

Simulations des équations d'Euler avec formalisme espace-temps

F. Blachère, J. Danzel, B. Portelenelle, E. Rouhaud

Université de Technologie de Troyes, GAMMA3

Novembre 2024
GDR GDM, Ircam, Paris



MEMBER OF



Sommaire

Formalisme espace-temps

- Généralités
- CFD classique en espace-temps

Mécanique des fluides numérique

- Modélisation classique vers espace-temps
- Différences finies en espace-temps
- Volumes finis en espace-temps

Simulations numériques

- Environnement de développement
- Test numérique de convergence
- Équations d'Euler
- Perspectives

Sommaire

Formalisme espace-temps

- Généralités
- CFD classique en espace-temps

Mécanique des fluides numérique

- Modélisation classique vers espace-temps
- Différences finies en espace-temps
- Volumes finis en espace-temps

Simulations numériques

- Environnement de développement
- Test numérique de convergence
- Équations d'Euler
- Perspectives

Formalisme espace-temps

Tube d'univers

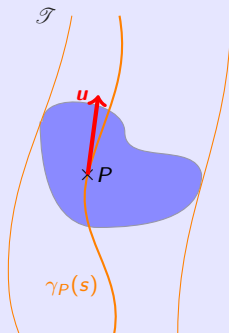


Figure – Représentation d'un tube d'univers \mathcal{T} avec des lignes d'univers en orange.

Variété 4D

Univers : variété pseudo-riemannienne 4D \mathcal{M}

- Milieu continu (matière distribuée continûment de densité massique au repos $\tilde{\rho}_c$)
- Pseudo-métrique g de signature $(1, -1, -1, -1)$
- Événement $P \in \mathcal{M}$ identifié par un jeu de 4 coordonnées $(x^\mu)_{\mu \in \{0,1,2,3\}}$
- Ligne d'univers $\gamma_P(s)$, ligne dans \mathcal{M} :

$$\gamma_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, s \mapsto \gamma_P(s) = \{\phi_s(P)\},$$

pendant 4D des trajectoires.

- 4-vitesse notée u :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \text{avec} \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Tenseur moment-énergie

Tenseur moment-énergie T

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}$$

où \mathcal{L}_M est la contribution de la matière à la densité d'énergie.

T : généralisation 4D du tenseur des contraintes.

Un tenseur covariant.

Conservation de l'énergie-impulsion

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

où ∇ denote la dérivée covariante.

Cette conservation est le pendant 4D de, à la fois :

- le bilan de puissance,
- la conservation de l'impulsion.

Conservation vérifiée pour tout observateur.

CFD classique ($|\mathbf{v}| \ll c$) en espace-temps

Premiers travaux en CFD classique

- **Éléments finis** : espace-temps avec méthode de Galerkin discontinue, pour l'élastodynamique [*Hugues et al. 1988*] puis la CFD [1989]
- **Volumes finis** : espace-temps basé sur des tranches temporelles, pour fluides à surface libre [*Zwart et al. 1999*]

Intérêts pour la CFD classique

- **Invariance** par changement de repère.
- **Mêmes schémas** en espace et en temps.
- **Raffinement local** du maillage en espace-temps.
- Volumes finis : **conservatifs en temps** également.

Notre positionnement

- Formalisme des **systèmes hyperboliques de loi de conservation**.
- Faisabilité sur les **équations d'Euler**, dans des cas simples.
- Construction à **partir du formalisme classique**, sur maillage extrudé en temps.

Sommaire

Formalisme espace-temps

- Généralités
- CFD classique en espace-temps

Mécanique des fluides numérique

- Modélisation classique vers espace-temps
- Différences finies en espace-temps
- Volumes finis en espace-temps

Simulations numériques

- Environnement de développement
- Test numérique de convergence
- Équations d'Euler
- Perspectives

Modélisation dans l'espace classique

Cadre général pour fluide visqueux compressible avec flux de chaleur et forces volumiques : les **équations de Navier-Stokes**.

Équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\Sigma \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

Notations :

- t le temps,
- ρ la masse volumique du fluide,
- \mathbf{v} la vitesse du fluide,
- p la pression thermodynamique,
- $E = \rho e + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$ l'énergie totale,
- \mathbf{g} une force volumique (e.g. gravité),
- \mathbf{q} le flux de chaleur,
- Σ le tenseur des contraintes visqueuses.

Modélisation dans l'espace classique

Pour cette étude, nous nous placerons dans un cadre simplifié.

Équations d'Euler sans force volumique

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{l}) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Formalisme loi de conservation

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{U})) = \mathbf{0}$$

Hypothèses :

- on néglige les transferts thermiques ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$),
- on néglige la viscosité ($\Sigma = \mathbf{0}$),
- on considère $\mathbf{g} = \mathbf{0}$,
- \mathbf{l} est la matrice identité.

Système hyperbolique de loi de conservation :

- expression en termes de flux

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v}^T \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{l} \\ (E + p) \mathbf{v}^T \end{pmatrix},$$

- adapté pour la méthode des volumes finis.

Modélisation avec le formalisme espace-temps

Notations & hypothèses :

- c : vitesse de la lumière dans le vide,
- variations de γ négligeables ($|\mathbf{v}| \ll c$),
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}$ (facteur de Lorentz).

On obtient l'équation suivante, après multiplication par $\frac{\gamma}{c}$:

$$\frac{\partial(\gamma \mathbf{U})}{\partial x^0} + \nabla \cdot \left(\frac{\gamma}{c} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \right) = \mathbf{0},$$

qui peut aussi s'écrire de manière plus générale :

Loi de conservation en espace-temps

$$\nabla_\nu \mathbf{G}^{\mu\nu}(\mathbf{U}) = \mathbf{0},$$

$$\text{avec } \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \left(\gamma \mathbf{U} \quad \frac{\gamma}{c} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \right) = \begin{pmatrix} \gamma \rho & \frac{\gamma}{c} \rho \mathbf{v}^T \\ \gamma \rho \mathbf{v} & \frac{\gamma}{c} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + pI) \\ \gamma E & \frac{\gamma}{c} (E + p) \mathbf{v}^T \end{pmatrix}.$$

Modélisation avec le formalisme espace-temps

On peut réécrire cette loi de conservation à l'aide du tenseur moment-énergie $\mathbf{T}^{\mu\nu}$:

Loi de conservation avec tenseur moment-énergie

$$\frac{\partial(\gamma\rho)}{\partial x^0} + \nabla \cdot \left(\frac{\gamma}{c} \rho \mathbf{v} \right) = 0,$$

$$\nabla_\nu \mathbf{T}^{\mu\nu} = \mathbf{0},$$

avec $\mathbf{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma E & \frac{\gamma}{c} (E + p) \mathbf{v}^T \\ \gamma \rho \mathbf{v} & \frac{\gamma}{c} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p I) \end{pmatrix}$ le tenseur moment-énergie.

Ces équations correspondent respectivement à :

- la conservation de la **masse**,
- la conservation de l'**énergie**,
- la conservation de la **quantité de mouvement**.

Equation de transport : cas (1+1)D en différences finies

Pour simplifier, on considère dans un premier temps l'équation de transport en 1D :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

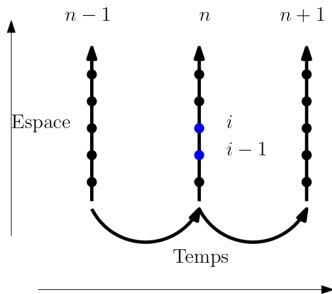


Figure – 1D + t

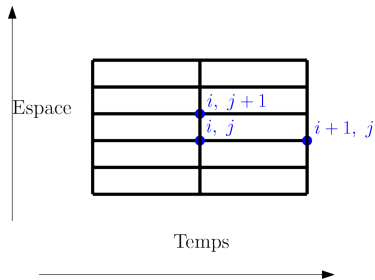


Figure – (1+1)D

Equation de transport : cas (1+1)D en différences finies

Passage en (1+1)D

- Coordonnées : x et $t \rightarrow (x^0 = ct, x^1 = x)$
- Vitesse : $v \rightarrow \left(u^0 = \gamma, u^1 = \frac{\gamma}{c} v \right)$
- Densité : $\rho_i^n \rightarrow \rho_{i,j}$

Schéma 1D ($i \in \llbracket 0; M \rrbracket$)

$$\frac{\rho_i^n - \rho_i^{n-1}}{\Delta t} + v \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Il faut résoudre N fois le système :

$$A\rho^n = \rho^{n-1}$$

avec $\rho^n = (\rho_0^n \ \rho_1^n \ \dots \ \rho_M^n)^T$
 et A de taille $(M+1) \times (M+1)$.

Schéma (1+1)D ($i \in \llbracket 0; N \rrbracket$)

$$u^0 \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}}{\Delta x^0} + u^1 \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i,j-1}}{\Delta x^1} = 0$$

Il faut résoudre **une seule fois** le système :

$$K\rho = \rho_0$$

avec :

$$\rho = (\rho_{1,0} \ \dots \ \rho_{1,M} \ \rho_{2,0} \ \dots \ \rho_{N,M})^T,$$

$$\rho_0 = (\rho_{0,0} \ \dots \ \rho_{0,M} \ 0 \ \dots \ 0)^T,$$

et K bidiagonale par blocs avec A et I_{N+1} .

Méthode des volumes finis

Principe des volumes finis

- **forme conservative** de l'EDP (forme intégrale),
- intégration sur des **volumes de contrôle** K ,
- écriture en termes de flux avec le **théorème de Stokes**.

Intérêts des volumes finis :

- méthode conservative, *i.e.* égalité des flux entrants et sortants dans un volume,
- facilement utilisable avec un maillage non structuré, formulation indépendante de sa complexité.

Forme intégrale de la loi de conservation

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{U})) d\Omega = 0$$

Méthode des volumes finis

Schéma semi-discret volumes finis dans K

$$\frac{\partial U_K}{\partial t} + \frac{1}{|K|} \sum_i |\partial K_i| \mathcal{F}_i = 0$$

Notations :

- U_K la valeur moyenne de U sur K ,
- ∂K_i la face i de K ,
- $|E|$ le volume de l'élément E ,
- \mathcal{F}_i le flux numérique à travers ∂K_i .

Schéma en temps

On discrétise la dérivée temporelle par un schéma d'Euler implicite :

$$\frac{\partial U_K}{\partial t} \simeq \frac{U_K^n - U_K^{n-1}}{\Delta t}$$

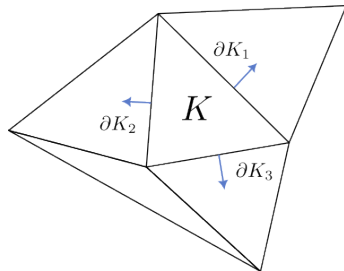


Figure – Volume de contrôle K et ses faces

Méthode des volumes finis

Nombreuses possibilités pour le choix du flux numérique \mathcal{F}_i .

Un choix classique : le flux de Rusanov

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{2} ((F(U_K) + F(U_L)) n_i - b_i(U_L - U_K))$$

Notations :

- L cellule voisine de K pour le flux \mathcal{F}_i ,
- n_i vecteur normal unitaire de la face ∂K_i , orienté de K vers L ,
- b_i la plus grande vitesse d'onde entre U_K et U_L .

Choix de b_i

- pour l'advection : $b_i = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i|$,
- pour Euler : à discuter selon contexte.

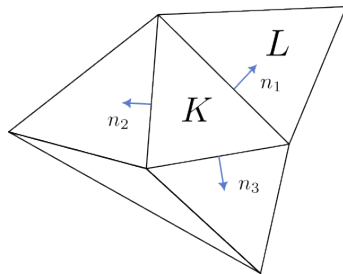


Figure – Volumes de contrôle K et L

Méthode des volumes finis

Un flux plus général : le flux HLL

$$\mathcal{F}_i = \frac{-b_i^- F(U_K) + b_i^+ F(U_L)}{b_i^+ - b_i^-} n_i + \frac{b_i^+ b_i^-}{b_i^+ - b_i^-} (U_L - U_K)$$

avec deux vitesses d'ondes $b_i^+ > 0$ et $b_i^- < 0$.

On retrouve le flux de Rusanov avec le choix $b_i = b_i^+ = -b_i^-$.

Référence : A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*. In : SIAM Rev. 25.1 (1983), pp. 35–61. issn : 0036-1445. doi : 10.1137/1025002.

Volumes finis en espace-temps

Le temps n'apparaît plus explicitement dans le schéma volumes finis.

Schéma volumes finis espace-temps

$$\frac{1}{|K|} \sum_i |\partial K_i| \tilde{\mathcal{F}}_i = 0,$$

avec $\tilde{\mathcal{F}}_i$ le flux à travers les faces des **cellules d'espace-temps**.

Flux HLL espace-temps

$$\tilde{\mathcal{F}}_i = \frac{-\beta_i^- G(U_K) + \beta_i^+ G(U_L)}{\beta_i^+ - \beta_i^-} n_i + \frac{\beta_i^+ \beta_i^-}{\beta_i^+ - \beta_i^-} (U_L - U_K)$$

avec les vitesses d'onde suivantes :

$$\beta_i^+ = \sqrt{\delta_{\sigma\tau} (B_i^+)^{\sigma} n_i^{\sigma} (B_i^+)^{\tau} n_i^{\tau}}, \quad B_i^+ = \left(\gamma \quad \frac{\gamma}{c} b_i^+ \quad \frac{\gamma}{c} b_i^+ \quad \frac{\gamma}{c} b_i^+ \right)^T,$$

$$\beta_i^- = -\sqrt{\delta_{\sigma\tau} (B_i^-)^{\sigma} n_i^{\sigma} (B_i^-)^{\tau} n_i^{\tau}}, \quad B_i^- = \left(\gamma \quad \frac{\gamma}{c} b_i^- \quad \frac{\gamma}{c} b_i^- \quad \frac{\gamma}{c} b_i^- \right)^T$$

Volumes finis en espace-temps

Sur un maillage espace-temps **extrudé en temps**, ce schéma est équivalent au formalisme classique avec :

- schéma Euler implicite en temps,
- flux HLL en espace.

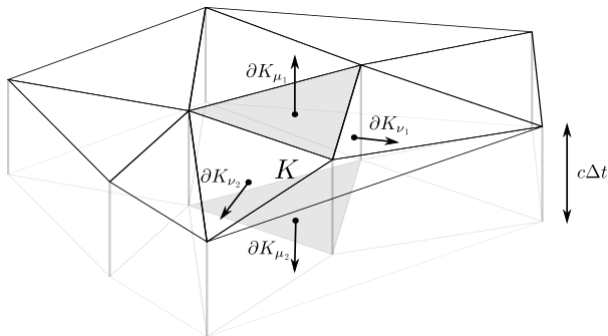


Figure – Maillage espace-temps extrudé en temps.

Volumes finis en espace-temps

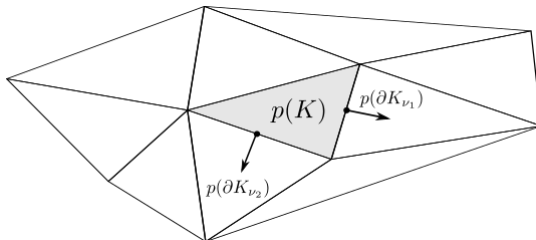


Figure – Projection du maillage sur l'espace classique.

$$\frac{1}{|K|} \left[\sum_{\mu} |\partial K_{\mu}| \tilde{\mathcal{F}}_{\mu} + \sum_{\nu} |\partial K_{\nu}| \tilde{\mathcal{F}}_{\nu} \right] = 0 \iff \frac{U_K - U_L}{\Delta t} + \frac{1}{|p(K)|} \sum_{\nu} |p(\partial K_{\nu})| \mathcal{F}_{\nu} = 0$$

Sommaire

Formalisme espace-temps

- Généralités
- CFD classique en espace-temps

Mécanique des fluides numérique

- Modélisation classique vers espace-temps
- Différences finies en espace-temps
- Volumes finis en espace-temps

Simulations numériques

- Environnement de développement
- Test numérique de convergence
- Équations d'Euler
- Perspectives

Environnement de développement

Langage de programmation

Python 3



- Bibliothèques utilisées :
 - NumPy pour le calcul matriciel,
 - SciPy pour le solveur non linéaire,
 - meshio pour lecture / écriture sur le maillage.
- Non parallélisé pour le moment.

Génération de maillage

Gmsh



- Open-source.
- Maillages 1D, 2D, 3D, non structurés.
- Pre et post-processing.
- Langage de script.
- API C, C++, Python, Julia, Fortran.

Test numérique de convergence – configuration

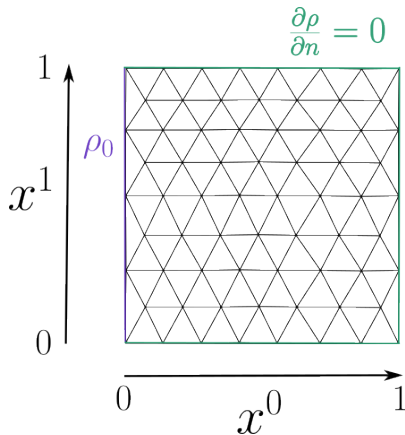


Figure – Domaine discrétisé et conditions limites

Equation de transport

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}(U) = 0,$$

avec $T(U) = \left(\gamma \rho \quad \frac{\gamma}{c} \rho v \right)$.

Domaine : carré unité $[0; 1]^2$.

Vitesse : $v = 0.4$

Conditions aux limites :

- Dirichlet : $\rho_0(x) = \exp\left(\left(\frac{x-0.3}{0.1}\right)^2\right)$,
- Neumann sur les autres côtés.

Test numérique de convergence – premier ordre

Notations :

- $\Delta x = \min_K \frac{|K|}{|\partial K|}$ représente la « taille » du maillage.
- $e_{L^2} = \frac{\|\rho_{\text{ex}}(t,x) - \rho_h\|}{\|\rho_{\text{ex}}(t,x)\|}$ est l'erreur relative avec norme L^2 .

Nb cellules	Δx	e_{L^2}	Pente
1.62000e+02	0.01320145	0.45818549	—
6.48000e+02	0.00660072	0.34380968	0.41432182
2.59200e+03	0.00330036	0.23328525	0.55951489
1.03680e+04	0.00165018	0.14477816	0.68825105
4.14720e+04	0.00082509	0.08302003	0.80231262
1.65888e+05	0.00041255	0.0449368	0.885562

Table – Schéma espace-temps au premier ordre

Test numérique de convergence – second ordre

On peut obtenir une convergence au second ordre en appliquant un schéma **MUSCL** (**M**onotonic **U**pstream-centered **S**cheme for **C**onservation **L**aws).

→ Approximation par des fonctions affines par morceaux au lieu de fonctions constantes par morceaux, dans le schéma volumes finis.

Nb cellules	Δx	e_{L^2}	Pente
1.62000e+02	0.01320145	0.30279079	—
6.48000e+02	0.00660072	0.12092761	1.32417758
2.59200e+03	0.00330036	0.0316328	1.93465064
1.03680e+04	0.00165018	0.00654552	2.27284145
4.14720e+04	0.00082509	0.00155193	2.07643975
1.65888e+05	0.00041255	0.00045802	1.76057627

Table – Schéma espace-temps au second ordre

Simulations numériques des équations d'Euler

Cas-tests pour les équations d'Euler en 1D

- **Problèmes de Riemann.**
- Donnée initiale avec discontinuité ; solution analytique.
- Référence : Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer Science & Business Media

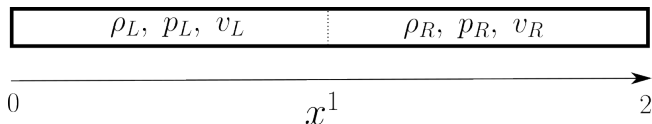


Figure – Domaine des cas-tests Euler 1D

Test	ρ_L	p_L	v_L	ρ_R	p_R	v_R	t_f
1	1.0	1.0	0.0	0.125	0.1	0.0	0.25
2	1.0	0.4	-2.0	1.0	0.4	2.0	0.15

Table – Conditions initiales pour les cas-tests Euler 1D

Simulations numériques des équations d'Euler

Test 1 : tube à choc de Sod, densité ρ

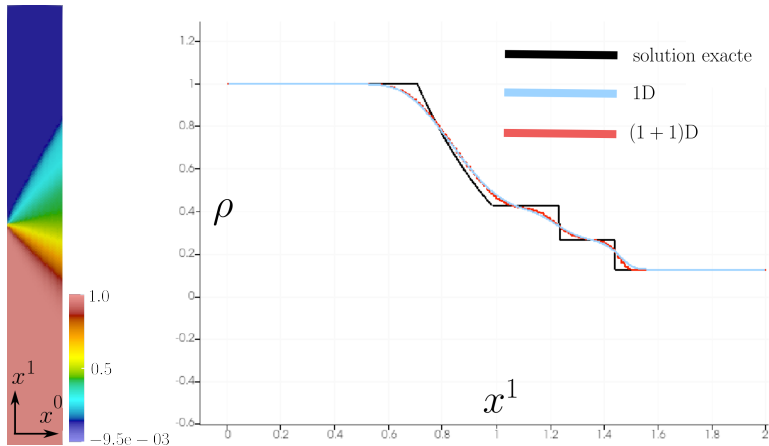


Figure – Test 1, densité ρ

Simulations numériques des équations d'Euler

Test 1 : tube à choc de Sod, pression p

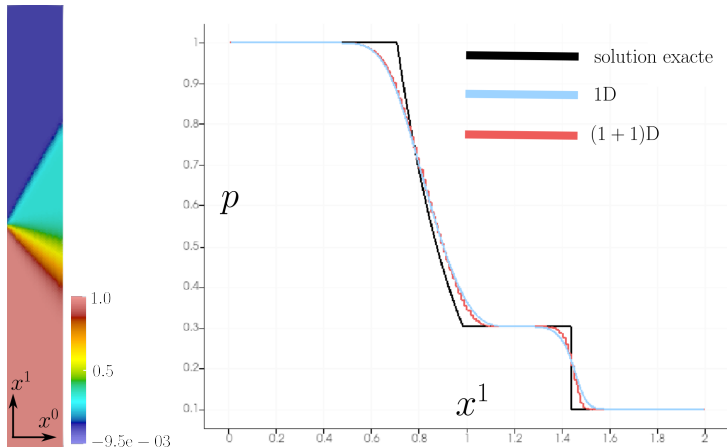


Figure – Test 1, pression p

Simulations numériques des équations d'Euler

Test 1 : tube à choc de Sod, vitesse v

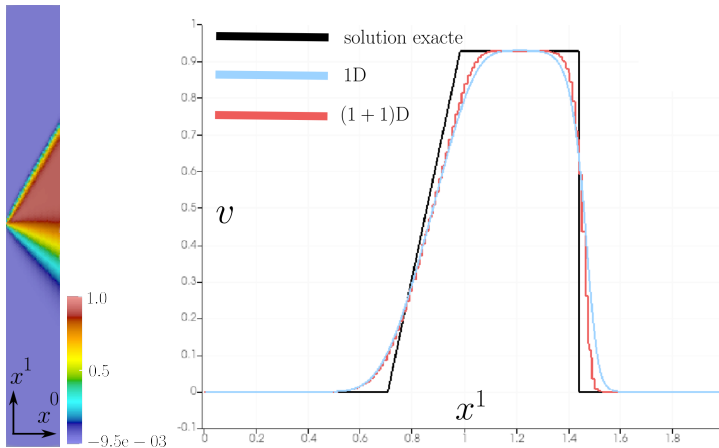


Figure – Test 1, vitesse v

Simulations numériques des équations d'Euler

Test 2 : problème 123, densité ρ

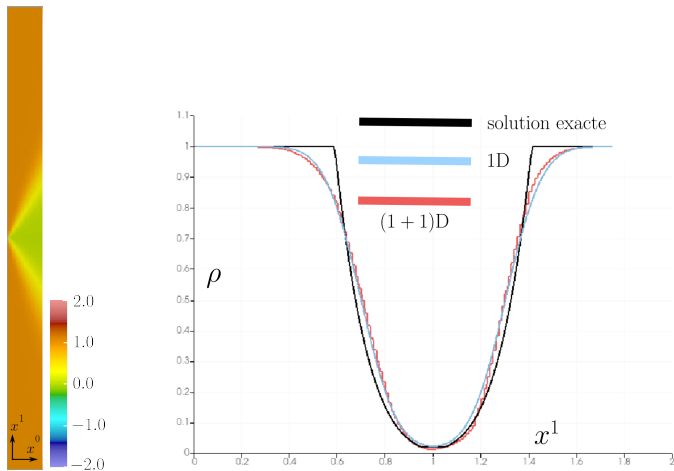


Figure – Test 2, densité ρ

Simulations numériques des équations d'Euler

Test 2 : problème 123, pression p

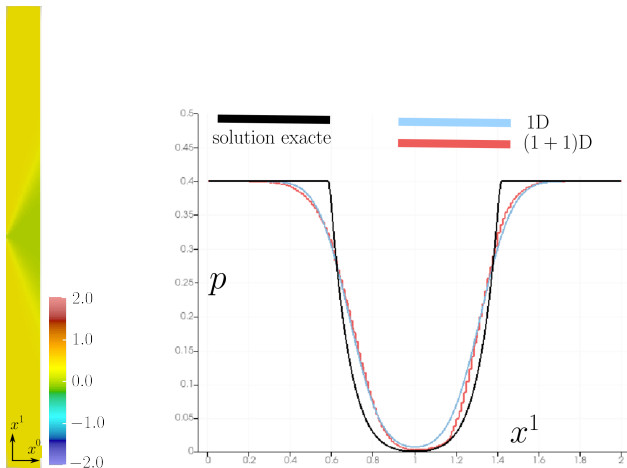


Figure – Test 2, pression p

Simulations numériques des équations d'Euler

Test 2 : problème 123, vitesse v

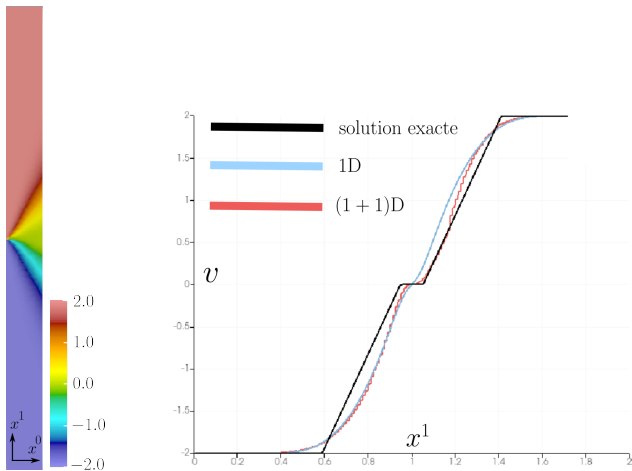


Figure – Test 2, vitesse v

Perspectives – (2+1)D

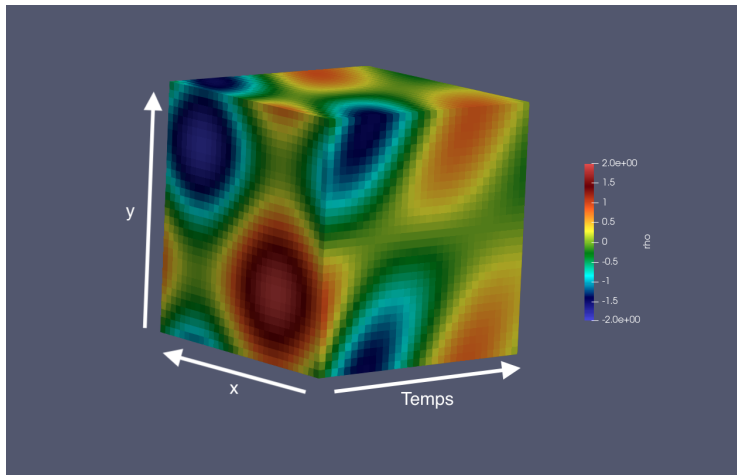


Figure – Transport de la fonction $(x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$

Perspectives – adaptation de maillage

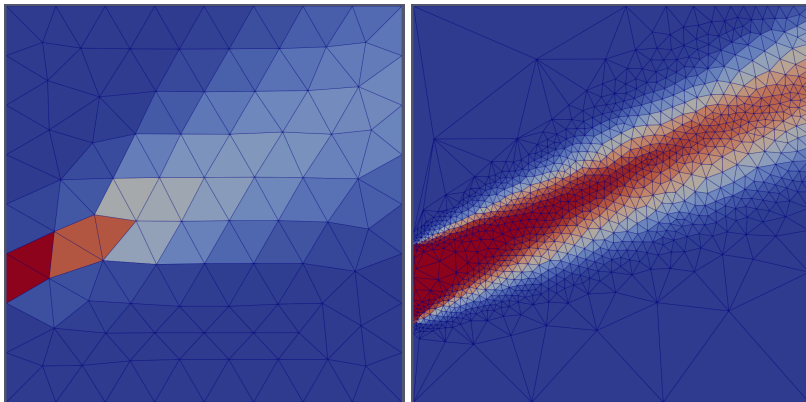


Figure – Maillage grossier (gauche) et maillage adapté (droite).

Autre perspectives

- **Maillage 4D** : encore en développement [*Dumont & Jourdan 2018*]
- Optimisation & parallélisation pour **gain en temps de calcul**
- Étude de schéma d'ordre élevé pour **gain en précision**
- Applications d'intérêt : interaction fluide-structure, frontière mobile, etc.
- Théorie : **mieux se conformer** au formalisme de la géométrie différentielle et aux principes de la relativité restreinte.

Merci pour votre attention.

Slides complémentaires.

L'intervalle ds

Intervalle constant :

$$ds^2 = (cd\tau)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

où τ est le temps propre.

Pour un observateur inertiel avec $x^0 = ct$ et $g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= (cdt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right] \\ &= (cdt)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

où $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ la vitesse 3D pour un observateur inertiel. On définit le facteur

$$\gamma = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \text{ facteur de Lorentz.}$$

La quadrivitesse

La quadrivitesse est définie par :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad \text{remarquer que } \|\vec{u}\|^2 = \frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} = 1$$

Pour un observateur inertiel avec $x^0 = ct$ et $\gamma = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$$u^\mu \left(\gamma, \frac{\gamma}{c} \frac{dx^i}{dt} \right) \quad u^\mu \left(\gamma, \frac{\gamma}{c} v^i \right) \quad \text{ou} \quad cu^\mu (\gamma c, \gamma v^i)$$

On définit les observateurs propres tels que :

$$\hat{u}^\mu (1, 0, 0, 0)$$

en tout point.

Le vecteur vitesse est un vecteur normé dans la direction du temps.

Définition d'un champ de tenseur impulsion-énergie \mathbf{T}

Soit \mathbf{T} , tenseur impulsion-énergie, tenseur d'ordre 2 symétrique décrivant la matière.

Peut-être vu comme une généralisation du tenseur des contraintes de la 3D

Dimension des termes dans un système inertiel de coordonnées : énergie par unité de volume 3D.

On projette le tenseur impulsion-énergie sur le temps et l'espace et :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$$

Interprétation du tenseur impulsion-énergie

Dans le système propre de coordonnées avec $\hat{u}^\mu = (0, 0, 0, 1)$, on a

$$\hat{T}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \hat{q}^2 & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \hat{q}^3 & \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet d'interpréter physiquement chaque composante :

\mathcal{U} densité d'énergie totale : $\mathcal{U} = \rho_c c^2 = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{e_{int}}{c^2}\right)$

où ρ_c masse volumique et $\tilde{\rho}_c$ masse volumique au repos.

$\vec{\hat{q}}$ flux d'énergie \approx flux de chaleur

$\hat{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma}$ tenseur des contraintes

Lois de conservation

Soit un domaine espace-temps \mathcal{D}

Conservation de la masse au repos \Rightarrow

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \nabla \cdot (\tilde{\rho}_c \vec{u}) = 0$$

Conservation du tenseur impulsion-énergie $\mathbf{T} \Rightarrow$

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

avec $\mathbf{T} = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{e_{int}}{c^2}\right) \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$, on obtient :

$$\tilde{\rho}_c \frac{de_{int}}{ds} \vec{u} + \tilde{\rho}_c (c^2 + e_{int}) \vec{a} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{T}} = 0$$

Projection sur le temps de la conservation de \mathbf{T}

Conservation du tenseur impulsion-énergie $\mathbf{T} \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

On projette sur le temps :

$$\vec{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \left(\tilde{\rho}_c \frac{de_{int}}{ds} \vec{u} + \tilde{\rho}_c (c^2 + e_{int}) \vec{a} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u}) + \nabla \cdot \overline{\mathbf{T}} \right) = 0$$

$$\tilde{\rho}_c \frac{de_{int}}{ds} = \overline{\mathbf{T}} : \mathbf{d} - \nabla \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{a} \quad \text{avec} \quad \mathbf{d} = \text{sym}(\nabla \vec{u})$$

La projection sur le temps de la conservation du tenseur impulsion-énergie correspond à un bilan covariant de l'énergie interne :
 pendant du 1er principe de la thermodynamique en mécanique classique.

La projection sur l'espace de la conservation du tenseur impulsion-énergie est le pendant du bilan de l'impulsion en mécanique classique.