Sur les plongements totalement réels maximaux

NEFTON PALI

IMO PARIS-SACLAY, CNRS

Definition Une sous-variété réelle $M \subset X$ dans (X, J) variété complexe est dite totalement réelle si $T_M \cap J T_M = \operatorname{Im} O_M$.

De plus M totalement réelle est dite totalement réelle maximale si $\dim M = \dim_{\mathbb{C}} X$.

THÉORÈME (BRUHAT - WHITNEY)

Pour toute variété réelle analytique M il existe un plongement réel analytique $M \subset X$, complexe tel que M soit totalement réelle maximale dans X.

Si de plus M est totalement réelle maximale pour J_1, J_2 structures complexes réelles analytiques sur X alors il existent $U_1, U_2 \subset X$ voisinages ouverts de M tels que

$$\begin{array}{ccc} (U_1, J_1) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & (U_2, J_2) \\ \cup & & \cup \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

On va identifier $M \equiv \mathrm{Im}\, 0_M \subset T_M$.

Alors $\begin{array}{c} T_{T_M|M} \underset{\text{CAN}}{\simeq} T_M \oplus T_M \\ \downarrow \\ M \end{array}$ fibré vectoriel complexe

$J^{can} : (u,v) \longmapsto (-v,u)$.

Dans le théorème de BRUHAT - WHITNEY on peut supposer

$X = \underset{\substack{\cup \\ M}}{U} \subset T_M$ et $\boxed{J_{|M} = J^{can}}$

Si on étend la définition de totalement réel au cas presque-complexe alors toute structure presque-complexe J extension continue de J^{can} dans un voisinage $U_0 \subset T_M$ de M rend M totalement réelle maximale en U_0.

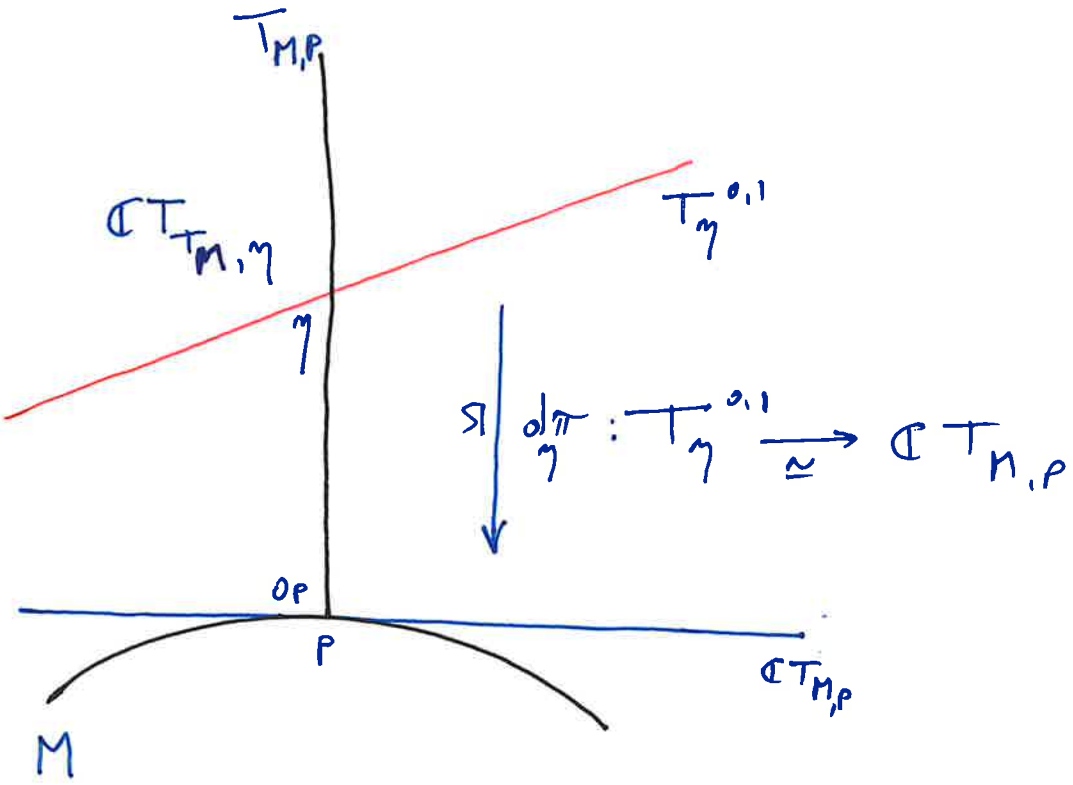
<u>Observation 1</u> Sur $(T_{T_M|M}, J^{can})$

$$(u,v)^{0,1}_{J^{can}} = (\xi, i\xi), \quad \xi = (u - iv)/2 .$$

Donc la distribution $T^{0,1}_{U_1,J} \subset \mathbb{C}T_{T_M|U_1}$ est π-horizontale, $\pi : T_M \longrightarrow M$ pour $U_1 \subset U_0$ ouvert suffisament petit.

$$\underset{M}{\cup}$$

Distributions π-horizontales



$$\eta \longmapsto A_\eta : \mathbb{C}T_{M,p} \longrightarrow \mathbb{C}T_{T_M,\eta}$$

Inverse à droite de $d_\eta\pi$

$$T_\eta^{0,1} := \operatorname{Im} A_\eta$$

<u>Définition</u> Une distribution complexe π-horizontale sur T_M est la donné d'une section $A \in \mathcal{C}^\infty(T_M, \pi^*\mathbb{C}T_M^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}T_{T_M})$ telle que $d\pi \cdot A = \mathbb{I}_{\pi^*\mathbb{C}T_M}$

Observation 2 La section A détermine une structure presque-complexe J_A un T_M telle que

$$T^{0,1}_{T_M, J_A, \eta} = \mathrm{Im}\, A_\eta \equiv A_\eta(\mathbb{C}T_{M,\pi(\eta)}) \subset \mathbb{C}T_{T_M,\eta}$$

si et seulement si $\mathrm{Im}\, A_\eta \cap \overline{\mathrm{Im}\, A_\eta} = \{0_\eta\}$ $\forall \eta \in T_M$

si et seulement si $\boxed{\mathrm{Ker}\,(A - \bar{A}) = 0.}$

Observation 3

$$J_A|_M \equiv J^{can} \iff \boxed{A_{0_p}(\xi) = (\xi, i\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}T_{M,p} \quad \forall p \in M}$$

En conclusion de ces observations on peut donner une definition qui exprime la notion totalement réel maximal en termes plus explicites/pratiques pour la structure presque-complex

<u>Définition</u> Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$.

Une structure presque-complexe J sur un voisinage $U \subset T_M$ de $M \equiv \mathrm{Im}\, 0_M$ est dite M-totalement réelle s'il existe une section $A \in \mathcal{C}^\infty(U, \pi^*\mathbb{C}T_M^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}T_{T_M})$ telle que $d\pi \cdot A = \mathbb{I}_{\pi^*\mathbb{C}T_M}$, $\mathrm{Ker}(A - \bar{A}) = 0$, $A_{0_p}(\xi) = (\xi, i\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{C}T_{M,p}$, $p \in M$ et $J = J_A$.

<u>Remarque</u> Toute structure presque-complexe extension $\mathcal{C}^\infty$ de J^{can} sur un voisinage de $M \subset T_M$ est une structure M-totalement réelle en restriction à un petit voisinage de M.

Il existe une difficulté considérable à travailler avec des distributions non-linéaires comme A. Dans les cas d'intégrabilité non triviaux, A est toujours non-linéaire. Ici on considère alors des connexions linéaires, i.e. des opérateurs de connexion

$$\nabla : C^\infty(M, \mathbb{C}T_M) \longrightarrow C^\infty(M, T_M^* \otimes \mathbb{C}T_M)$$

opérateur linéaire qui satisfait la règle de Leibniz.

La distribution horizontale H^∇ associé à ∇ est donné par la décomposition

$$d_p\sigma(\xi) = H^\nabla_\eta(\xi) + T_\eta \nabla_\xi \sigma \quad , \quad \sigma \in \mathcal{E}^\infty(M, \mathbb{C}T_M)$$
$$\sigma(p) = \eta$$

$T_\eta : V \xrightarrow{\simeq} T_{V,\eta}$, $V := \mathbb{C}T_{M,\pi(\eta)}$. (Déf H independente de σ)

Pour toute structure M-totalement réelle J_A sur U on a la décomposition

$$\bar{A} = H^{\nabla} - T(i\, \mathbb{I}_{\pi^* \mathbb{C}T_M} + S)$$

$$S \in \mathcal{C}^{\infty}(U, \pi^* \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}T_M)), \quad S_{0_p} = 0_p \quad \forall p \in M.$$

En procédant ainsi, nous sommes un peu descendus de T_{T_M} par rapport à A, mais nous restons encore en hauteur avec U.

Nous pouvons descendre davantage avec l'hypothèse que <u>J_A</u> <u>(et donc A)</u> <u>soit réelle analytique le long des fibres de T_M</u>

Cette hypothèse signifie que S admet un développement de Taylor le long des fibres de T_M du type

$$S_\eta \cdot \xi = \sum_{k \geq 1} S_k(\xi, \eta^k) ,$$

avec η dans un petit voisinage ouvert de M dans U, $\xi \in T_{M,\pi(\eta)}$ et

$$S_k \in \mathcal{C}^\infty(M, T_M^* \otimes \mathrm{Sym}^k T_M^* \otimes \mathbb{C}T_M) .$$

Grâce à ces S, nous avons enfin les "pieds" bien ancrés au sol. Il reste maintenant le problème de déterminer S afin d'avoir J_A intégrable. La réponse est donné par...

THÉORÈME (A) (PALI-SALVY).

Soit M une variété réelle analytique et soit

$\nabla : \mathcal{C}^{r.a}(M, \mathbb{C}T_M) \longrightarrow \mathcal{C}^{r.a}(M, T_M^* \otimes \mathbb{C}T_M)$ un

opérateur de connexion linéaire, $\boxed{\tau^\nabla = 0}$.

Alors il existe un ouvert $U \subset T_M$, $U \supset \mathrm{Im}\, 0_M$

à fibres connexes et une section

$S \in \mathcal{C}^{r.a}(U, \pi^* \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}T_M))$ avec développement

de Taylor le long les fibres de T_M à l'origine

$$S_\eta \cdot \xi = \sum_{k \geqslant 2} S_k(\xi, \eta^k) \quad , \quad \eta \in U \quad , \quad \xi \in T_{M, \pi(\eta)}$$

donné par la formule explicite

$$S_k(\xi, \eta^k) := \frac{1}{i^{k+1}} \sum_{\|D\| = k} C_D \, R_\eta^{(d_1)} \circ \dots \circ R_\eta^{(d_{\ell_D})} \cdot \xi$$

$\xi \mapsto R_\eta^{(d)} \cdot \xi := \nabla^d R^\nabla(\eta^{d+1}, \xi, \eta)$, $D \equiv (d_1, \dots, d_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell_{\geqslant 0}$,

$\ell_D := \ell \geqslant 1$, $\|D\| = |D| + 2\ell_D$, $|D| = \sum_{j=1}^{\ell} d_j$ telle que J_A

avec $\overline{A} := H^\nabla - T(i\mathbb{I}_{\pi^*\mathbb{C}T_M} + S)$ soit une structure complexe

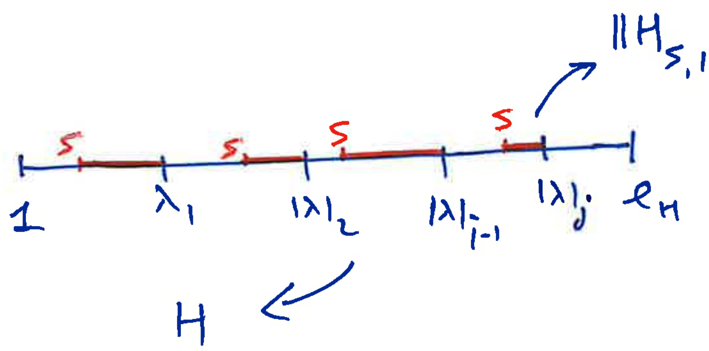
M-totalement réelle sur U

$$C_D := \sum_{\substack{0\le H\le D\\ \ell_H=\ell_D}} \frac{(-1)^{|H|}\, C(H)}{H!\,(D-H)!} \quad , \quad H! := h_1!\cdots h_{\ell_H}!$$

$$C(H) := \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{\bullet}_{\geq 1}\\ |\lambda|=\ell_H}} (-1)^{\ell_\lambda}\, \|H_{0,\lambda_1}\| \cdot \prod_{j=1}^{\ell_\lambda} \prod_{s=|\lambda|_{j-1}}^{|\lambda|_j-1} \frac{1}{\|H_{s,|\lambda|_j}\|\left(\|H_{s,|\lambda|_j}\|+1\right)}$$

$$H_{s,p} := (h_{s+1},\dots,h_p) \quad , \quad 0\le s\le p\le \ell_H \quad , \quad |\lambda|_j := |\lambda_{0,j}| .$$

Idée de la formule



On calcule $\displaystyle\prod_j \prod_s \frac{1}{x_{j,s}(x_{j,s}+1)}$

L'hypothèse $\tau^\nabla = 0$ est nécessaire !

Si une structure presque complexe M-totalement réelle J_A s'écrit sous la forme donnée par le théorème P-5(A) et si elle est intégrable alors $\tau^\nabla = 0$.

Plus en général j'ai un théorème qui dit que si une structure M-totalement réelle intégrable J_A est réelle analytique le long les fibres de T_M alors la connexion canonique associée (il existe une connexion naturelle déterminée par J_A et un choix d'une connexion de base fixé qui permet d'écrire "explicitement" (au mieux) son développement de Taylor) est sans torsion

On a en conclusion une application

$$\left\{ \nabla : C^{r.a}(M, \mathbb{C}T_M) \longrightarrow C^{r.a}(M, T_M^* \otimes \mathbb{C}T_M) \text{ opérateur de connexion linéaire}, \ \tau^\nabla = 0 \right\}$$

$$\nabla \mapsto J^\nabla \qquad \Big\downarrow$$

$\Big\{$ Structures complexes M-totalement réelles sur $(T_M, M)\Big\}$ germes réelles analytiques

Définition La structure J^∇ est appelée structure complexe M-totalement réelle canonique associée à ∇ sur $U \equiv U_\nabla$.

Telles structures sont caractérisées de manière extrêmement simple !

THÉORÈME (B) (PALI-SALVY)

Soit M une variété réelle analytique et soit $\nabla : \mathcal{C}^{r.a}(M, \mathbb{C}T_M) \longrightarrow \mathcal{C}^{r.a}(M, T_M^* \otimes \mathbb{C}T_M)$ un opérateur de connexion, $\tau^\nabla = 0$. Soit $U \subset T_M$ un voisinage ouvert de $\operatorname{Im} 0_M$ à fibres connexes et soit $J \equiv J_A$ une structure presque complexe M-totalement réelle sur U et réelle analytique le long les fibres de U. Alors la structure J_A est <u>complexe</u> (intégrable) et le champs de vecteurs

$$\underset{\substack{\cap \\ T_M}}{\xi^\nabla : \eta} \longmapsto (H_\eta^\nabla - i T_\eta) \cdot \eta \in \mathbb{C} T_{T_M, \eta}$$ est de type

$(1,0)$ pour J sur U si et seulement si J est la structure complexe M-totalement réelle associé à ∇ sur U_∇.

Notre formule explicite permet de déterminer si les sections des puissances de Schur du fibré T_{T_M} construites via une certaine ∇, $\tau^{\nabla}=0$ sont holomorphes ou pas.

La donnée ∇, $\tau^{\nabla}=0$ est naturelle dans des problèmes d'analyse micro-locale analytique.

En général, il est requis que ∇ agisse sur les sections de $\mathbb{C}T_M$. Dans ce cas général ∇ ne possède pas de géodésiques. (Le théorème d'existence de Cauchy ne s'applique pas!) Dans le cas ∇ agit sur les sections de T_M alors on a des géodésiques et donc on a le flot géodésique Φ^{∇}: $\Phi^{\nabla}_t(\eta)=\dot{c}_t$, $\dot{c}_0=\eta$, c géodésique

Dans ce cas la condition ξ^∇ de type $(1,0)$ pour J dans le ~~théorème~~ théorème P-S (B) est équivalente à la condition "L'application $(\mathbb{C},0) \ni t+is \longmapsto s\,\Phi_t^\nabla(\eta) \subset U$ est J-holomorphe pour tout $\eta \in U$".