

SUR LES SENTIERS DE LA RELATIVITÉ

Richard Kerner

Sorbonne-Université , Paris, France

GDR - GDM,

IRCAM,

Paris

Le 20 Novembre 2024

Résumé

- ▶ **Mise en revue des idées et des théories menant à la Relativité Générale d'Einstein,**

Résumé

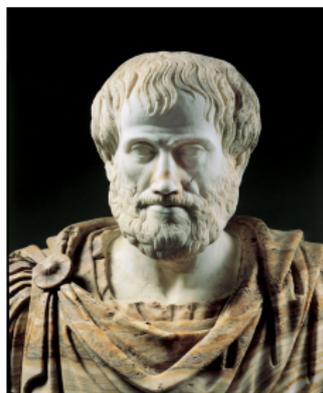
- ▶ Mise en revue des idées et des théories menant à la Relativité Générale d'Einstein,
- ▶ qui, tel un arbre fruitier, possèdent des racines très profondes et ramifiées.

Résumé

- ▶ Mise en revue des idées et des théories menant à la Relativité Générale d'Einstein,
- ▶ qui, tel un arbre fruitier, possèdent des racines très profondes et ramifiées.



Aristote et Galilée

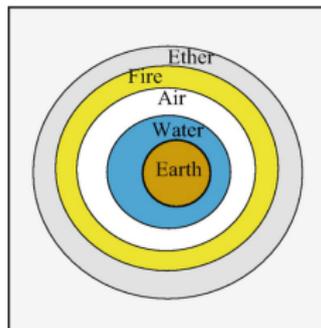
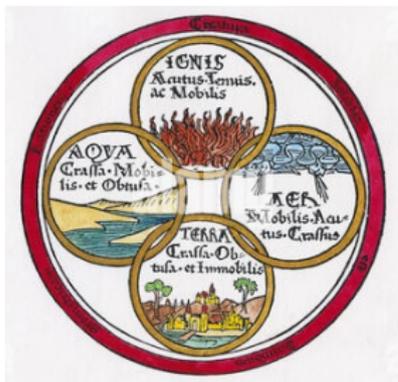


Aristote (−384 ~ −322) ,

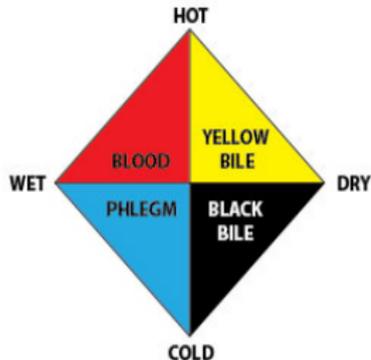
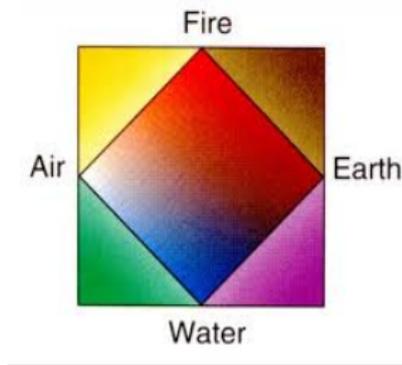


Galileo Galilei (1564 ~ 1642).

La physique d'Aristote



Selon **Aristote**, le monde matériel “sublunaire” était composé de 4 éléments, Le cinquième élément remplissait l’espace sidéral. Les quatre éléments ont été introduits avant par **Empédocle**.



Les quatre éléments présentait aussi quatre combinaisons de deux paires des qualités dichotomiques: sec ou humide, chaud ou froid. Les quatre “humeurs” dans le corps humain reproduisaient le même schéma.

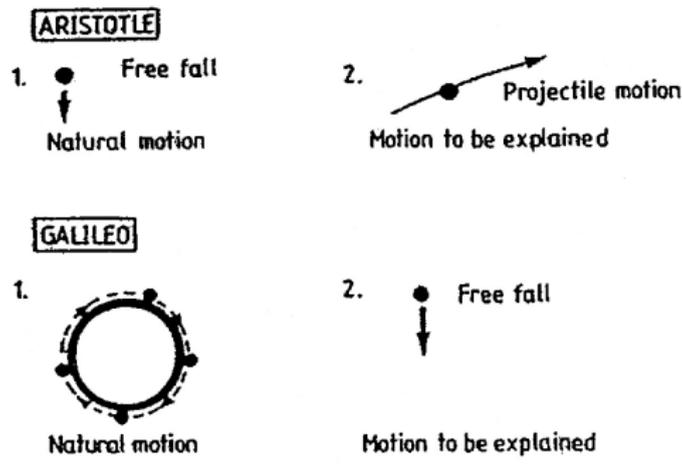
- ▶ **Les mouvements naturels sont verticaux:** les éléments légers (l'air et le feu) ont la tendance naturelle de monter, les éléments lourds (l'eau et la terre) ont la tendance d'aller vers le bas. La Terre est ronde, et son noyau doit être plus dense que la croûte.

- ▶ **Les mouvements naturels sont verticaux:** les éléments légers (l'air et le feu) ont la tendance naturelle de monter, les éléments lourds (l'eau et la terre) ont la tendance d'aller vers le bas. La Terre est ronde, et son noyau doit être plus dense que la croûte.
- ▶ L'eau, moins dense, entoure la Terre comme un manteau; l'air forme l'atmosphère au dessus, et le feu éternel remplit les strates supérieures. L'espace au-delà est rempli par le cinquième élément (la "quintessence" dans la traduction latine).

- ▶ Mouvements “naturels” trouvaient leur cause dans deux principes distincts: “**energeia**” et “**entelechia**”. Le premier étant inhérent à l’objet matériel, le second venant de l’extérieur.

- ▶ Mouvements “naturels” trouvaient leur cause dans deux principes distincts: “**energeia**” et “**entelechia**”. Le premier étant inhérent à l’objet matériel, le second venant de l’extérieur.
- ▶ Par exemple l’eau, dont le mouvement naturel était du haut vers le bas, était dotée de cette tendance de par sa nature; mais elle était aussi attirée par les masses aquatiques se trouvant plus bas, lui indiquant le sens dans lequel elle devait se diriger. De manière semblable, le feu et l’air étaient propulsés vers le haut.

- ▶ Mouvements “naturels” trouvaient leur cause dans deux principes distincts: “**energeia**” et “**entelechia**”. Le premier étant inhérent à l’objet matériel, le second venant de l’extérieur.
- ▶ Par exemple l’eau, dont le mouvement naturel était du haut vers le bas, était dotée de cette tendance de par sa nature; mais elle était aussi attirée par les masses aquatiques se trouvant plus bas, lui indiquant le sens dans lequel elle devait se diriger. De manière semblable, le feu et l’air étaient propulsés vers le haut.
- ▶ On trouvera un écho très lointain de ces divagations 20 siècles plus tard, avec deux notions de masse différentes: la masse gravitationnelle m_G (“active”) et la masse inertielle m_I (“inerte”).



On retiendra que, selon **Aristote**, la chute libre, étant un “mouvement naturel” se passe sans qu’une quelconque force ne soit appliquée. Ce sont les déviations de ce mouvement naturel qui nécessitent l’application d’une force supplémentaire.

La nature du mouvement



Mouvements d'une flèche selon Aristote

Selon Aristote, tout mouvement, aussi complexe soit-il, est la superposition de deux types de mouvement, mouvement rectiligne et mouvement circulaire,

- ▶ On attribue à Aristote l'idée selon laquelle les corps plus lourds tombent plus vite que les corps plus légers. Comme l'expérience quotidienne avec une boule de fer et une plume le montre de manière évidente.

- ▶ On attribue à Aristote l'idée selon laquelle les corps plus lourds tombent plus vite que les corps plus légers. Comme l'expérience quotidienne avec une boule de fer et une plume le montre de manière évidente.
- ▶ Ce que disait Aristote en réalité était plus subtil. **“Pendant la chute libre, la vitesse d'un corps est proportionnelle à sa densité, et inversement proportionnelle à la densité du milieu qui l'entoure”** En effet, une pierre tombe plus vite dans l'air que dans l'eau, comme chacun peut le constater.

- ▶ On attribue à Aristote l'idée selon laquelle les corps plus lourds tombent plus vite que les corps plus légers. Comme l'expérience quotidienne avec une boule de fer et une plume le montre de manière évidente.
- ▶ Ce que disait Aristote en réalité était plus subtil. **“Pendant la chute libre, la vitesse d'un corps est proportionnelle à sa densité, et inversement proportionnelle à la densité du milieu qui l'entoure”** En effet, une pierre tombe plus vite dans l'air que dans l'eau, comme chacun peut le constater.
- ▶ Une des conséquences de cette loi quantitative était la fameuse conclusion: **“La Nature ne supporte pas le vide”**. En effet, si la densité du milieu tend vers 0, la vitesse de la chute deviendrait infinie, ce qui est absurde (et jamais observé).

- ▶ Selon Galilée, le mouvement circulaire, plus précisément, la rotation uniforme, était naturel. Dont la preuve la plus éclatante était la rotation de la Terre autour de son axe et autour du Soleil, apparemment sans qu'aucune force extérieure ne soit appliquée (constat correct qu'à moitié...).

- ▶ Selon Galilée, le mouvement circulaire, plus précisément, la rotation uniforme, était naturel. Dont la preuve la plus éclatante était la rotation de la Terre autour de son axe et autour du Soleil, apparemment sans qu'aucune force extérieure ne soit appliquée (constat correct qu'à moitié...).
- ▶ Le mouvement de la Lune autour de la Terre et le mouvement de celle-ci autour du Soleil étaient supposés circulaires, avec des corrections dues aux autres mouvements circulaires nommées "épicycles".

Un des plus grands mérites de **Galilée** était l'introduction de la notion d'accélération. Avec les moyens du bord - sans calcul différentiel, évidemment.

Son raisonnement était simple: si la vitesse augmente linéairement avec le temps, la loi de mouvement en chute libre est alors

$$v = v_0 + gt$$

(y compris le cas de vitesse initiale $v_0 \neq 0$).

Dans le cas de vitesse constante, $v = V = \mathbf{Const.}$, le chemin parcouru pendant le temps t est égal à $D = Vt$.

Si la vitesse initiale en $t = 0$ était v_0 et la vitesse finale v_f , la vitesse moyenne serait alors

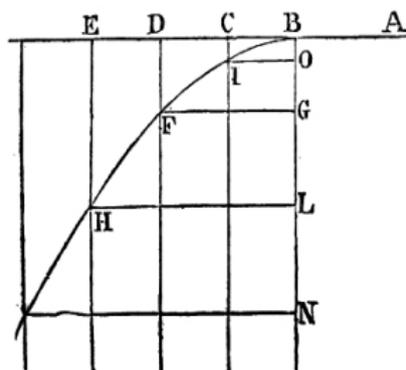
$$\langle V \rangle = \frac{v_0 + v_f}{2},$$

et le chemin parcouru au bout du temps t serait $d = \langle V \rangle t$.

Dans le cas d'une chute libre à partir de la hauteur h et avec la vitesse initiale nulle $v_0 = 0$, on pourra remplacer v_0 par 0 et v_f par gt , et la distance parcourue d par la hauteur initiale h , ce qui donnera

$$h = \langle V \rangle t = \frac{v_0 + v_f}{2} t = \frac{0 + gt}{2} t = \frac{gt^2}{2}.$$

(Il avait de la chance, car ce simple truc n'aurait pas marché avec autre loi que la loi linéaire).



Dessin original de Galilée expliquant la trajectoire parabolique

$$x = Vt, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}, \quad \rightarrow \quad y = h - \frac{g}{2V^2}x^2.$$

Relativité de Galilée

Considérons un corps matériel en mouvement, vu à partir d'un repère immobile R (il faut bien commencer par quelque chose!). Sa trajectoire est donnée par une fonction vectorielle du temps,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Soit R' un autre repère Cartésien, animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse constante \mathbf{V} par rapport au repère R . La position du même objet donné dans le repère R par $\mathbf{r}(t)$ est vue dans le repère R' comme $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$.

Vu à partir de deux repères R' et R , la vitesse de l'objet change aussi:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{V}.$$

- ▶ Lors de passage d'un repère galiléen à un autre, l'accélération reste la même:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{v} - \mathbf{V})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}.$$

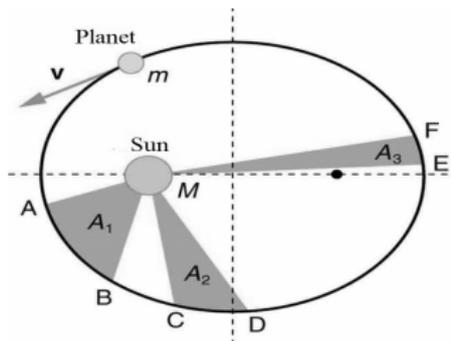
- ▶ Lors de passage d'un repère galiléen à un autre, l'accélération reste la même:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{v} - \mathbf{V})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}.$$

- ▶ Le groupe de Galilée contient les transformations gardant l'accélération invariante dans tous les repères Galiléens:

$$t' = t + \tau, \quad \mathbf{r}' = A\mathbf{r} + \mathbf{V}t + \mathbf{b}$$

où A est une rotation rigide en $3D$, \mathbf{V} une vitesse constante, \mathbf{b} une translation spatiale et τ une translation dans le temps.
Un groupe de Lie avec 10 paramètres.



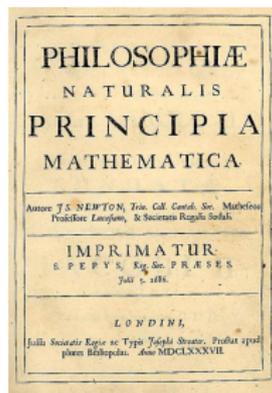
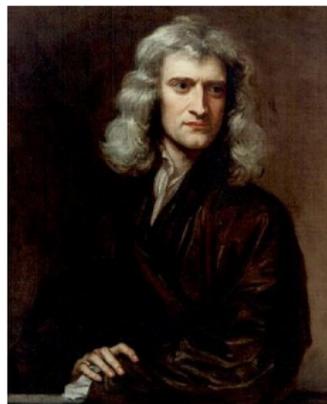
Johannes Kepler (1571 – 1630), l'un des plus grands savants de tous les temps. Ses lois de mouvement planétaire ont ouvert la voie à la théorie de la gravitation de Newton.

Voici les trois lois de mouvement planétaire découvertes par Kepler:

1) Les orbites sont des ellipses, le Soleil se trouvant dans un des foyers;

2) Le rayon-vecteur balaye la même surface dans le même temps

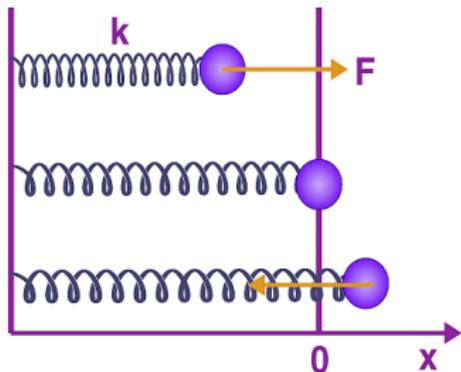
3) Les cubes des grands demi-axes sont proportionnels aux carrés des périodes, $\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$.



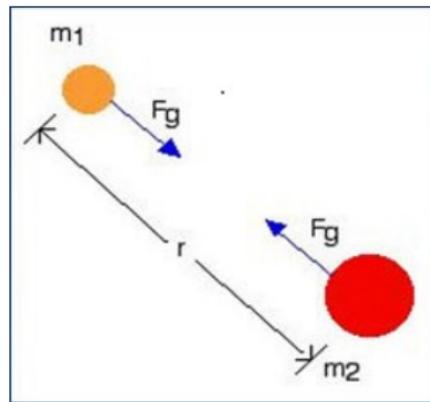
Sir Isaac Newton (1674 – 1742)

“Principia”

L'oeuvre monumentale de Newton, **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica** constitua une véritable révolution physique et mathématique, introduisant entre autres les lois de la mécanique et de la gravitation universelle, l'optique, ainsi que le calcul différentiel.



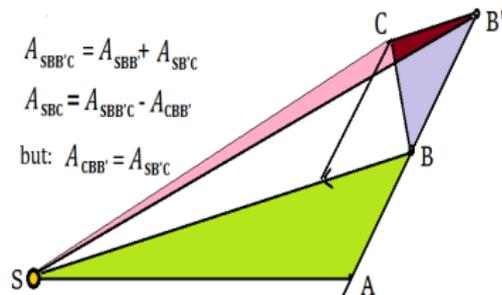
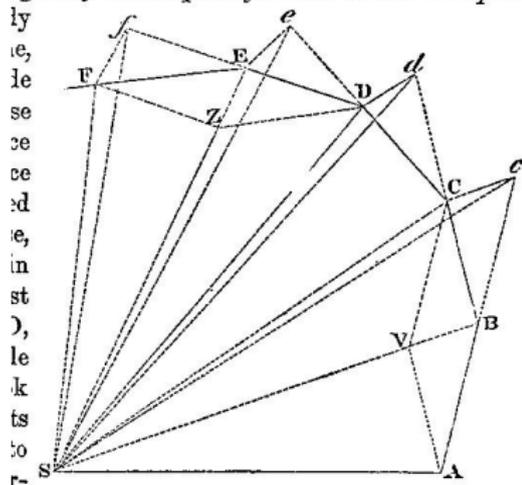
$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$



$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Les trois lois de la dynamique Newtonienne et la gravitation universelle

gred by a centripetal force directed to that point



La loi des aires de Kepler est valable pour toute force centrale
 $\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{r}}{r} f(r)$ L'ingénieuse preuve géométrique a été donnée par
 Newton dans ses "Principia".

- ▶ La troisième loi de **Kepler** était plus difficile à prouver dans le cadre de la théorie de la gravitation Newtonienne. Kepler avait soupçonné l'existence d'une force d'attraction universelle qui obligeait les planètes de tourner autour du Soleil. Il pensait que cette force diminuait avec la distance comme $\frac{1}{r}$

- ▶ La troisième loi de **Kepler** était plus difficile à prouver dans le cadre de la théorie de la gravitation Newtonienne. Kepler avait soupçonné l'existence d'une force d'attraction universelle qui obligeait les planètes de tourner autour du Soleil. Il pensait que cette force diminuait avec la distance comme $\frac{1}{r}$
- ▶ Pour une orbite circulaire, la troisième loi de **Kepler** se déduit facilement si l'on admet, d'après **Newton**, que la force d'attraction se comporte comme $\frac{1}{r^2}$.

- ▶ Un point matériel tournant sur une orbite circulaire de rayon R avec la fréquence angulaire ω est soumis à deux forces à la fois: la force d'attraction gravitationnelle dirigée vers le Soleil est proportionnelle à $\frac{1}{R^2}$, tandis que la la force d'inertie opposée à l'accélération centripète est proportionnelle à $\omega^2 R$.

- ▶ Un point matériel tournant sur une orbite circulaire de rayon R avec la fréquence angulaire ω est soumis à deux forces à la fois: la force d'attraction gravitationnelle dirigée vers le Soleil est proportionnelle à $\frac{1}{R^2}$, tandis que la la force d'inertie opposée à l'accélération centripète est proportionnelle à $\omega^2 R$.
- ▶ Le point matériel poursuit le mouvement circulaire car les deux forces opposées s'équilibrent:

$$\frac{GM_S m}{R^2} = m\omega^2 R = m \frac{4\pi^2}{T^2} R, \quad \rightarrow \quad \frac{GM_S}{4\pi^2} \frac{1}{R^3} = \frac{1}{T^2}.$$

Dans un repère tournant on observe les forces causées par l'inertie. Soit \mathcal{R}' un repère tournant avec la vitesse angulaire Ω par rapport au repère Galiléen \mathcal{R} . Si la dérivée par rapport au temps est $\frac{\partial}{\partial t}$, la dérivée par rapport au temps dans le repère tournant contient aussi l'effet d'entraînement:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \Omega \wedge \mathbf{r},$$

ou bien $\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \Omega \wedge \mathbf{r}$.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial\Omega}{\partial t} \wedge \mathbf{r} + 2\Omega \wedge \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r}).$$

Dans le cas d'un mouvement plan, le vecteur Ω est toujours perpendiculaire au rayon-vecteur \mathbf{r} , suite à quoi on peut simplifier l'expression de l'accélération d'entraînement:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial\Omega}{\partial t} \wedge \mathbf{r} + 2\Omega \wedge \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} - \Omega^2 \mathbf{r}.$$

Le terme

$$2\Omega \wedge \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = 2\Omega \wedge \mathbf{v}$$

porte le nom d'accélération de Coriolis.



Maupertuis (1699-1759)
(1736-1813)

d'Alembert (1717-1783)

Lagrange

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a}) \cdot \delta^* \mathbf{r} = 0 \quad \delta \int \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i) dt = 0.$$

Le principe variationnel de la moindre action

$$\delta \int \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j) dt = 0$$

qui a pour integrand la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^k)$ conduit au système d'équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0.$$

Ces équations sont covariantes par rapport aux changements des systèmes de coordonnées: en coordonnées curvilignes $x^i(q^j)$ les équations gardent leur forme: si l'on introduit les coordonnées $q^i(x^j)$, et en définissant $\tilde{\mathcal{L}}(q^i, \dot{q}^j) = \mathcal{L}(x^k(q^i), \dot{x}^j(q^i, \dot{q}^m))$, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q^i} = 0.$$

Symboles de Christoffel

Christoffel symbols of S^2

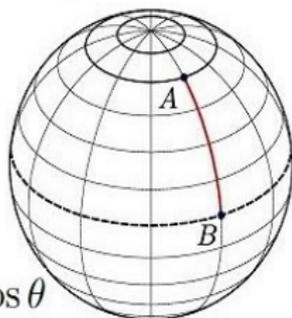
$$\Gamma_{ab}^c := \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$



$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$$



Dans un grand nombre de cas la fonction de Lagrange est égale à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, la première étant donnée par une fonction quadratique des vitesses généralisées:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k) \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} - V(q^i).$$

Les équations de Lagrange du système sont alors:

$$\frac{d}{dt} \left(a_{ij} \frac{dq^j}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{1}{2} a_{jk} \right) \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Mais

$$\frac{d}{dt} \left(a_{ij} \frac{dq^j}{dt} \right) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt} + a_{ij} \frac{d^2 q^j}{dt^2}.$$

Dû à la symétrie dans les indices k, j on peut écrire

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} \right) \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt},$$

et finalement

$$\frac{d}{dt} \left(a_{ij} \frac{dq^j}{dt} \right) = a_{ij} \frac{d^2 q^j}{dt^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i} \right] \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt}.$$

Pourvu que la 2-forme symétrique a_{ij} soit non singulière, on pourra introduire son inverse, a^{jk} tel que $a^{ij}a_{jk} = \delta_k^i$. En multipliant par a^{mi} et en sommant par i , on arrive à la version finale d'équations de Lagrange:

$$\frac{d^2 q^m}{dt^2} + a^{mi} (\partial_j a_{ik} + \partial_k a_{ji} - \partial_i a_{jk}) \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} = -a^{mi} \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

En absence de force extérieure le mouvement inertiel est décrit par l'équation d'une géodésique correspondant à la métrique a_{ij} :

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} = 0.$$

Dans les coordonnées curvilignes ξ^μ le rayon-vecteur est paramétré comme $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^\mu)$. Soit $\mathbf{r}(\xi^\mu(s))$ la trajectoire d'un point matériel. Le vecteur tangent est donné alors par

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\mu} \frac{d\xi^\mu}{ds} = \frac{d\xi^\mu}{ds} \mathbf{e}_\mu,$$

où \mathbf{e}_μ est le repère local engendré par les coordonnées curvilignes. L'équation d'une géodésique s'écrit alors:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\xi^\mu}{ds} \mathbf{e}_\mu \right) = \frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} \mathbf{e}_\mu + \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d}{ds} \mathbf{e}_\mu$$

Il ne reste que calculer explicitement la dérivée $\frac{d}{ds}\mathbf{e}_\mu$. Le long de la courbe, les vecteurs du repère dépendent du paramètre s à travers les coordonnées $\xi^\lambda(s)$. On a donc

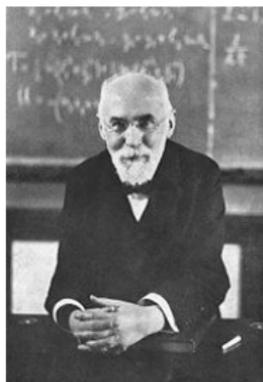
$$\frac{d}{ds}\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial\mathbf{e}_\mu}{\partial\xi^\lambda} \frac{d\xi^\lambda}{ds}$$

Les dérivées partielles $\partial_\lambda\mathbf{e}_\mu$ doivent se décomposer le long des vecteurs de base \mathbf{e}_ν :

$$\partial_\lambda\mathbf{e}_\mu = \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \mathbf{e}_\nu,$$

et nous pouvons écrire l'équation d'une géodésique ayant l'aspect familier avec les coefficients de la connexion:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} = 0.$$



$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

H. Lorentz et H. Poincaré ont établi les transformations laissant les équations de Maxwell covariantes - le groupe de Poincaré. Mais ils les considéraient comme astuce mathématique plutôt qu'une vraie transformation physique du temps et de l'espace. **Poincaré** pensait que ces transformations ne concernent que les phénomènes électromagnétiques.

La force de Lorentz en 3 dimensions

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$

$$d\mathbf{p} = q \mathbf{E} dt + q d\mathbf{r} \wedge \mathbf{B}$$

$$dp^i = q E^i dt + \epsilon_{jk}^i dx^j B^k.$$

Comment trouver la généralisation en 4 dimensions? Il faudrait ajouter la composante dp^0 - mais avec quelle quantité physique pourra-t-on l'identifier?

Le formalisme Hamiltonien contenait la réponse toute trouvée.

En définissant l'Hamiltonien 'a partir d'une fonction de Lagrange

$L = L(\dot{x}^i, x^j)$ donnée,

$$H(p_i, x^j) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}^i(x, p) - L(x^k, \dot{x}^j(p, x)), \quad \text{avec } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i},$$

on peut écrire le principe de moindre action comme suit:

$$\delta \int L dt = \delta \int \left[\sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}^i(x, p) - H(p, x) \right] dt = 0$$



Sir William Rowan Hamilton

En multipliant par dt , l'intégrand du principe variationnel devient:

$$\delta \int \left[\sum_{i=1}^3 p_i dx^i - H(p, x) dt \right] = 0$$

L'hamiltonien H a la dimension d'énergie. En substituant une nouvelle variable \mathcal{E} à l'Hamiltonien, en la divisant par c et en multipliant dt par c , on peut écrire

$$\delta \int \left[\sum_{i=1}^3 p_i dx^i - \frac{E}{c} c dt \right] = 0$$

et de là, en passant au formalisme 4-dimensionnel, avec $x^0 = ct$, écrire

$$\delta \int [-p_\mu dx^\mu] = 0, \quad \text{avec } dx^\mu = [cdt, \mathbf{x}], \quad p_\mu = \left[\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right],$$

En fait, tout a été prêt pour l'invariance relativiste!

La force de Lorentz en 4 dimensions

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]$$

$$d\mathbf{p} = q \mathbf{E} dt + q d\mathbf{r} \wedge \mathbf{B}$$

$$dp^i = q E^i dt + \epsilon_{jk}^i dx^j B^k.$$

$$dp^0 = d\frac{\mathcal{E}}{c} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

La formulation quadri-dimensionnelle devient à présent naturelle:

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu p^\nu,$$

avec la matrice $F^\mu{}_\nu$ définie comme suit:

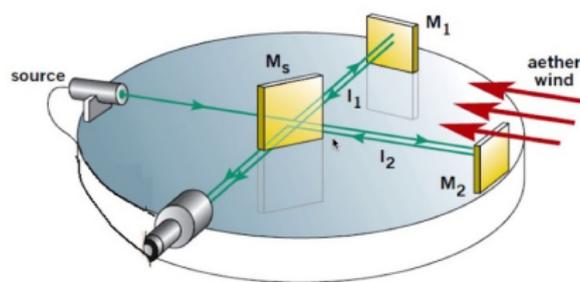
$$\begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

L'ironie du sort a voulu que le côté droit de l'équation

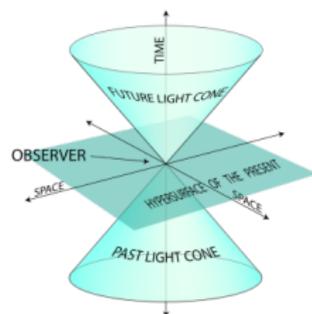
$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu p^\nu,$$

était déjà covariant par rapport aux transformations de Lorentz-Poincaré, tandis que le côté gauche (dp^μ/dt) ne l'était pas.

Poincaré ne songeait pas à modifier la mécanique Newtonienne, étant donné qu'il venait de publier deux volumes de "Nouvelles Méthodes de Mécanique Céleste", dans lesquels il a été capable de calculer les effets d'influence gravitationnelle de Jupiter sur l'orbite de Mars avec une précision fantastique 10^{-4} , bien au delà de la limite observationnelle. C'est finalement Einstein qui a eu l'audace de modifier la mécanique Newtonienne en remplaçant dp^μ/dt par dp^μ/ds , avec le temps propre $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$



Albert Abraham Michelson, Edward Morley et leur l'interféromètre



Hermann Minkowski

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2.$$

La métrique Minkowskienne:

$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ a permis un regard neuf, quadri-dimensionnel, sur les équations de Maxwell et la force de Lorentz. On s'aperçoit par exemple que le tenseur de Maxwell 2 fois covariant, est anti-symétrique, $F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu = -F_{\nu\mu}$.

Les équations de Maxwell prennent en 4 dimensions une forme simple et élégante à la fois:

$$\partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0,$$

correspondant aux équations homogènes (sans sources) $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$
et $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}$,

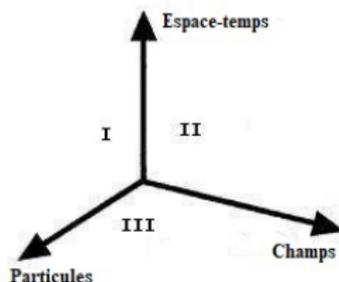
$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = -j^{\nu}, \quad \text{avec } j^0 = c\rho, \quad j^i = \mathbf{j}^i$$

correspondant aux équations de Maxwell avec sources,
 $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$, $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$.

Sur les épaules d'un géant



Newton disait qu'il a pu construire ses théories car il était assis sur les épaules des géants: Galilée et Kepler. Dans une interview, à la question s'il était assis sur les épaules de Newton, Einstein a répondu: "Non. Si j'étais assis sur les épaules d'un géant, le géant en question est Maxwell"

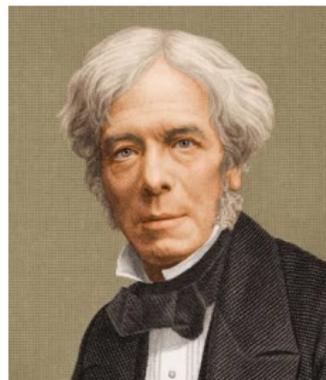


La physique de Maxwell était diamétralement opposée à celle de Newton (Théorie de type I).

Le temps et l'espace étaient absolus chez Newton, et l'interaction gravitationnelle se transmettait instantanément - c'était l'action à distance à travers un espace vide.

Maxwell postulait l'action "de proche en proche", les ondes électromagnétiques étant semblables aux ondes dans un milieu élastique nommé l'ether (Théorie de type II).

L'électromagnétisme



A.-M. Ampère

n C.-F. Gauss

M. Faraday

Les trois lois fondamentales de l'électricité et magnétisme étaient établies par Ampère, Gauss et Faraday:

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot}\mathbf{E}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3)$$

$$\oint_S \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right] \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = Q. \quad (4)$$

Le terme “courant de déplacement”, ajouté par Maxwell, est marqué en rouge.

La loi d'Ampère $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ \rightarrow $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ (car $\operatorname{div}(\mathbf{rot}) = 0$), combinée avec la loi de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ne pouvait pas satisfaire l'équation de conservation de la charge électrique,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Pour rendre la loi de conservation de la charge compatible avec les système d'équations du champ, Maxwell a dû ajouter un terme supplémentaire à la densité du courant électrique: $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Les champs vectoriels \mathbf{E} et \mathbf{H} ont une autre dimension physique que les champs de flux \mathbf{D} et \mathbf{B} .

Dans le vide, on peut leur donner la même dimension physique en introduisant les coefficients appropriés: ϵ_0 , la perméabilité électrique du vide, et μ_0 , la permittivité magnétique du vide. On peut alors poser

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \text{ et } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

En itérant, on peut séparer les variables, au prix du passage aux équations de second ordre:

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = 0,$$

idem pour le champs magnétique \mathbf{B} .

Maxwell a constaté que le produit $\varepsilon_0\mu_0$ avait la dimension physique de l'inverse du carré d'une vitesse. À sa grande surprise, cette vitesse coïncidait avec la vitesse de la lumière:

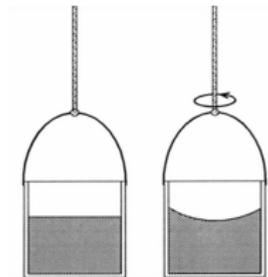
$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad c \simeq 300000 \text{ km/sec.}$$

L'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électromagnétique dans le vide admet aors comme solution une onde plane:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

avec vecteur d'onde \mathbf{k} constant.

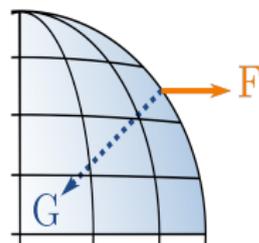
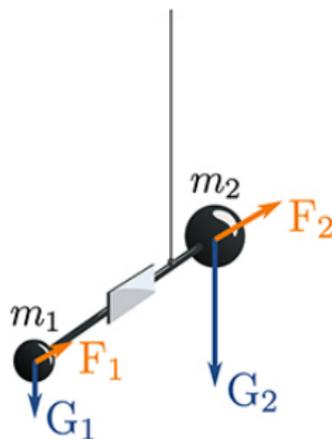
La vitesse de la lumière était déjà connue avec grande précision grâce aux expériences menées par Hippolyte Fizeau entre 1849 et 1851, et la nature ondulatoire de la lumière bien établie depuis Huyghens et Young.



À partir du principe philosophique “esse est percipi aut percipere” (“être c’est percevoir ou être perçu” George Berkeley a conclu qu’il aurait été impossible de savoir si un objet est en rotation ou s’il est immobile si rien d’autre (aucune matière) n’existait dans l’Univers.



Ernst Mach a généralisé cette hypothèse en tirant une conclusion radicale de l'égalité entre les deux masses, gravitationnelle et inertielle, en postulant qu'entre les deux, une devait être conséquence physique directe de l'autre: en bref, la masse inertielle est elle aussi de nature gravitationnelle. C'est l'interaction avec les masses lointaines dans l'Univers qui sont à l'origine du phénomène d'inertie.



Loránd Eötvös et son expérience démontrant l'égalité de masses gravitationnelle et inertielles

$$m_I = m_G \Rightarrow \frac{\Delta a}{g} = 0$$

Year	Investigator	Sensitivity	Method
1590?	Galileo	2×10^{-2}	Pendulum, drop tower
1686	Newton	$\sim 10^{-3}$	Pendulum
1832	Bessel	2×10^{-5}	Pendulum
1908	Eötvös	2×10^{-9}	Torsion Balance
1964	Dicke, Roll, Krotkov	3×10^{-11}	Torsion Balance
1972	Braginsky, Panov	$\sim 10^{-12}$	Torsion Balance
1990	Adelberger, et al.	$\sim 10^{-12}$	Torsion Balance
1999	Baessler, et al.	5×10^{-14}	Torsion Balance
2017	MICROSCOPE	10^{-15}	Satellite

Les résultats d'expériences démontrant l'égalité de masse gravitationnelle et inertielle, l'historique depuis Galilée jusqu'à nos jours.

Dans l'espace-temps de Minkowski le mouvement accéléré d'un repère Cartésien engendre une transformation non-linéaire des coordonnées. En approximation non-relativiste on a :

$$x' = x - \frac{at^2}{2} = x - \frac{a}{2c^2}\tau^2, \quad \tau' = ct' = \tau = ct.$$

Les différentielles sont égales à :

$$dx' = dx - \frac{a}{c^2}\tau d\tau, \quad d\tau' = d\tau.$$

Le carré de l'élément de longueur $(ds')^2$ devient alors

$$d\tau'^2 - dx'^2 = \left(1 - \frac{a^2\tau^2}{c^4}\right) d\tau^2 + 2\frac{a}{c^2}\tau dx d\tau - dx^2.$$

En négligeant les termes non-linéaires en at/c , on arrive à une métrique simplifiée :

$$g_{\tau\tau} = 1, \quad g_{x\tau} = g_{\tau x} = \frac{a\tau}{c^2}, \quad g_{xx} = -1.$$

En approximation linéaire le tenseur inverse $g^{\mu\nu}$ a les mêmes composantes, et le calcul des coefficients de la connexion est très simple. Toutes les composantes $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ sont nulles à l'exception de

$$\Gamma_{\tau\tau}^x = -\frac{a}{c^2}.$$

L'équation de la géodésique devient alors

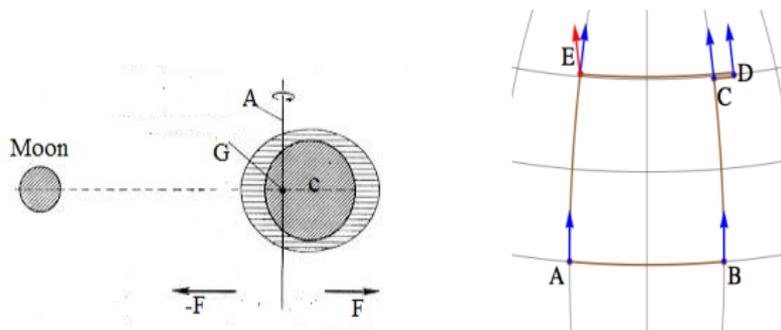
$$\frac{d^2x}{ds^2} + \Gamma_{\tau\tau}^x \left(\frac{d\tau}{ds} \right)^2 = 0$$

On peut poser (en négligeant les termes d'ordre supérieur en a/c) $ds \simeq d\tau \simeq cdt$, d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a.$$

- ▶ La force d'inertie subie par les corps dans un repère accéléré agit sur les masses indépendamment de leur composition, tout comme la force de la gravitation universelle. Quand les deux forces s'équilibrent, nous n'avons aucun moyen de les distinguer.

- ▶ La force d'inertie subie par les corps dans un repère accéléré agit sur les masses indépendamment de leur composition, tout comme la force de la gravitation universelle. Quand les deux forces s'équilibrent, nous n'avons aucun moyen de les distinguer.
- ▶ Mais cela vaut pour masses ponctuelles, de dimension négligeable. Les corps étendus peuvent et doivent subir des effets différentiels, connus et observés sous forme des marées.



Les marées sont causées par un déséquilibre entre force de gravitation et force d'inertie. En supposant que le centre de la Terre poursuit un mouvement circulaire autour du Soleil, on a la relation $\frac{GM_S}{D^2} = \omega^2 D$, où D est le rayon d'orbite terrestre
 1 UA = 149 000 000 km.

Mais dans les endroits où il fait midi ou minuit, il faut remplacer D par $D \pm R_T$, avec $R_T = 6\,380$ km.





$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{iqr} = \delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijr} = 2\delta_{kr}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

G. Ricci-Curbastro (1853-1925) T. Levi-Cività (1873-1941)

Le calcul tensoriel avec indices introduit par les mathématiciens Italiens Gregorio Ricci-Curbastro et Tullio Levi-Cività a joué un rôle important dans le développement de la Théorie de la Relativité d'Einstein. Levi-Cività était assistant de Ricci à l'Université de Padoue. En 1901 ils ont publié ensemble une monographie sur le calcul tensoriel et dérivation absolue.

Considérons une géodésique $x^\mu(s)$ dans l'espace-temps:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

Soit $\tilde{x}^\mu(s) = x^\mu(s) + \delta x^\mu(s)$ l'équation paramétrique d'une courbe voisine de la géodésique. La déviation δx^μ est appelée "déviations géodésique" si la courbe $\tilde{x}^\mu(s)$ vérifie elle aussi l'équation géodésique (en approximation linéaire par rapport à δx^μ):

$$\frac{d^2 \tilde{x}^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{d\tilde{x}^\lambda}{ds} \frac{d\tilde{x}^\nu}{ds} = 0.$$

Développons cette expression en série de Taylor, en gardant la partie linéaire en δx^μ .

Puisque x^μ vérifie l'équation géodésique, il ne reste au premier ordre en δx^μ que l'équation ci-dessous:

$$\frac{d^2(\delta x^\mu)}{ds^2} + \delta \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + 2\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \frac{d\delta x^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \mathcal{O}((\delta x^\mu)^2).$$

En explicitant $\delta \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} = \partial_\rho \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \delta x^\rho$, on arrive à l'équation de déviation géodésique:

$$\frac{d^2(\delta x^\mu)}{ds^2} + \partial_\rho \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \delta x^\rho \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + 2\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \frac{d(\delta x^\lambda)}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

où l'on reconnait facilement le terme d'accélération de Coriolis et celui de l'accélération d'entraînement.

Pour la formulation covariante de l'équation de déviation géodésique, il faut remplacer les dérivées par la dérivées covariantes:

$$\frac{D\delta x^\mu}{Ds} = \frac{dx^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\lambda, \text{ etc.}$$

Le calcul donne le résultat final:

$$\frac{D^2\delta x^\mu}{Ds^2} = R_{\lambda\nu\rho}^\mu \frac{Dx^\lambda}{Ds} \frac{Dx^\rho}{Ds} \delta x^\nu,$$

avec $R_{\lambda\nu\rho}^\mu = -R_{\nu\lambda\rho}^\mu$ le tenseur de Riemann.

$$R_{\lambda\nu\rho}^\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\rho}^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma.$$

L'équation de déviation géodésique ressemble à l'équation de mouvement d'une charge sous l'effet de la force de Lorentz:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{q}{m} F_{\nu}^{\mu} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

à comparer avec

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{Ds^2} = R_{\lambda\nu}^{\mu}{}_{\rho} \frac{Dx^\lambda}{Ds} \frac{Dx^\rho}{Ds} \delta x^\nu,$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, et

$$R_{\lambda\nu}^{\mu}{}_{\rho} = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}.$$

Si le tenseur de courbure de Riemann est la source d'effets gravitationnels observables - les marées - et si les distribution des masses jouent le rôle de sources, comme les charges et vourants électriques engendrent le champ électromagnétique - alors devrait établir les équations de champ gravitationnel impliquant le tenseur de Riemann.

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ était le candidat idéal pour décrire les sources; mais il est symétrique, tandis que le tenseur de Riemann est anti-symétrique dans ses deux premiers indices.

Heureusement, il existe une combinaison linéaire symétrique: le tenseur de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda}{}^{\lambda}{}_{\nu} = R_{\nu\mu}.$$

50 ans plus tard (les équations de Maxwell ont été établies en 1865, celles de la Relativité Générale en 1915) Einstein a suivi le schéma semblable: il a dû modifier le système d'équations postulé initialement:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{G}{8\pi c^2} T_{\mu\nu}$$

Le terme à gauche est une combinaison linéaire des composantes du tenseur de Riemann connu sous le nom de tenseur de Ricci; le terme à droite, le tenseur d'impulsion-énergie de introduit par Maxwell, décrit les sources du champ gravitationnel, comme la charge et le courant électriques étaient les sources du champ électromagnétique.

Einstein était obligé d'imiter de Maxwell: les lois de conservation devaient primer! Or, l'équation de continuité assurant la conservation d'impulsion et d'énergie s'écrit (sous forme covariante, bien entendu!) comme

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0,$$

pendant que $\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu R$. Pour rendre les deux côtés de l'équation compatibles, Einstein a introduit un terme supplémentaire:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{G}{8\pi c^2}T_{\mu\nu}.$$

Néanmoins, les équations avec $R_{\mu\nu}$ seul à gauche restaient valables dans le vide, puisque on a $R = 0$ si $T_{\mu\nu} = 0$.

En cherchant une solution cosmologique statique, Einstein a été obligé d'introduire un terme supplémentaire à droite:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{G}{8\pi c^2}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

(On rappelle qu'avec la connexion Christoffelienne $\nabla_{\mu}g_{\lambda\rho} = 0$, ce qui rend les équations compatibles si l'on admet $\Lambda = \text{Const.}$)

Aristote serait content: ce terme, ayant une dimension de densité d'énergie, confirme sa position - "la Nature ne supporte pas le vide"! Ce terme porte le nom de Constante Cosmologique. Après la publication des solutions cosmologiques non-stationnaires de Friedmann et Lemaître, Einstein s'est laissé convaincre, en appelant la constante cosmologique "la plus grande erreur de sa vie". Mais tout porte à croire qu'il avait tort en le disant.

Conscient du fait que la gravitation ne pouvait pas agir à distance instantanément, Einstein a essayé de trouver l'effet de propagation semblable à celui établi 50 ans auparavant par Maxwell pour ondes électromagnétiques. En 1916 et en 1918 il a publié deux articles analysant le problème de propagation des perturbations infinitésimales de la métrique $g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$.

Dans le premier article Einstein a imposé la condition unimodulaire $\sqrt{(-g)} = 1$ et a obtenu trois types d'ondes gravitationnelles: longitudinales, transversales, et ondes de troisième type inédit, se propageant avec la vitesse de la lumière.

Après les critiques de Nordström et De Sitter, Einstein a reconnu d'avoir commis quelques erreurs. Avec une nouvelle publication en 1918 il a bien éliminé les degrés de liberté superflus, y compris les ondes longitudinales, et trouvant que seules ondes quadrupolaires peuvent se propager et transporter de l'énergie. Il a aussi trouvé la formule de puissance émise par un système binaire, $\mathcal{P}_{grav} \simeq L^2 \omega^6$. Mais en 1936, déjà aux États-Unis, sous l'influence de son élève et collaborateur Nathan Rosen, Einstein est arrivé à la conclusion que les ondes gravitationnelles peuvent être supprimées dans un système de coordonnées bien choisies. Il a changé d'avis l'année suivante, pour récidiver avec un autre article en 1938. Cet article a été rejeté par **Physical Review**.



Albert Einstein (1879-1955) pendant sa visite au Japon. Photo prise sur les marches du grand temple bouddhiste de Kyoto, novembre 1922