Théorie du second gradient dans le cadre relativiste
Covariance générale versus Objectivité

M. Chapon*, L. Darondeau**, R. Desmorat*, C. Ecker*, B. Kolev*

*LMPS (Saclay) **IMJ-PRG (Paris)

GDR GDM, IRCAM, 20 nov. 2024

Outline

1. Relativité variationnelle — Théories d'ordres supérieurs

2. Structures espace-temps : introduction de l'observateur

3. Limite classique et problème de l'objectivité

Outline

Relativité variationnelle

Souriau, 1958, 1960, 1964

- Souriau a proposé une formulation claire et détaillée de l'hyperélasticité dans le cadre de la relativité générale, comme cas particulier de sa relativité variationnelle, inspirée de la théorie de jauge.
- Elle consiste à ajouter des lagrangiens

$$\mathscr{L}\underbrace{[g,\Psi]}_{\text{champs}} = \underbrace{\mathscr{H}[g]}_{\text{Gravitation}} + \underbrace{\mathscr{L}^{\text{mat}}[g,\Psi]}_{\text{Matière}}$$

dépendant :

- de la métrique g de l'univers,
- de potentiels de jauge (ici absents),
- et de champs de matière Ψ,

chacun d'entre eux décrivant un phénomène physique, et à rechercher les points critiques du lagrangien total (Principe de moindre action).

La relativité variationnelle : une théorie des jets

- En pratique, on considère uniquement des fonctionnelles $\mathscr{L}$ locales,
  - *i.e.*, dont la densité lagrangienne L dépend uniquement du k-jet j^k_m des variables considérées,
  - c'est à dire de leurs valeurs ponctuelles en un point m ainsi que de celles de leur dérivées jusqu'à l'ordre k.
- En ce qui nous concerne, cela veut dire que :

$$\mathscr{L}[g, \Psi] = \int L(j^\ell_m g, j^n_m \Psi)\ \mathrm{vol}_g \, .$$

- Le support d'intégration n'est pas précisé car il est admis qu'il consiste en un domaine (relativement compact) d'une carte locale U.
  On écrira si nécessaire

$$\mathscr{L}_U[g, \Psi] = \int_U L(j^\ell_m g, j^n_m \Psi)\ \mathrm{vol}_g \, .$$

COVARIANCE GÉNÉRALE

Le postulat fondamental de la relativité générale est que les lois de la physique sont indépendantes de la paramétrisation locale de l'Univers.

- Cela signifie que le Lagrangien $\mathscr{L}$ est invariant par tout difféomorphisme (local) φ, *i.e.*,

$$\mathscr{L}(\varphi^* g, \varphi^* \Psi) = \mathscr{L}(g, \Psi),$$

où

$$\varphi^* g = (T\varphi)^\star \, (g \circ \varphi)(T\varphi), \quad \text{et} \quad \varphi^* \Psi = \Psi \circ \varphi.$$

- Ceci se traduit sur la densité lagrangienne L de $\mathscr{L}$ par

$$L(j_m^\ell(\varphi^* g), j_m^n(\varphi^* \Psi)) = L(j_{\varphi(m)}^\ell g, j_{\varphi(m)}^n \Psi),$$

pour tout difféomorphisme local φ.

Champ de matière

- La modélisation de la matière parfaite adoptée par Souriau (1958, 1964) s'inspire de la théorie de jauge,
  - où les champs de matière sont décrits par des sections d'un fibré vectoriel (ici un fibré trivial).
- Un champ de matière parfaite est donc une fonction vectorielle

$$\Psi : \mathscr{M} \to V \simeq \mathbb{R}^3,$$

où $\mathscr{M}$, l'Univers, est une variété de dimension 4, munie d'une métrique lorentzienne g de signature $(-, +, +, +)$.

Remarque

La notation Ψ pour le champ de matière n'est pas anodine : Ψ représente la fonction d'onde dans le cadre de la mécanique quantique.

HYPOTHÈSES DE LA MATIÈRE PARFAITE

- Pour décrire la matière, on fait de plus l'hypothèse que Ψ est une submersion et que le noyau de $T\Psi$ (de dimension 1) est de type temps.
- La matière est décrite par une mesure de masse μ définie sur une partie $\mathscr{B} \subset V$, le body, qui labellise les particules de matière.
- Comme Ψ est une submersion, il existe un champ de vecteurs $\mathbf{P}$, le courant de matière qui ne s'annule pas sur $\Psi^{-1}(\mathscr{B})$ et défini par

$$i_{\mathbf{P}}\, \mathrm{vol}_g = \mathbf{P} \cdot \mathrm{vol}_g = \Psi^* \mu, \qquad T_m \Psi . \mathbf{P}(m) = 0, \qquad g(\mathbf{P}, \mathbf{P}) < 0.$$

- La quantité $\rho_r := \sqrt{-g(\mathbf{P}, \mathbf{P})}$ est la densité de masse au repos et

$$\mathbf{P} = \rho_r \mathbf{U}, \qquad g(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -1.$$

Le produit vectoriel des gradients

- En fixant une base $(\mathbf{E}_I)$ de V et en désignant par Ψ^I, les composantes de Ψ dans cette base, on obtient alors une 3-forme sur $\mathscr{M}$ en posant

$$\omega := \mathrm{d}\Psi^1 \wedge \mathrm{d}\Psi^2 \wedge \mathrm{d}\Psi^3 = \Psi^*(\mathbf{E}^1 \wedge \mathbf{E}^2 \wedge \mathbf{E}^3).$$

- Le champ de vecteurs $\mathbf{W}$, défini implicitement par $\omega = i_{\mathbf{W}} \operatorname{vol}_g$, est le produit vectoriel de $\operatorname{grad}^g \Psi^1$, $\operatorname{grad}^g \Psi^2$, $\operatorname{grad}^g \Psi^3$.

$$\omega = i_{\mathbf{W}} \operatorname{vol}_g = \mathbf{W} \cdot \operatorname{vol}_g, \qquad T_m\Psi.\mathbf{W}(m) = 0, \qquad g(\mathbf{W}, \mathbf{W}) < 0.$$

- En écrivant

$$\mu = \rho_V \, \mathbf{E}^1 \wedge \mathbf{E}^2 \wedge \mathbf{E}^3,$$

on voit que $\mathbf{P} = (\rho_V \circ \Psi)\mathbf{W}$.

Les trois vecteurs **P**, **W** et **U** sont donc proportionnels.

Repère matériel

On introduit le repère suivant dit matériel

$$\mathscr{F}^{\mathrm{mat}} := \left(-\mathbf{U}^{\flat}, \mathrm{d}\Psi^1, \mathrm{d}\Psi^2, \mathrm{d}\Psi^3\right)^{\star} = (\mathbf{U}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\,, \qquad g(\mathbf{U}, \boldsymbol{e}_I) = 0.$$

Lemme

Ce repère $\mathscr{F}^{mat}$ est covariant à (g, Ψ), ce qui signifie que

$$\mathscr{F}^{mat}(\varphi^* g, \varphi^* \Psi) = \varphi^* \mathscr{F}^{mat}(g, \Psi),$$

pour tout difféomorphisme qui préserve l'orientation.

Remarque

Le repère matériel est construit en complétant le pullback

$$\boldsymbol{e}^I = \Psi^* \mathbf{E}^I = \mathrm{d}\Psi^I$$

d'un co-repère $(\mathbf{E}^I)$ défini sur V (et donc sur le body) en un co-repère de $\mathscr{M}$, d'où son nom.

Hyperélasticité relativiste du premier gradient

Souriau (1958, 1964)

- On se donne a priori un lagrangien

$$\mathscr{L}^{\text{matter}}(g, \Psi) = \int L_0 \left(g_{\mu\nu}, \Psi^I, \partial_\lambda \Psi^I\right) \mathrm{vol}_g \,.$$

- Souriau montre que si celui-ci est covariant général, alors il se réécrit

$$\mathscr{L}^{\text{matter}}(g, \Psi) = \int L(\Psi, \mathbf{K}) \, \mathrm{vol}_g,$$

où $\mathbf{K} := (T\Psi)g^{-1}(T\Psi)^\star$ est appelé la conformation.

QU'EST-CE QUE LA CONFORMATION ?

- C'est une fonction à valeurs vectorielles (dans S^2V) et ses composantes dans la base $(\mathbf{E}^I)$ de V s'écrivent

$$K^{IJ} = \mathbf{K}(\mathbf{E}^I, \mathbf{E}^J) = g^{-1}(\mathrm{d}\Psi^I, \mathrm{d}\Psi^J) = g(\mathrm{grad}^g\, \Psi^I, \mathrm{grad}^g\, \Psi^J).$$

- C'est la partie spatiale des composantes de g^{-1} dans le repère $\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}$:

$$\left[g^{-1}\right]_{\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{pmatrix}.$$

- C'est un invariant de la relativité générale, ce qui signifie que :

$$\mathbf{K}(\varphi^* g, \varphi^* \Psi) = \mathbf{K}(g, \Psi) \circ \varphi,$$

pour tout difféomorphisme φ.

- Sa limite classique correspond à $\mathbf{C}^{-1}$, l'inverse du tenseur de Cauchy-Green droit.

Comment fabriquer des invariants de la RG

Souriau nous montre la voie avec la construction de la conformation.

- Pour commencer, toute fonction scalaire ou vectorielle covariante $f(\varphi^* g, \varphi^* \Psi) = f(g, \Psi) \circ \varphi$ définit un invariant de la relativité générale.

Disposant d'un champ de matière parfaite Ψ, on peut étendre ce processus à tout champ de tenseur $\mathbf{T}$ défini sur $\mathscr{M}$ et covariant de (g, Ψ).

- Grâce à la métrique g, on fabrique sa version contravariante $\mathbf{T}^\sharp$.
- Les composantes de ce tenseur dans le repère $\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}$ sont des invariants de la relativité générale.
- Pourquoi se restreindre à des tenseurs contravariants ?
  car de manière intrinsèque, ce sont les seuls auxquels on peut appliquer un "pushforward" vers V.

- Partant des variables $(g, \Psi, T\Psi)$, on construit le repère $\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}(g, \Psi)$ et on effectue le changement de variables :

$$(g, \Psi, T\Psi) \mapsto ([g^{-1}]_{\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}}, \Psi, \mathscr{F}^{\mathrm{mat}}).$$

- Étant donné que toute l'information portée par $[g^{-1}]_{\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}}$ est contenue dans $\mathbf{K}$, on a

$$([g^{-1}]_{\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}}, \Psi, \mathscr{F}^{\mathrm{mat}}) = (\mathbf{K}, \Psi, \mathscr{F}^{\mathrm{mat}}).$$

- L'hypothèse de covariance générale du lagrangien et le fait que $\mathrm{GL}^+(4, \mathbb{R})$ agisse transitivement sur les bases orientées de $\mathbb{R}^4$ permet de conclure que L ne dépend pas de $\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}$ mais seulement de Ψ et $\mathbf{K}$.

En utilisant la méthode précédente, on obtient le résultat suivant.

Théorème

Si le lagrangien

$$\mathscr{L}^{matter}(g,\Psi) = \int L_0(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \partial_\rho\partial_\lambda g_{\mu\nu}, \Psi^I, \partial_\lambda \Psi^I, \partial_\rho\partial_\lambda \Psi^I)\, \mathrm{vol}_g$$

est covariant général, alors, sa densité lagrangienne L_0 se réécrit

$$L_0 = L(\Psi, [g^{-1}]_{\mathscr{F}^{mat}}, [\mathbf{R}_g^\sharp]_{\mathscr{F}^{mat}}, [(\mathrm{Hess}^g\,\Psi)^\sharp]_{\mathscr{F}^{mat}}),$$

où $\mathbf{R}_g$ est le tenseur de courbure, $\mathrm{Hess}^g\,\Psi = \nabla^g \mathrm{d}\Psi$
et toutes les grandeurs introduites sont des invariants de la relativité générale.

Composantes matérielles de $\mathrm{Hess}^g \Psi$

$$[(\mathrm{Hess}^g \Psi^I)^\sharp]_{\mathscr{F}^{\mathrm{mat}}} = \begin{pmatrix} -c^{-2}A^I & c^{-1}\boldsymbol{L}^I \\ c^{-1}\boldsymbol{L}^I & -\boldsymbol{H}^I \end{pmatrix}.$$

- Le vecteur $\mathbf{A} = (A^I)$ est l'accélération matérielle relativiste,

$$A^I := -c^2(\mathrm{Hess}^g \Psi^I)(\mathbf{U}, \mathbf{U}),$$

- Le tenseur $\mathbf{L} = (L^{IJ})$ est le "gradient matériel relativiste" des vitesses,

$$L^{IJ} := -c\,(\mathrm{Hess}^g \Psi^I)(\mathbf{U}, \mathrm{grad}^g \Psi^J),$$

- Le tenseur $\mathbf{H} = (H^{IJK})$ est le "gradient matériel relativiste" des déformations,

$$H^{IJK} := -(\mathrm{Hess}^g \Psi^I)(\mathrm{grad}^g \Psi^J, \mathrm{grad}^g \Psi^K).$$

Termes de couplage gravitation/matière

Les composantes $[(\mathbf{R}_g)^\sharp]_{\mathscr{F}^{\text{mat}}}$ fournissent également trois nouveaux invariants

$$\mathbf{M}_4 = \left(M_4^{IJKL}\right), \qquad \mathbf{M}_3 = \left(M_3^{IJK}\right), \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_2 = \left(M_2^{IJ}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} M_4^{IJKL} &:= \mathbf{R}_g(\mathrm{d}\Psi^I, \operatorname{grad}^g \Psi^J, \operatorname{grad}^g \Psi^K, \operatorname{grad}^g \Psi^L), \\ M_3^{IJK} &:= -c\, \mathbf{R}_g(\mathrm{d}\Psi^I, \operatorname{grad}^g \Psi^J, \operatorname{grad}^g \Psi^K, \mathbf{U}), \\ M_2^{IJ} &:= c^2\, \mathbf{R}_g(\mathrm{d}\Psi^I, \mathbf{U}, \operatorname{grad}^g \Psi^J, \mathbf{U}). \end{aligned}$$

Corollaire

Toute densité lagrangienne d'un lagrangien $\mathscr{L}^{\text{matter}}(g, \Psi)$ de second gradient et covariant général se réécrit

$$L_0 = L(\Psi, \mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4)$$

en fonction des invariants relativistes $\{\Psi, \mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4\}$.

Exemple : les fluides à gradient

La théorie (classique) des fluides à gradient utilise le gradient de la densité de masse $\nabla\rho$ (ou de manière équivalente $\nabla \ln \rho$) comme variable additionelle.

Extension relativiste

On peut formuler une théorie à gradient des fluides relativistes à l'aide d'un lagrangien

$$L = \rho_r c^2 + E(\rho_r, \boldsymbol{h}),$$

où ρ_r est la densité de masse au repos et

$$\boldsymbol{h} := T\Psi . \operatorname{grad}^g(\ln \rho_r), \qquad h^I = \frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \ln \rho_r}{\partial x^\nu},$$

La variable $\boldsymbol{h}$ étant un invariant relativiste, elle s'exprime naturellement à l'aide des invariants Ψ, $\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{H}$. En effet :

$$\boldsymbol{h} = ((\mathrm{d} \ln \rho_V) \circ \Psi)\, \mathbf{K} - \mathbf{K}^{-1} : \mathbf{H},$$

où ρ_V défini par $\mu = \rho_V \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}$ joue le rôle d'un paramètre.

OUTLINE

Fonction temps et hypersurfaces de type espace

Introduction de l'observateur (Arnowitt et al, 1962, York, 1979, Gourgoulhon, 2012)

- Il n y a pas de mécanique sans une définition du temps et de l'espace.
- En relativité générale, il est nécessaire d'introduire une fonction temps, c'est à dire une fonction $\hat{t} \colon \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ avec un gradient de type temps.
- Ceci définit un feuilletage (une structure d'espace-temps ou structure 3+1) de $\mathscr{M}$ par des hypersurfaces de type espace (donc riemannienne)

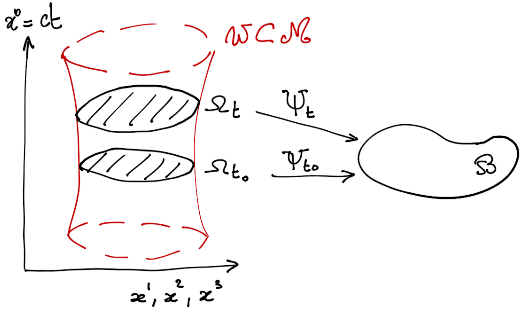
$$\Omega_t := \left\{ m \in \mathscr{M} ;\ \hat{t}(m) = t \right\} ,$$

- On supposera de plus que $g(\mathbf{U}, \operatorname{grad}^g \hat{t}) < 0$, ce qui signifie que

$$\operatorname{grad}^g \hat{t} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}$$

  définissent la même orientation temporelle.
- On introduit le vecteur unitaire $\mathbf{N}$ (*i.e.* $g(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = -1$) colinéaire à $\operatorname{grad}^g \hat{t}$ et pointant dans la même direction.

FEUILLETAGE DE $\mathscr{W}$ PAR LES HYPERSURFACES Ω_t



Lien avec la théorie classique de la MMC

- Les sous-variétés Ω_t jouent le rôle des configurations $\Omega = \Omega_{p(t)}$ de la théorie classique des milieux continus.
- Si $\Psi_t \colon \Omega_t \to \mathscr{B}$ désigne la restriction de Ψ à Ω_t,
  - alors son inverse Ψ_t^{-1} correspond au placement $p \colon \mathscr{B} \to \Omega_t$ de la MMC classique,
  - et $\mathbf{F} := T\Psi_t^{-1}$, au gradient de la transformation.

DÉCOMPOSITION ORTHOGONALE DE $\mathbf{U}$ RELATIVEMENT À $\mathbf{N}$

On décompose $\mathbf{U}$ en partie colinéaire et orthogonale à $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{U} = \gamma \left(\mathbf{N} + \frac{\boldsymbol{u}}{c} \right), \qquad \text{avec} \qquad g(\boldsymbol{u}, \mathbf{N}) = 0,$$

où

- $\gamma := -g(\mathbf{U}, \mathbf{N})$ est le facteur de Lorentz généralisé, car

$$\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{\|\boldsymbol{u}\|_g^2}{c^2}}, \quad \text{du fait que} \quad g(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -1,$$

- et $\boldsymbol{u}$ s'interprète comme la vitesse eulerienne du milieu.

Repère lié à l'observateur

En ajoutant à $\mathbf{N}$, en chaque point $m \in \mathscr{M}$, une base $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ de $\langle \mathbf{N} \rangle^{\perp}$, on obtient un nouveau repère

$$\mathscr{F}^{\text{obs}} := (\mathbf{N}, \bar{\boldsymbol{e}}_i)\,, \quad \text{with} \quad g(\mathbf{N}, \bar{\boldsymbol{e}}_i) = 0,$$

qu'on appellera repère lié à l'observateur.

Remarque

Si $\mathbf{N} = \mathbf{U}$, le repère matériel et le repère lié à l'observateur sont confondus. Dans ce cas $\boldsymbol{u} = 0$ et $\gamma = 1$.

Du repère de l'observateur à celui de la matière

- Écrire les composantes d'un tenseur contravariant $\mathbf{T}$ dans le repère matériel $\mathscr{F}^{\text{mat}}$ et dont les composantes sont généralement données dans un repère lié à l'observateur $\mathscr{F}^{\text{obs}}$ revient alors à un changement de base.
- On utilise alors les décompositions $3+1$ respectives de la matière et de l'observateur pour écrire ce changement de bases sous la forme d'une matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 1\times 1 & 1\times 3 \\ 3\times 1 & 3\times 3 \end{pmatrix}$$
- La matrice de changement de base de $\mathscr{F}^{\text{mat}}$ à $\mathscr{F}^{\text{obs}}$ et son inverse s'écrivent alors

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{u}^\flat \\ -\frac{1}{c}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{u} & \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma^2}{c}\mathbf{F}^\star\boldsymbol{u}^\flat \\ \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{u} & \left(I_3 + \frac{\gamma^2}{c^2}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^\flat\right)\mathbf{F} \end{pmatrix},$$

où $\boldsymbol{u}^\flat := \mathfrak{g}\boldsymbol{u}$, $\mathfrak{g}$ est la restriction de g à $\langle\mathbf{N}\rangle^\perp$ et $\mathbf{F} := (T\Psi_t)^{-1}$.

Hyper-élasticité en relativité restreinte

Le développement suivant est possible dans n'importe quel espace-temps statique (métrique ayant un vecteur de Killing de type temps donné par un gradient).
Dans celui-ci, on néglige l'influence de la matière étudiée (représentée par le champ Ψ) comme source de gravité (hypothèse de la matière passive).

L'espace-temps de Minkowski

C'est un modèle d'univers plat, difféomorphe à $\mathbb{R}^4$ et muni de la métrique

$$\eta = -c^2(dt)^2 + \mathfrak{g}, \quad \text{où} \quad \mathfrak{g} = \delta_{ij}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

dans les coordonnées canoniques $(x^0 = ct, x^i)$.

Le repère

$$\mathscr{F}^{\text{obs}} := \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

est lié à l'observateur pour la fonction temps $\hat{t} = x^0/c$.

Expressions des invariants en relativité restreinte

Parmi nos invariants $\mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$, ceux impliquant la courbure sont évidemment nulles, il reste donc :

- la conformation
$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}\left(\mathfrak{g}^{-1} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\right)\mathbf{F}^{-\star},$$
- l'accélération matérielle relativiste
$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{a}\,\mathbf{F}^{-\star}, \qquad \mathbf{a} := \gamma^2\left(\partial_t\boldsymbol{u} + \nabla^{\mathfrak{g}}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\right),$$
où $\mathbf{a}$ est interprété comme l'accélération spatiale relativiste (sur Ω_t),
- le ''gradient matériel relativiste'' des vitesses
$$\mathbf{L} = \gamma\mathbf{F}^{-1}\left((\nabla^{\mathfrak{g}}\boldsymbol{u})\,\mathfrak{g}^{-1} + \frac{1}{c^2}\,\partial_t\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\right)\mathbf{F}^{-\star},$$
- le ''gradient matériel relativiste'' des déformations
$$\boldsymbol{H}^I = \mathbf{F}^{-1}\Big[\mathfrak{g}^{-1}\mathbf{F}^{-\star}(\mathbf{F}^{-1}\nabla^{\mathfrak{q}}\mathbf{F})^I\mathbf{F}^{-1}\mathfrak{g}^{-1} - \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{g}^{-1}(\partial_t\mathbf{F}^{-\star})^I\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\otimes(\partial_t\mathbf{F}^{-1})^I\mathfrak{g}^{-1}\right) + \frac{1}{c^4}\partial_t(\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{u})^I\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\Big]\mathbf{F}^{-\star}.$$

OUTLINE

Structures galiléennes et limite de Newton-Cartan

Dixon (1975), Havas (1964), Künzle (1976), Duval–Künzle (1977), Duval (1985)

- Une structure galiléenne sur $\mathscr{M}$ est une paire $(\boldsymbol{\kappa}, \theta)$, où
  - $\boldsymbol{\kappa}$: un champ de tenseurs contravariants symétriques d'ordre 2 et de signature $(0, +, +, +)$ (*i.e. la co-métrique spatiale*),
  - θ : une 1-forme qui engendre le noyau de $\boldsymbol{\kappa}$ (*i.e. l'horloge*).

  La structure est intégrable si $\mathrm{d}\theta = 0$
  (et donc, au moins localement, $\theta = \mathrm{d}\hat{t}$).
- Une structure galiléenne $(\boldsymbol{\kappa}, \theta)$ peut être obtenue comme la limite d'une famille à 1 paramètre de métriques lorentziennes $\overset{\lambda}{g}$, telle que

$$\overset{\lambda}{g}{}^{-1} = \boldsymbol{\kappa} + O(\lambda),$$

  avec $\boldsymbol{\kappa}$ de signature $(0, +, +, +)$, et $\theta \in \ker \boldsymbol{\kappa}$.
- Si $\mathrm{d}\theta = 0$, alors, ∇^{λ} converges vers une dérivée covariante symétrique ∇ (Künzle, 1976), telle que $\nabla\boldsymbol{\kappa} = 0$ et $\nabla\theta = 0$.

- Dans ce cas, la structure galiléenne limite $(\boldsymbol{\kappa}, \theta)$ est obtenue en faisant tendre $c \to \infty$ dans l'expression suivante

$$\eta_c^{-1} = -c^{-2}\partial_t{}^2 + \partial_x{}^2 + \partial_y{}^2 + \partial_z{}^2,$$

ce qui détermine $\boldsymbol{\kappa} = \mathfrak{g}^{-1} = \partial_x{}^2 + \partial_y{}^2 + \partial_z{}^2$ et $\theta = \mathrm{d}t$.

- Les difféomorphismes φ qui préservent cette structure galiléenne

$$\varphi^*\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}, \quad \text{and} \quad \varphi^*\theta = \theta,$$

sont désignés comme les gallileomorphismes.

- Dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^4$, ils s'écrivent

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{b}(t), \qquad \bar{t} = t + a,$$

où $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{Q}(t)$ est une rotation de l'espace 3D, $\boldsymbol{b}(t)$ est un vecteur 3D, et a un scalaire.

Ce sont les changements d'observateurs de la mécanique classique.

Limite classique des invariants relativistes

- la conformation $\mathbf{K}$ converge vers l'inverse du tenseur de Cauchy-Green droit,
$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{F}^{\star}\mathfrak{g}\,\mathbf{F})^{-1},$$
- l'accélération matérielle relativiste $\mathbf{A}$ converge vers
$$\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{a}\,\mathbf{F}^{-\star},$$
où $\mathbf{a} = \partial_t \boldsymbol{u} + \nabla^{\mathfrak{g}}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ est l'accélération eulerienne,
- le "gradient matériel relativiste" des vitesses $\mathbf{L}$ converge vers
$$\mathbf{F}^{-1}(\nabla^{\mathfrak{g}}\boldsymbol{u})\,\mathfrak{g}^{-1}\,\mathbf{F}^{-\star},$$
où $\nabla^{\mathfrak{g}}\boldsymbol{u} = \hat{\mathbf{d}} + \hat{\mathbf{w}}$, contient à la fois le taux de déformation $\hat{\mathbf{d}}$ et la vorticité $\hat{\mathbf{w}}$.
- le "gradient matériel relativiste" des déformation $\mathbf{H}$ converge vers
$$(\mathbf{F}^{-1}\nabla^{\mathfrak{q}}\mathbf{F})^{\sharp^{\mathbf{C}}} \quad \text{de composantes} \quad \left((\mathbf{F}^{-1}\nabla^{\mathfrak{q}}\mathbf{F})^{\sharp^{\mathbf{C}}}\right)^{IJK} = (\mathbf{F}^{-1}\nabla^{\mathfrak{q}}\mathbf{F})^{I}{}_{PQ}C^{PK}C^{QL},$$
où $\mathbf{F}^{-1}\nabla^{\mathfrak{q}}\mathbf{F}$ est l'invariant fondamental (objectif) de la théorie des grandes transformations du second gradient.

Covariance générale versus Objectivité

- Toutes les limites galiléennes des invariants relativistes proviennent d'une théorie qui satisfait les principes de la relativité générale.
- Et pourtant, certains sont objectifs, d'autres non. Pourquoi ?
- Certains invariants $\mathbf{t}(g, \Psi)$ qu'on peut réécrire $\mathbf{t}(g^{-1}, \Psi)$, définis sur les métriques de Lorentz, s'étendent de manière continue au bord de ces structures, lorsque g^{-1} tend vers une co-métrique dégénérée $\boldsymbol{\kappa}$.
  - C'est le cas de **K** et de **H** mais pas de **A** et **L**.
- Dans ce cas, l'objectivité est assurée par passage à la limite.
- Dans les autres cas, cela contribue au débat sur la critique du principe d'objectivité, considéré parfois comme trop restrictif, notamment en mécanique des fluides (Edelen and McLennan, 1973, Astarita, 1979, Murdoch, 1983, Speziale, 1998).