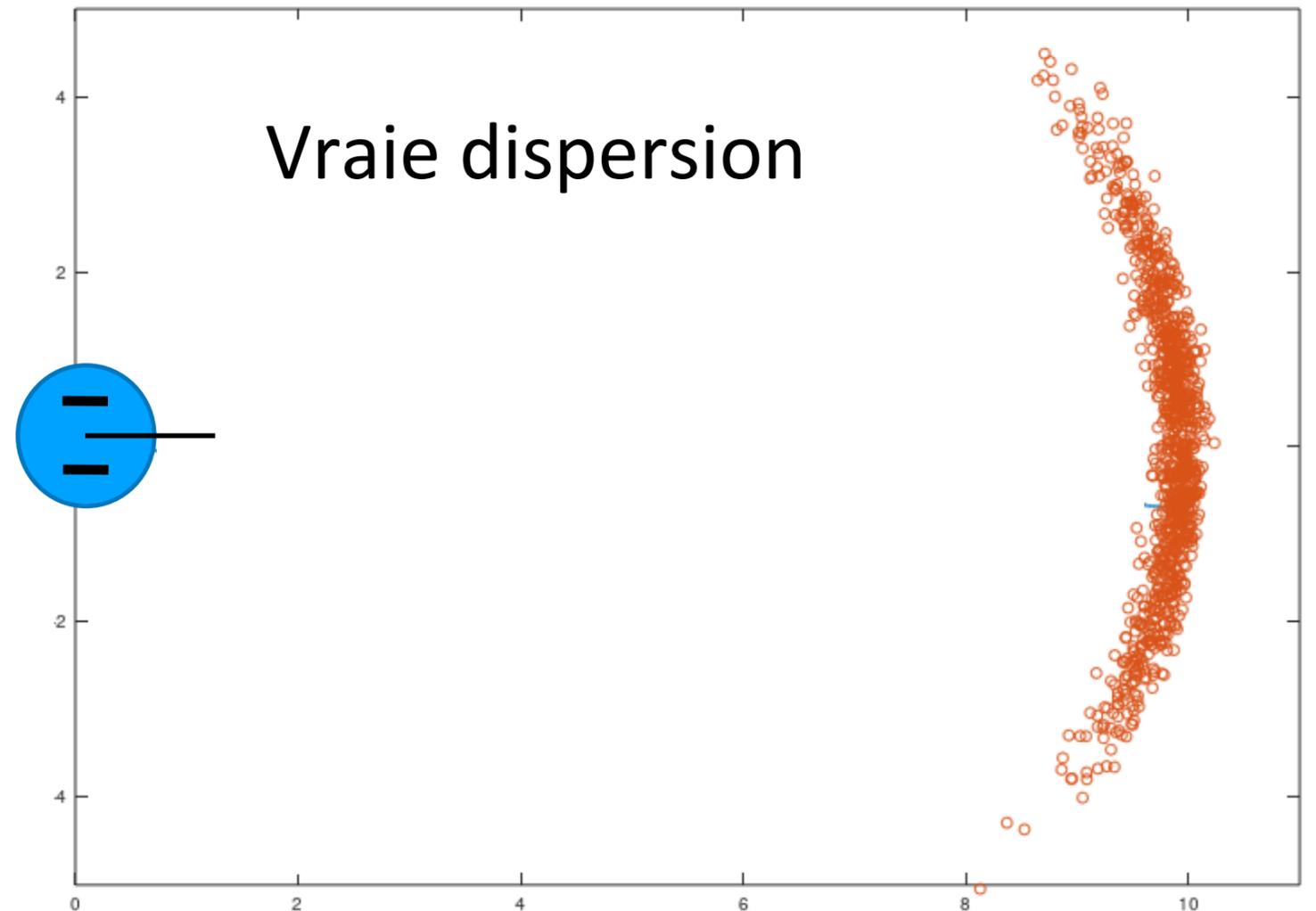
Propagation exacte !

Propagation d'une erreur (gaussienne) de cap

L'application exponentielle de SE(2) rend parfaitement compte de la dispersion observée



Barfoot, T. D., & Furgale, P. T. Associating uncertainty with three-dimensional poses for use in estimation problems. *IEEE Transactions on Robotics*. 2014.



Long, A. W., Wolfe, K. C., Mashner, M. J., & Chirikjian, G. S. **The banana distribution is Gaussian**: A localization study with exponential coordinates. *Robotics: Science and Systems (RSS)*. 2013.

Cas général (Barrau Bonnabel 2012-2016)

- On se place sur un groupe de Lie général et on définit les incertitudes via l'exponentielle
- On peut définir une large classe de dynamiques qui possèdent la propriété de propagation exacte et linéaire : la structure sous-jacente s'appuie sur les (auto) morphismes de groupe



Théorèmes classiques de correspondance groupe de Lie – algèbre de Lie

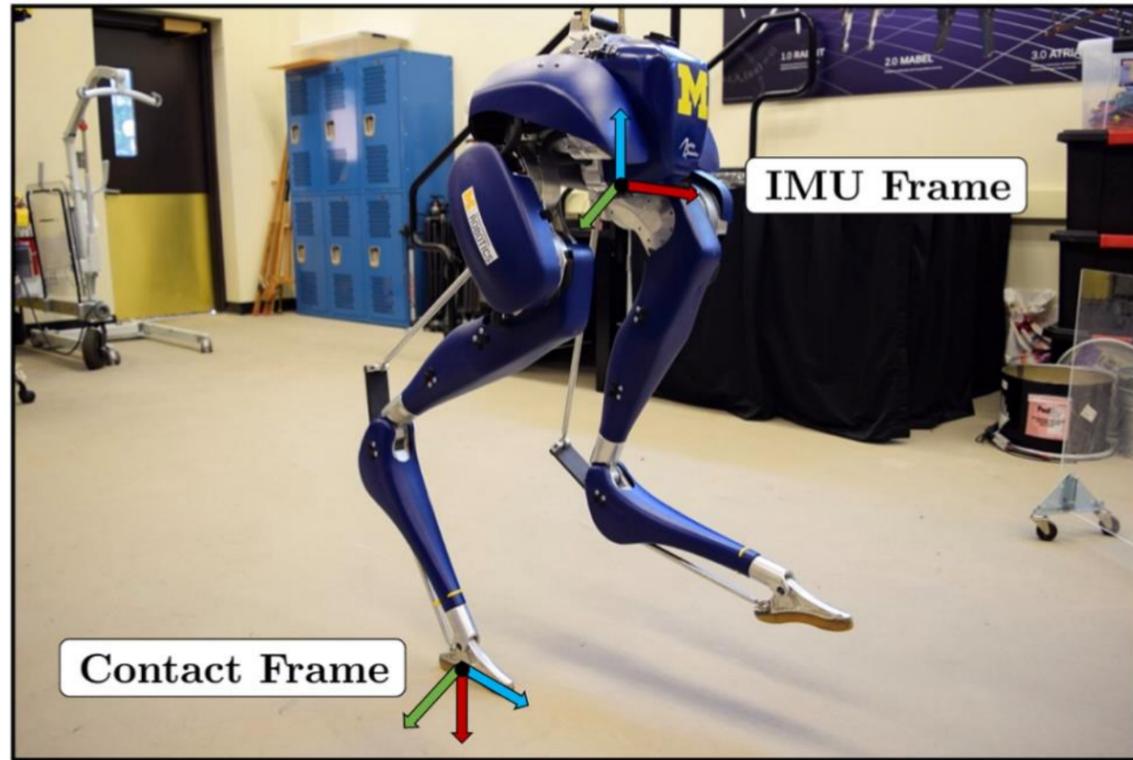
THEOREM 3.18. *Let G and H be matrix Lie groups, with Lie algebras \mathfrak{g} and \mathfrak{h} , respectively. Suppose that $\phi : G \rightarrow H$ be a Lie group homomorphism. Then there exists a unique real linear map $\tilde{\phi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ such that*

$$\phi(e^X) = e^{\tilde{\phi}(X)}$$

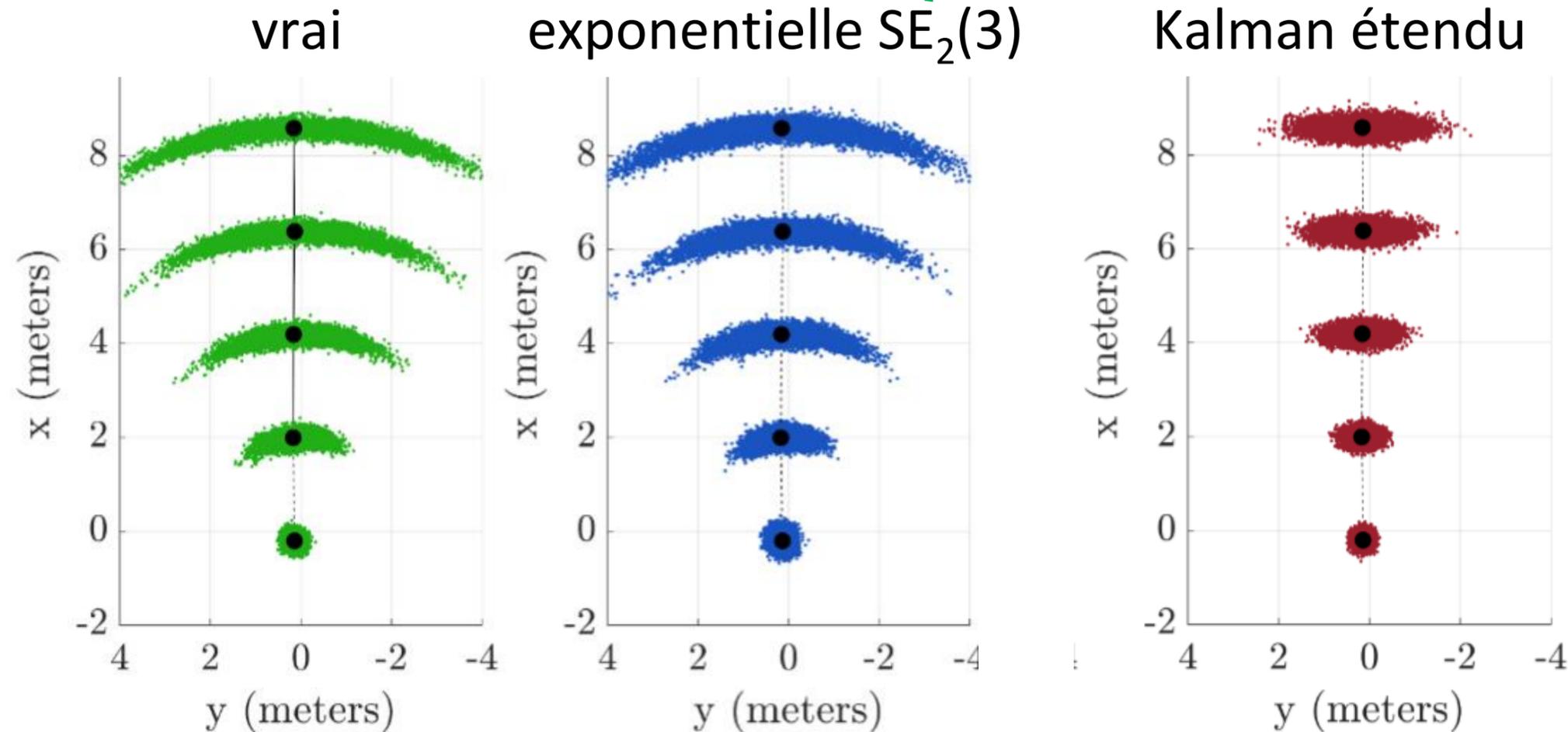
- Les équations de la navigation inertielle entrent dans ce cadre ! (en introduisant $SE_2(3)$)

Illustration robot bipède

- Illustration par U-Michigan de notre théorie : explique la forme « banane » sur un exemple plus compliqué

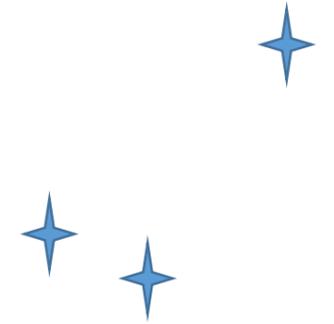


Barrau, A., & Bonnabel, S. The invariant extended Kalman filter as a stable observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016

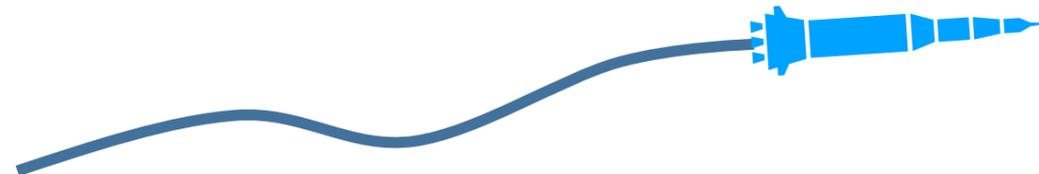


Ross Hartley, Maani Ghaffari, Ryan M Eustice & Jessy W Grizzle. Contact-aided invariant extended Kalman filtering for robot state estimation. *The International Journal of Robotics Research*. 2020.

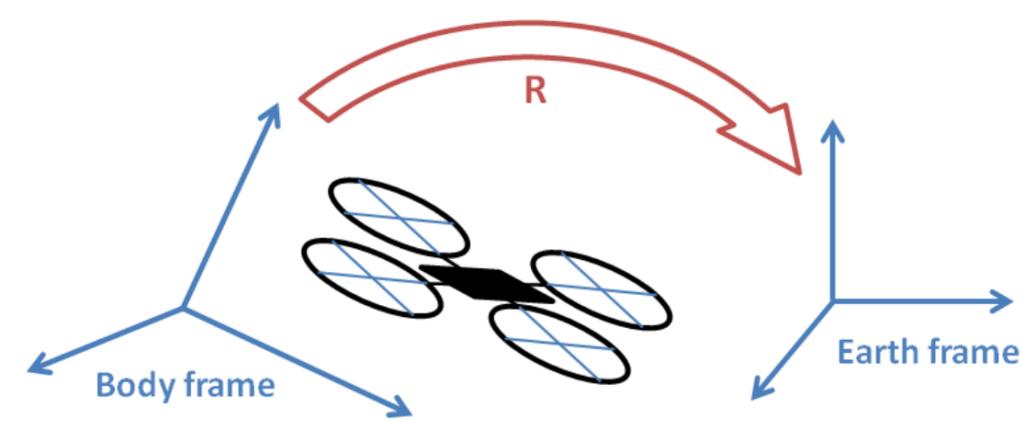
Et ensuite ?



- Il faut aussi incorporer les observations (une fois l'incertitude propagée) -> étape de correction
- La théorie du filtre de Kalman invariant englobe aussi les corrections et **utilise l'exponentielle pour les appliquer** -> propriétés fortes
- Nous présentons quelques résultats, mais avant un peu de bibliographie



Histoire des idées : groupes de Lie et contrôle



- **Premiers travaux en contrôle:** [Jurdjevic, Sussmann, 1972], [Bullo, Murray, 1999], [Morin, Samson, 2003]
- **Filtre complémentaire non linéaire sur $SO(3)$ & $SE(3)$:** [Mahony, Hamel, Pflimlin, 2005 & 2008], [Baldwin, R Mahony, J Trumpp, T Hamel, T Cheviron, 2007]
- **Obervateurs d'attitude non linéaires convergents:** [Sanyal, Lee, Leok, McClamroch, 2008], [Lageman, Trumpp, Mahony, 2009], [Vasconcelos, Cunha, Silvestre, Oliveira, 2010], [Hua, 2010], [Tayebi, McGilvray, Roberts, Moallem, 2007], [Batista, Silvestre, Oliveira, 2012], [Zlotnik, Forbes, 2018]
- **Observateurs invariants:** [Rouchon, Aghannan, 2002], [Bonnabel, Martin, Rouchon, 2008]
- **Premiers filtres de Kalman étendus invariants :** [Bonnabel, 2007], [Martin, Salaun, 2010], [Barczyk, Lynch, 2012]
- **Théorie « moderne » du filtrage invariant :** [Barrau, Bonnabel, 2016] voir prochain slide

Notre contribution



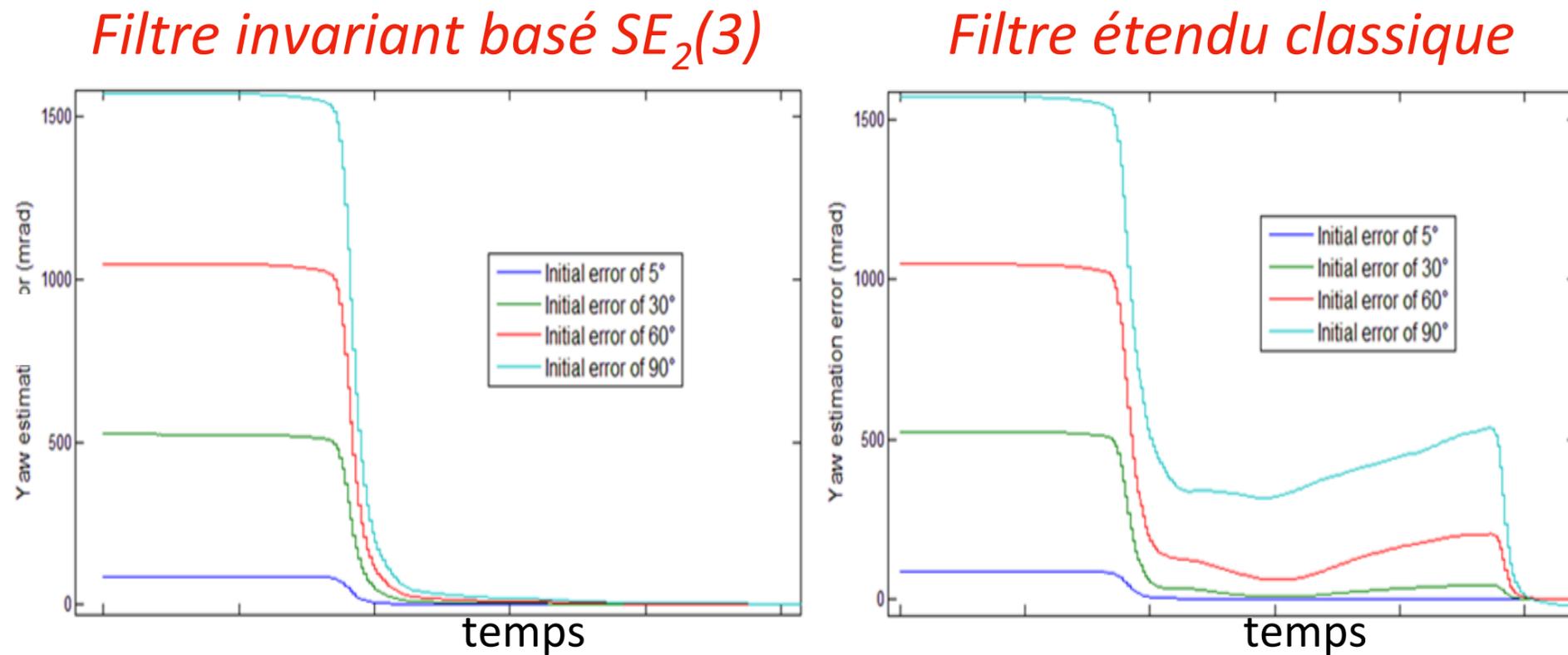
Axel Barrau

- 2011 : Safran Electronics & Defense (Sagem) lance des travaux communs, notamment une thèse
- Avec Axel Barrau pendant sa thèse (2012-2015) et depuis lors comme collègue nous développons les outils et la théorie

Invariant Kalman Filtering

Axel Barrau¹ and Silvère Bonnabel²

Erreur
d'estimation



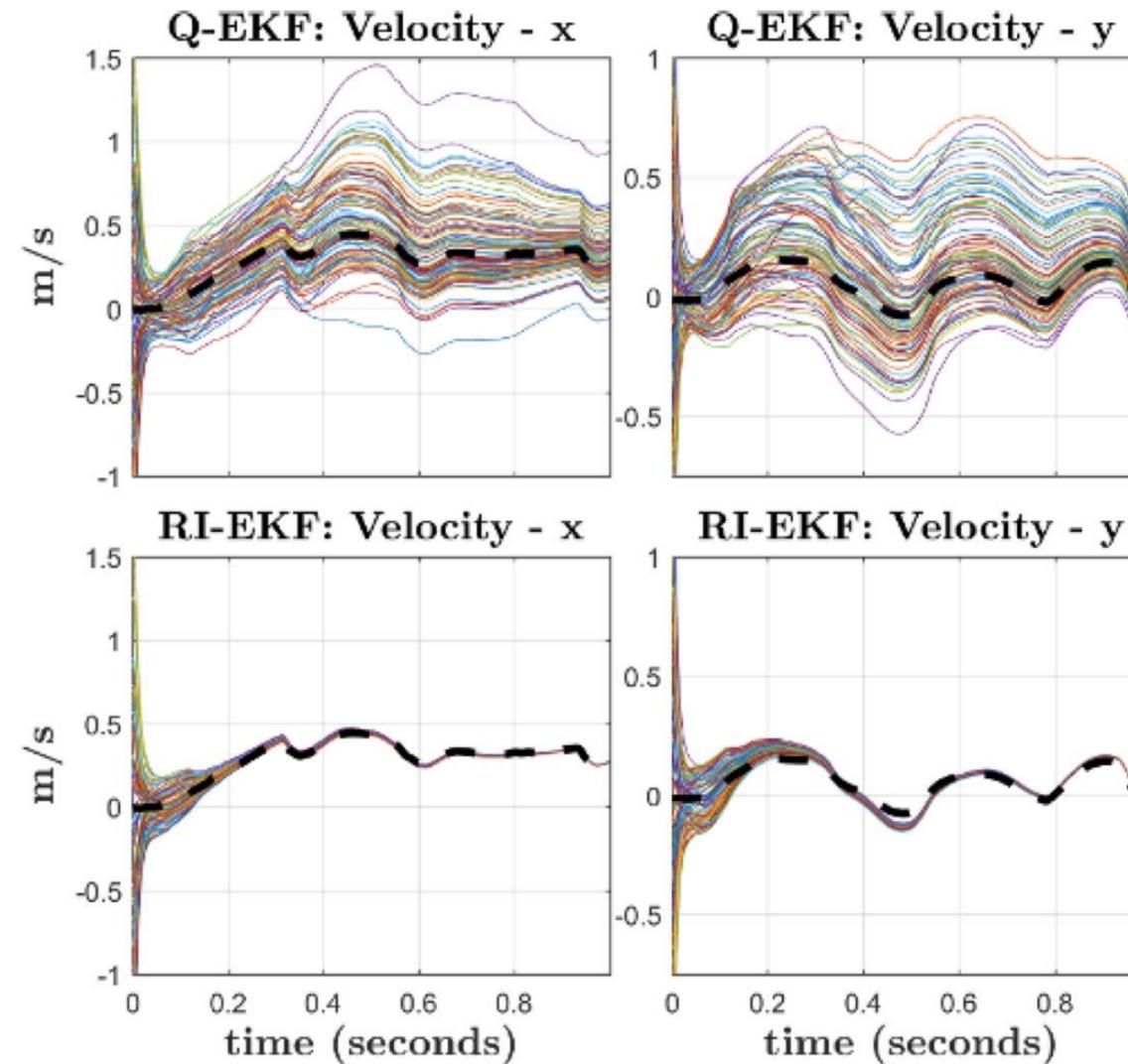
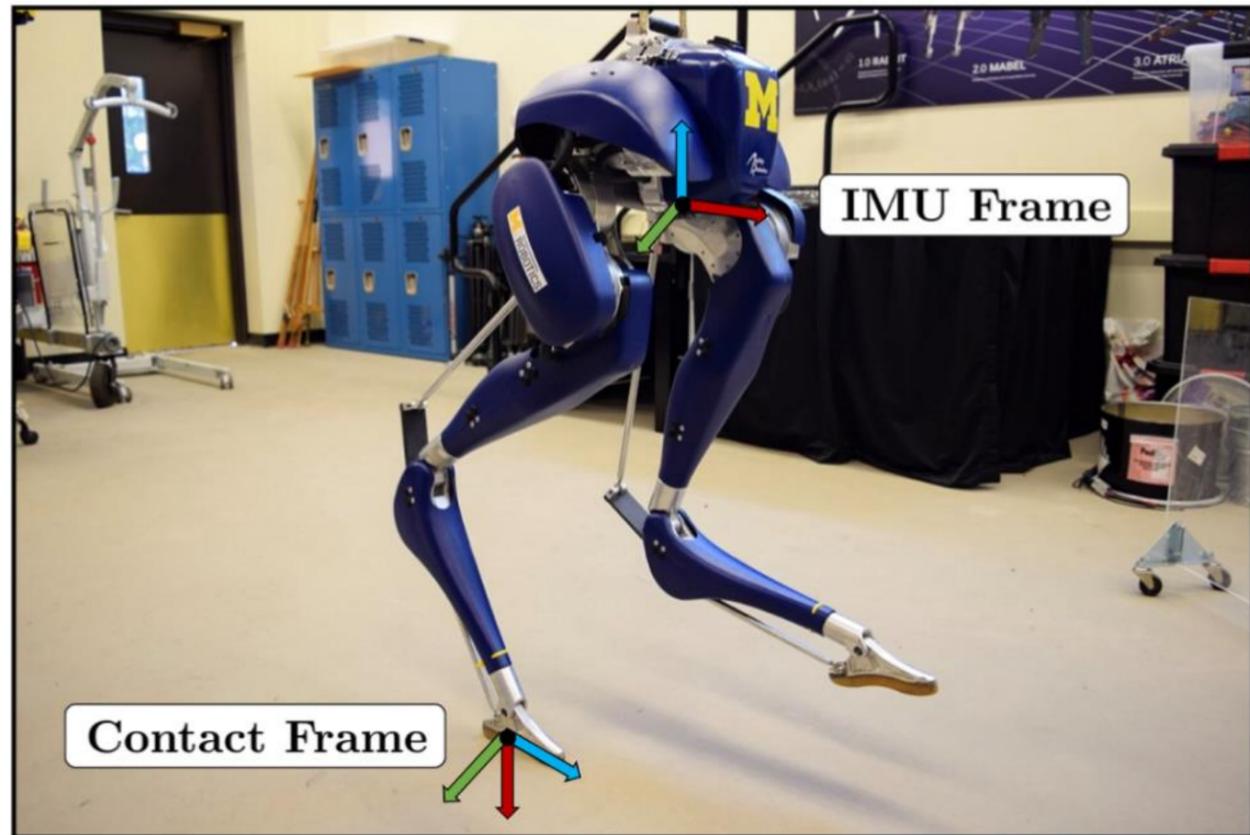
« Euroflir 410 »



 **SAFRAN**
ELECTRONICS & DEFENSE

...grâce à Axel Barrau et les ingénieurs de Safran...

Robot bipède (Université du Michigan)

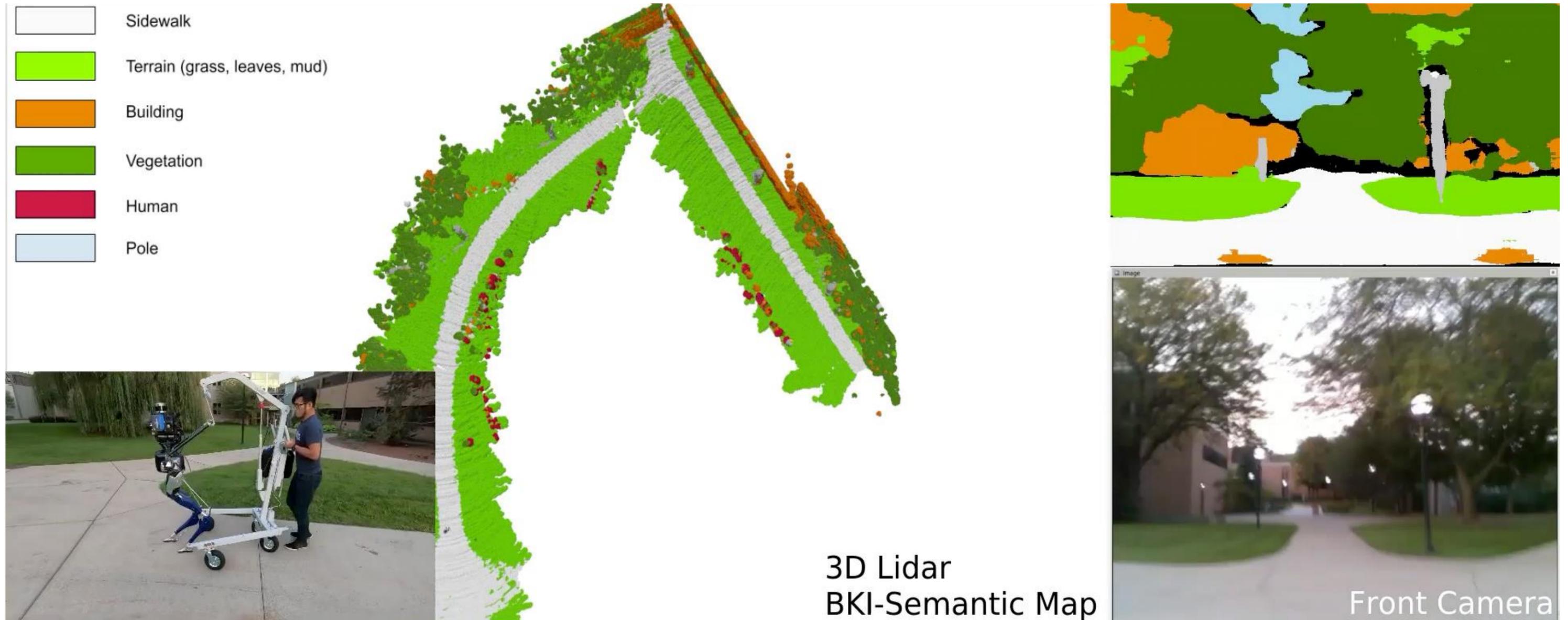


*Filtre de Kalman
étendu
classique*

*Notre filtre de
Kalman étendu
invariant*

Ross Hartley, Maani Ghaffari, Ryan M Eustice & Jessy W Grizzle. Contact-aided invariant extended Kalman filtering for robot state estimation. *The International Journal of Robotics Research*. 2020.

Robot bipède (Université du Michigan)



Conclusion

- Une théorie complète, avec des propriétés inattendues
- Fruit des « temps longs » caractéristiques de la science
- Largement alimentée par les problèmes et l'expertise de Safran
- Chanceux d'avoir eu un temps industriel « pas si long »
- De nombreuses perspectives

Perspectives / travaux liés

Exploiter la linéarité en coordonnées exp

e.g. Lavoie, Arsenault, Forbes. CDC 2019.
E Allak, Fornasier, Weiss, IROS 2020.

Propriétés de convergence

e.g. Wang, Tayebi. TAC. 2020.
e.g. check out the *equivariant/invariant observers* literature

Nouvelles structures de groupe rendant la dynamique automorphisme

e.g. Mahony, van Goor, Henein, Pike, Zhang, Ng, Equivariant visual odometry in the wild. CDC. 2020.

Combiner au machine learning

e.g. Brossard, Barrau, Bonnabel. AI-IMU dead reckoning. IEEE Trans. Int. Vehicles. 2020.

Robotique

e.g. Zhang, Wu, Song, Huang, Dissanayake. IEEE RAL 2017.
Teng, Mueller, Sreenath, 2021

Application au contrôle

e.g. Cohen, Abdulrahim, Forbes. IEEE RAL. 2020

Fusion inertie / vision

van Goor, Mahony, Hamel, Trumpf. CDC 2019.
e.g. Brossard, Bonnabel, Barrau, IROS 2018.

D'autres produits industriels