

Fibré des repères et théorie du repère mobile

- Introduction à la théorie de jauge

Atelier GDR GDM, Nantes
29 Avril 2026

Clément Ecker
clement.ecker@ens-paris-saclay.fr

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS), 91190, Gif-sur-Yvette, France

Contexte

- ▶ Le fibré des repères est un prototype de fibré principal qui est la structure de base des théories de jauges;
- ▶ **Exemple : L'électro-magnétisme** [Weyl, 1918];
- ▶ Les références [Bleecker, 1981; Cendra et al., 1987; Kobayashi and Nomizu, 1996; Hamilton, 2017] sont difficiles à lire;
- ▶ Ce sont les objets que je manipule pour ma thèse et ils sont parfois évoqués dans le GDR;
- ▶ Une introduction aux théories de jauge à été demandée à Boris.

Sommaire

Fibrés des repères et repères mobiles

Connexions

Formes (locales) sur \mathcal{M} , tenseurs sur \mathcal{M} et formes basiques sur $\mathcal{R}(\mathcal{M})$

Introduction à la théorie de jauge

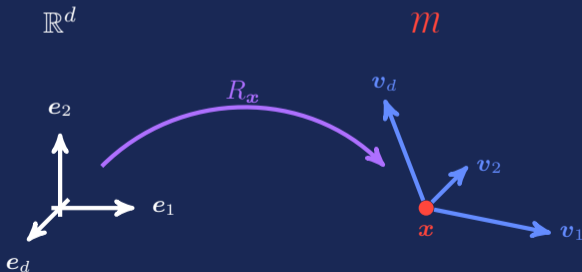
Fibrés des repères et repères mobiles

Repères mobiles [Car1935]

Repère ponctuel au point x d'une variété différentielle M de dimension d :

- ▶ Base non-orthonormale (v_i) de l'espace tangent $T_x M$ en x ;
- ▶ Isomorphisme linéaire R_x de \mathbb{R}^d dans $T_x M$.

$$v_1 := R_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Code couleur

- ▶ Red: points;
- ▶ Blue: vecteurs/matrices;
- ▶ Purple: repères.

Repères mobiles [Car1935]

Repère ponctuel au point x d'une variété différentielle M de dimension d :

- ▶ Base non-orthonormale (v_i) de l'espace tangent $T_x M$ en x ;
- ▶ Isomorphisme linéaire R_x de \mathbb{R}^d dans $T_x M$.

$$v_1 := R_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition : **Fibré des repères** $\mathcal{R}(M)$

$$\mathcal{R}(M) = \bigcup_{x \in M} \{R_x \text{ est un repère ponctuel en } x \in M\}.$$

Repères mobiles \mathcal{R} et trivialisations locales τ

Définition : **Repère mobile** \mathcal{R} sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \quad \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{U}) \\ \mathbf{x} &\mapsto R_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Exemple : (∂_{x^i}) est un repère mobile pour un système de coordonnées (x^i) sur \mathcal{U} .

Repères mobiles \mathcal{R} et trivialisations locales τ

Définition : **Repère mobile** \mathcal{R} sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \quad \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{U}) \\ \mathbf{x} &\mapsto R_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Exemple : (∂_{x^i}) est un repère mobile pour un système de coordonnées (x^i) sur \mathcal{U} .

Définition : **Trivialisations locale** τ sur $\mathcal{R}(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned} \tau: \quad \mathcal{R}(\mathcal{U}) &\rightarrow \mathcal{U} \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \\ R_{\mathbf{x}} &\mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{G}) \end{aligned}$$

Repères mobiles \mathcal{R} et trivialisations locales τ

Définition : **Repère mobile** \mathcal{R} sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \quad \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{U}) \\ \mathbf{x} &\mapsto R_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Exemple : (∂_{x^i}) est un repère mobile pour un système de coordonnées (x^i) sur \mathcal{U} .

Définition : **Trivialisations locale** τ sur $\mathcal{R}(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned} \tau: \quad \mathcal{R}(\mathcal{U}) &\rightarrow \mathcal{U} \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \\ R_{\mathbf{x}} &\mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{G}) \end{aligned}$$

\mathbf{G} est la matrice des composantes de $R_{\mathbf{x}}$ dans les bases (e_i) et (∂_{x^i}) .

Fonctions de transitions

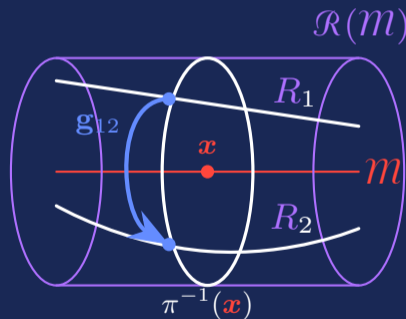
Soient $R_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{M})$ ($i = 1, 2$) deux repères mobiles.

Définition : Fonction de transition $g_{12} : \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \mapsto \text{GL}_d(\mathbb{R})$

La fonction de transition g_{12} de R_1 vers R_2 est :

$$R_2(\mathbf{x}) = R_1(\mathbf{x}) \circ g_{12}(\mathbf{x}),$$

où $R_i(\mathbf{x})$ est un repère en \mathbf{x} et $g_{12}(\mathbf{x})$ une matrice inversible.



Action (à droite) de $GL_d(\mathbb{R})$ sur le fibré des repères $\mathcal{R}(M)$

Définition

Le groupe $GL_d(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{R}(M)$ à droite par composition :

$$(R_x, \mathbf{A}) \mapsto \mathbf{R}_\mathbf{A} R_x := R_x \circ \mathbf{A} = R_x \mathbf{A}, \quad \text{pour } R_x \text{ un repère et } \mathbf{A} \in GL_d(\mathbb{R}).$$

Propriétés

- ▶ Si $\tau(R_x) = (x, \mathbf{G}) \in \mathcal{U} \times GL_d(\mathbb{R})$ est une Trivialisation locale sur \mathcal{U} :

$$\tau(R_x \mathbf{A}) = (x, \mathbf{G}\mathbf{A}).$$

- ▶ Cette action est simple, différentiable et propre ;
- ▶ Son application linéaire tangente s'écrit :

$$T_{R_x} \mathbf{R}_\mathbf{A} \cdot \delta R_x = (\delta R_x) \mathbf{A}, \quad \text{où } \delta R_x \in T_{R_x} \mathcal{R}(M) \text{ est une "variation de repères".}$$

Action (à droite) de $GL_d(\mathbb{R})$ sur le fibré des repères $\mathcal{R}(M)$

Définition

Le groupe $GL_d(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{R}(M)$ à droite par composition :

$$(R_x, \mathbf{A}) \mapsto \mathbf{R}_\mathbf{A} R_x := R_x \circ \mathbf{A} = R_x \mathbf{A}, \quad \text{pour } R_x \text{ un repère et } \mathbf{A} \in GL_d(\mathbb{R}).$$

Propriétés

- ▶ Si $\tau(R_x) = (x, \mathbf{G}) \in \mathcal{U} \times GL_d(\mathbb{R})$ est une Trivialisation locale sur \mathcal{U} :

$$\tau(R_x \mathbf{A}) = (x, \mathbf{G}\mathbf{A}).$$

- ▶ Cette action est simple, différentiable et propre ;
- ▶ Son application linéaire tangente s'écrit :

$$T_{R_x} \mathbf{R}_\mathbf{A} \cdot \delta R_x = (\delta R_x) \mathbf{A}, \quad \text{où } \delta R_x \in T_{R_x} \mathcal{R}(M) \text{ est une "variation de repères".}$$

$\mathcal{R}(M)$ possède une structure de fibré principal localement trivial :
de base M et de groupe structural $GL_d(\mathbb{R})$.

Champs fondamentaux X_u et sous-fibré vertical

Soit u un vecteur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = T_{\text{id}_{GL_d(\mathbb{R})}}GL_d(\mathbb{R}) = M_d(\mathbb{R})$ du groupe $GL_d(\mathbb{R})$.

Champs fondamentaux X_u et sous-fibré vertical

Soit u un vecteur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = T_{\text{id}_{\text{GL}_d(\mathbb{R})}} \text{GL}_d(\mathbb{R}) = M_d(\mathbb{R})$ du groupe $\text{GL}_d(\mathbb{R})$.

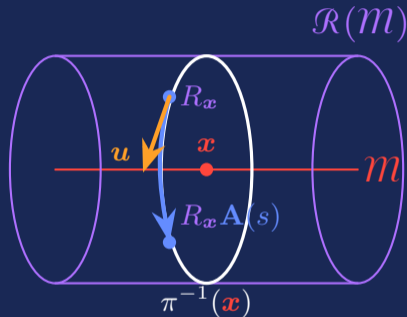
Définition : Champ fondamental $X_u \in \mathcal{X}(\mathcal{R}(M))$

X_u est engendré par $u \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$:

$$R_x \in \mathcal{R}(M), \quad (X_u)(R_x) := \left[\frac{d}{ds} (R_x \mathbf{A}(s)) \right]_{s=0}$$

où $s \mapsto \mathbf{A}(s)$ est un chemin de matrices dans $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ tel que :

$$\mathbf{A}(0) = \text{id}_{\text{GL}_d(\mathbb{R})} := \mathbf{1}, \quad \dot{\mathbf{A}}(0) = u.$$



Champs fondamentaux X_u et sous-fibré vertical

Soit u un vecteur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) = T_{\text{id}_{\text{GL}_d(\mathbb{R})}} \text{GL}_d(\mathbb{R}) = M_d(\mathbb{R})$ du groupe $\text{GL}_d(\mathbb{R})$.

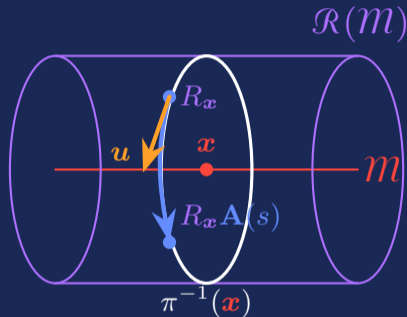
Définition : Champ fondamental $X_u \in \mathcal{X}(\mathcal{R}(M))$

X_u est engendré par $u \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$:

$$R_x \in \mathcal{R}(M), \quad (X_u)(R_x) := \left[\frac{d}{ds} (R_x \mathbf{A}(s)) \right]_{s=0}$$

où $s \mapsto \mathbf{A}(s)$ est un chemin de matrices dans $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ tel que :

$$\mathbf{A}(0) = \text{id}_{\text{GL}_d(\mathbb{R})} := \mathbf{1}, \quad \dot{\mathbf{A}}(0) = u.$$



Définition : Sous-fibré vertical V

$$V := \bigcup_{R_x \in \mathcal{R}(M)} \ker(T_{R_x} \pi), \quad \pi(R_x) = x, \text{ la projection canonique.}$$

Les vecteurs de V_{R_x} sont tangents aux fibres $\pi^{-1}(x)$.

Summary : Le fibré des repères comme prototype d'un fibré principal

A retenir

- ▶ L'ensemble des repères R_x en chaque point x d'une variété M forme :
un **fibré principal** $\mathcal{R}(M)$ de variété de base M et de **groupe structural** $GL_d(\mathbb{R})$
- ▶ Chaque **fibre** (ensemble des repères au même point, $\pi^{-1}(x)$), est isomorphe à $GL_d(\mathbb{R})$;
- ▶ Le **sous-fibré vertical** $V = \cup V_{R_x}$ est la distribution des :

$$V_{R_x} = \ker(T_{R_x}\pi) \quad (\text{vecteurs tangents aux fibres}).$$

Y a t'il une distribution canonique de sous-espaces "horizontaux" supplémentaires à V ?

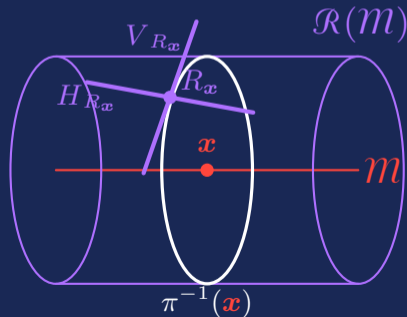
Connexions

Sous-fibrés horizontaux H

NON, il n'y a pas de supplémentaire canonique, mais on peut en **CHOISIR** un.

Définition: **Sous-fibré horizontal H ou connexion**

$$H = \bigcup_{R_x \in \mathcal{R}(M)} H_{R_x}, \quad \text{où en tout repère } R_x, T_{R_x} \mathcal{R}(M) = V_{R_x} \oplus H_{R_x}.$$



Sous-fibrés horizontaux H

NON, il n'y a pas de supplémentaire canonique, mais on peut en **CHOISIR** un.

Définition: **Sous-fibré horizontal H ou connexion**

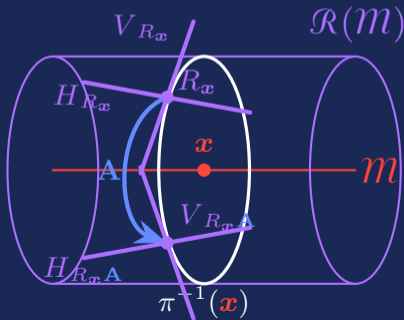
$$H = \bigcup_{R_x \in \mathcal{R}(M)} H_{R_x}, \quad \text{où en tout repère } R_x, T_{R_x} \mathcal{R}(M) = V_{R_x} \oplus H_{R_x}.$$

Définition : \mathcal{G} -connexions H

Une **connexion** est \mathcal{G} -équivariante si pour tout $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$:

$$H_{R_x A} = H_{R_x} A, \quad \text{car } T_{R_x} \mathbf{R}_A \cdot \delta R_x = (\delta R_x) A,$$

où $\delta R_x \in T_{R_x} \mathcal{R}(M)$ est une "variation de repères".



Formes de connexion ω sur le fibré des repères $\mathcal{R}(M)$

Définition - Théorème : **Forme de connexion** ω

Une connexion H est décrite par une unique 1-forme $\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ et vice-versa tq :

$$H_{R_x} = \ker(\omega_{R_x}), \quad \omega(X_u) = u, \text{ pour tout champ fondamental } X_u.$$

$$H \text{ est } GL_d\text{-équivariante} \iff (\mathbf{R}_A^* \omega)_{R_x}(\delta R_x) = \mathbf{A}^{-1} \omega_{R_x}(\delta R_x) \mathbf{A}.$$

Formes (locales) sur \mathcal{M} , tenseurs sur \mathcal{M}
et formes basiques sur $\mathcal{R}(\mathcal{M})$

Exemple : les champs de vecteurs sur M

Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs sur M :

- ▶ Ses composantes ψ dans un repère mobile R sur \mathcal{U} sont données par:

$$\psi(\mathbf{x}) := R(\mathbf{x})^{-1} (X(\mathbf{x})).$$

- ▶ On construit $\Psi : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui donne les composantes de X dans n'importe quel repère R_x :

$$\Psi(R_x) := R_x^{-1} (X(\pi(R_x))).$$

Exemple : les champs de vecteurs sur M

Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs sur M :

- ▶ Ses composantes ψ dans un repère mobile R sur \mathcal{U} sont données par:

$$\psi(\mathbf{x}) := R(\mathbf{x})^{-1} (X(\mathbf{x})).$$

- ▶ On construit $\Psi : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui donne les composantes de X dans n'importe quel repère R_x :

$$\Psi(R_x) := R_x^{-1} (X(\pi(R_x))).$$

La fonction $\Psi \in \Omega^0(\mathcal{R}(M), \mathbb{R}^d)$ est **equivariante** :

$$\Psi(R_x \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \Psi(R_x), \quad \psi \text{ est sa forme locale } \psi := R^* \Psi = \Psi \circ R.$$

Exemple : les champs de vecteurs sur \mathcal{M}

Soit $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteurs sur \mathcal{M} :

- ▶ Ses composantes ψ dans un repère mobile R sur \mathcal{U} sont données par:

$$\psi(\mathbf{x}) := R(\mathbf{x})^{-1} (\mathbf{X}(\mathbf{x})).$$

- ▶ On construit $\Psi : \mathcal{R}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui donne les composantes de \mathbf{X} dans n'importe quel repère R_x :

$$\Psi(R_x) := R_x^{-1} (\mathbf{X}(\pi(R_x))).$$

La fonction $\Psi \in \Omega^0(\mathcal{R}(\mathcal{M}), \mathbb{R}^d)$ est **equivariante** :

$$\Psi(R_x \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \Psi(R_x), \quad \psi \text{ est sa forme locale } \psi := R^* \Psi = \Psi \circ R.$$

Formule de changement de jauges : $\psi := R^* \Psi \in \Omega^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$

Sur $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, ψ_1 et ψ_2 sont reliés par :

$$\psi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{12}(\mathbf{x})^{-1} \psi_1(\mathbf{x}), \quad \text{où } R_2(\mathbf{x}) = R_1(\mathbf{x}) \mathbf{g}_{12}(\mathbf{x}).$$

Formes basiques α sur $\mathcal{R}(M)$ et formes locales \mathcal{A} sur M

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel et $\rho : GL_d(\mathbb{R}) \mapsto GL(E)$ une représentation linéaire.

$$\text{Exemples : } \begin{cases} E = \mathbb{R}^d & \text{et } \rho(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in E, \\ E = \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) & \text{et } \rho(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{e}\mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{e} \in E. \end{cases}$$

Formes basiques α sur $\mathcal{R}(M)$ et formes locales \mathcal{A} sur M

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel et $\rho : \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{GL}(E)$ une représentation linéaire.

$$\text{Exemples : } \begin{cases} E = \mathbb{R}^d & \text{et } \rho(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in E, \\ E = \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) & \text{et } \rho(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{e}\mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{e} \in E. \end{cases}$$

Définition : **Forme basique** $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E)$

$$\begin{cases} \rho\text{-équivarante :} & \mathbf{R}_\mathbf{A}^* \alpha = \rho(\mathbf{A})^{-1} \alpha, \\ \text{horizontale :} & \alpha(\dots, \mathbf{X}_u, \dots) = \mathbf{0}_E, \quad \forall \mathbf{X}_u \text{ (champ fondamental)}. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E) \\ \begin{array}{c} \nearrow \\ R \\ \downarrow \pi \end{array} \\ \mathcal{A} \in \Omega^k(\mathcal{U}, E) \end{array}$$

Définition : **Forme locale** $\mathcal{A} := R^* \alpha \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$

$$\mathcal{A}_x(\delta x_1, \dots, \delta x_k) := \alpha_{R(x)}(T_x R \cdot \delta x_1, \dots, T_x R \cdot \delta x_k).$$

Tenseurs de type E sur M

Soit $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E)$ une forme basique et $\mathcal{A} := R^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$ sa forme locale:

$$\begin{cases} \rho\text{-équivarante} & (\mathbf{R}_A^* \alpha = \rho(\mathbf{A})^{-1} \alpha) \\ \text{horizontale} & (\alpha(\dots, \mathbf{X}_u, \dots) = \mathbf{0}_E) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k) := \alpha_{R(\mathbf{x})}(T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}_1, \dots, T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}_k).$$

Tenseurs de type E sur M

Soit $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E)$ une forme basique et $\mathcal{A} := R^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$ sa forme locale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\text{-équivarante } (\mathbf{R}_A^* \alpha = \rho(\mathbf{A})^{-1} \alpha) \\ \text{horizontale } (\alpha(\dots, \mathbf{X}_u, \dots) = \mathbf{0}_E) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k) := \alpha_{R(\mathbf{x})}(T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}_1, \dots, T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}_k).$$

Formule de changement de jauges : $\mathcal{A} := R^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$

$$(\mathcal{A}_2)_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k) = \rho(\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x}))^{-1}(\mathcal{A}_1)_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k).$$

On note, $R_2(\mathbf{x}) = R_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x})$ et le lien entre leurs applications linéaires tangentes est :

$$T_{\mathbf{x}}R_2 \cdot \delta \mathbf{x} = (T_{\mathbf{x}}R_1 \cdot \delta \mathbf{x})\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x}) + (\mathbf{X}_u)(R_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x})), \quad \text{où } \mathbf{u} = \mathbf{g}_{12}^{-1}(\mathbf{x})(T_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_{12} \cdot \delta \mathbf{x}) \in \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}).$$

Tenseurs de type E sur M

Soit $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E)$ une forme basique et $\mathcal{A} := R^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$ sa forme locale:

$$\begin{cases} \rho\text{-équivarante} & (\mathbf{R}_A^* \alpha = \rho(\mathbf{A})^{-1} \alpha) \\ \text{horizontale} & (\alpha(\dots, \mathbf{X}_u, \dots) = \mathbf{0}_E) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k) := \alpha_{R(\mathbf{x})}(T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}_1, \dots, T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}_k).$$

Formule de changement de jauges : $\mathcal{A} := R^*\alpha \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$

$$(\mathcal{A}_2)_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k) = \rho(\mathbf{g}_{12}(\mathbf{x}))^{-1} (\mathcal{A}_1)_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_k).$$

Les formes locales \mathcal{A} donne les composantes d'un tenseur de M de type E dans les repères R .

Formes locales de connexion Γ sur \mathcal{M}

Soient $\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ une connexion, $R: \mathcal{U} \mapsto \mathcal{R}(\mathcal{M})$ un repère mobile.

Définition : Formes locales de connexion $\Gamma := R^*\omega : T\mathcal{U} \mapsto \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}) := \omega_{R(\mathbf{x})}(T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{U}.$$

$$\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$$

$$R \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \pi \end{array}$$

$$\Gamma \in \Omega^1(\mathcal{U}, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$$

Formes locales de connexion Γ sur \mathcal{M}

Soient $\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ une connexion, $R: \mathcal{U} \mapsto \mathcal{R}(\mathcal{M})$ un repère mobile.

Définition : Formes locales de connexion $\Gamma := R^*\omega : T\mathcal{U} \mapsto \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{x}) := \omega_{R(\mathbf{x})}(T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta\mathbf{x}), \quad \delta\mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{U}.$$

$$\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(\mathcal{M}), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$$

$$R \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \pi \end{array}$$

$$\Gamma \in \Omega^1(\mathcal{U}, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$$

Formule de changement de jauges :

Sur $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, Γ_1 et Γ_2 sont reliées par :

$$(\Gamma_2)_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{12}^{-1}(\Gamma_1)_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{x})\mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{12}^{-1}(T_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_{12} \cdot \delta\mathbf{x}). \quad (1)$$

Formes locales de connexion Γ sur M

Soient $\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$ une connexion, $R: \mathcal{U} \mapsto \mathcal{R}(M)$ un repère mobile.

Définition : Formes locales de connexion $\Gamma := R^*\omega : T\mathcal{U} \mapsto \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R})$

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}) := \omega_{R(\mathbf{x})}(T_{\mathbf{x}}R \cdot \delta \mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{U}.$$

$$\omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$$

$$R \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \pi \end{array}$$

$$\Gamma \in \Omega^1(\mathcal{U}, \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$$

Formule de changement de jauges :

Sur $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, Γ_1 et Γ_2 sont reliées par :

$$(\Gamma_2)_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{g}_{12}^{-1}(\Gamma_1)_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{x})\mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{12}^{-1}(T_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_{12} \cdot \delta \mathbf{x}). \quad (1)$$

Inversement, étant donné un recouvrement de M par des formes Γ vérifiant (1) :
Il existe une unique \mathcal{G} -connexion ω sur $\mathcal{R}(M)$ telle que les Γ soient les formes locales de ω .
MAIS NE CORRESPOND PAS A UN TENSEUR SUR M !

Le problème de la dérivation

Soient $X \in \mathcal{X}(M)$, $\Psi \in \Omega^0(\mathcal{R}(M), \mathbb{R}^d)$ sa forme basique et $\psi \in \Omega^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$ ses composantes dans R .

- ▶ La dérivée extérieure usuelle $D\Psi \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{R}(M)$ n'est pas basique ;
- ▶ Les dérivées $d\psi_1, d\psi_2 \in \Omega^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$ ne sont plus reliées simplement par $g_{12}(x)^{-1}$;
- ▶ Pourtant si on se donne une dérivée covariante ∇ sur M , ∇X est un tenseur !

Le problème de la dérivation

Soient $X \in \mathcal{X}(M)$, $\Psi \in \Omega^0(\mathcal{R}(M), \mathbb{R}^d)$ sa forme basique et $\psi \in \Omega^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$ ses composantes dans R .

- ▶ La dérivée extérieure usuelle $D\Psi \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{R}(M)$ n'est pas basique ;
- ▶ Les dérivées $d\psi_1, d\psi_2 \in \Omega^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$ ne sont plus reliées simplement par $g_{12}(x)^{-1}$;
- ▶ Pourtant si on se donne une dérivée covariante ∇ sur M , ∇X est un tenseur !

- ▶ Connexion ω sur $\mathcal{R}(M)$ \iff Dérivée covariante ∇^ω sur M ;
- ▶ Elle correspond à une **dérivée absolue** D^ω pour les formes α sur $\mathcal{R}(M)$;
- ▶ Et une règle de calcul, donnée par des **symboles de Christoffels** Γ , sur les composantes \mathcal{A} .

Dérivée absolue D^ω sur $\mathcal{R}(\mathcal{M})$

Définition : **Dérivée absolue** D^ω des formes $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(\mathcal{M}), E)$

$$(D^\omega \alpha)_{R_x}(\delta R_{x_1}, \dots, \delta R_{x_k}) = (D\alpha)_{R_x}(\delta R_{x_1}^H, \dots, \delta R_{x_k}^H),$$

où δR_x^H est la composante horizontale ($\in H_{R_x}$) de la "variation de repère".

La dérivée absolue d'une forme équivariante (même non horizontale) est **toujours BASIQUE**.

Dérivée covariante ∇^ω sur \mathcal{M} et symboles de Christoffels Γ

Définition : Dérivée covariante ∇^ω et symboles de Christoffels $\tilde{\Gamma}$ sur \mathcal{M}

Soit $\mathcal{A} \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$ les composantes d'un champ de tenseur \mathbb{T} dans le repère R sur \mathcal{U} :

$$R^{-1}(\nabla_X^\omega \mathbb{T}) = d\mathcal{A} \cdot X + \tilde{\Gamma}(X)\mathcal{A}, \quad \text{où} \quad \tilde{\Gamma} = \rho_* \circ \Gamma = \rho_* \circ (R^* \omega).$$

ρ_* = action induite par ρ de l'algèbre de Lie du groupe structural sur l'algèbre de Lie du groupe linéaire sur E :

$$\begin{aligned} \rho_* : \quad \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(E) \\ \mathbf{u} &\mapsto T_{\text{id}_{\text{GL}_d(\mathbb{R})}} \rho \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\rho_*(\mathbf{u})\mathbf{e} = \frac{d}{ds} [\rho(\mathbf{A}(s))\mathbf{e}], \quad \mathbf{A}(0) = \mathbf{1}, \quad \dot{\mathbf{A}}(0) = \mathbf{u}.$$

Summary : Connexions et formes sur le fibré des repères

A retenir

- ▶ Choix d'une connexion sur $\mathcal{R}(M)$:

Distribution H de sous-espaces horizontaux $\iff \omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$

- ▶ Tenseur \mathbb{T} de type E sur m :

Forme basique $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E) \iff \mathbb{T} \iff$ Composantes $\mathcal{A} \in \Omega^k(\mathcal{U}, E)$ dans R

- ▶ Dérivée covariante ∇^ω des tenseurs :

Dérivée absolue $D^\omega \alpha \iff \nabla_X^\omega \mathbb{T} \iff d\mathcal{A} \cdot X + \tilde{\Gamma}(X)\mathcal{A}, \quad \Gamma := R^*\omega$

Summary : Connexions et formes sur le fibré des repères

A retenir

- ▶ Choix d'une connexion sur $\mathcal{R}(M)$:

Distribution H de sous-espaces horizontaux $\iff \omega \in \Omega^1(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$

- ▶ Tenseur \mathbb{T} de type E sur M :

Forme basique $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{R}(M), E) \iff \mathbb{T} \iff$ Composantes $\mathcal{A} \in \Omega^k(U, E)$ dans R

- ▶ Dérivée covariante ∇^ω des tenseurs :

Dérivée absolue $D^\omega \alpha \iff \nabla_X^\omega \mathbb{T} \iff d\mathcal{A} \cdot X + \tilde{\Gamma}(X)\mathcal{A}, \quad \Gamma := R^*\omega$

Cas particulier : Forme de courbure $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{R}(M), \mathfrak{gl}_d(\mathbb{R}))$

$\Omega := D^\omega \omega$, sa forme locales est notée $\mathcal{F} = R^*\Omega$, et encode le tenseur F .

Introduction à la théorie de jauge

Fibré principaux

Fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ de groupe structural G

- ▶ Tout se passe exactement comme pour le fibré des repères;
- ▶ **SAUF** que l'on remplace les tenseurs \mathbb{T} par des sections du fibré associé.

Fibré principal : exemple avec l'électromagnétisme

Fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ de groupe structural \mathcal{G}

- ▶ Tout se passe exactement comme pour le fibré des repères;
- ▶ **SAUF** que l'on remplace les tenseurs \mathbb{T} par des sections du fibré associé.

Electro-magnétisme : $\mathcal{G} = \text{U}(1)$, $M =$ Espace-temps de Minkowski

- ▶ On ne voit pas la phase d'une fonction d'onde $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ d'une particule:

$$e^{i\theta(\mathbf{x},t)}\psi(\mathbf{x},t) \cong \psi(\mathbf{x},t), \quad \text{car seul son module } |\psi|^2 \text{ est observé.}$$

- ▶ ψ est donc les composantes d'un objet Ψ quand on choisit une phase/jauge.
- ▶ Les lois de la physique ne doivent pas dépendre de ce choix !

La structure de fibré principal donne déjà des informations

Fibré principal	Fibré des repères	Electro-magnétisme [Weyl, 1918] dans le vide	
Base	m	Univers (m, η) 4D η métrique de Minkowski	$\eta = -c^2 dt^2 + q$
Groupe structural \mathcal{G}	$GL_d(\mathbb{R})$	$U(1)$ Abélien	
Forme de connexion	$\Gamma = R^* \omega$	$i\mathcal{A}$ potentiel EM $\mathcal{A} = \phi dt - qA$	ϕ potentiel électrique $A = (A_x \ A_y \ A_z)^T$
Changement de jauge	$\Gamma_2 = \mathbf{g}_{12}^{-1} \Gamma_1 \mathbf{g}_{12}$ $+ \mathbf{g}_{12}^{-1} d\mathbf{g}_{12}$	$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + d\chi$	$\phi_2 = \phi_1 - \partial_t \chi$ $A_2 = A_1 + \nabla \chi$
Forme de courbure	$\Omega = D^\omega \omega$ $\mathcal{F} = R^* \Omega$	$\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ Tenseur de Faraday $\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$	$B = \text{rot } A$ $E = -\nabla \phi - \partial_t A$
Bianchi (II)	$D^\omega \Omega = 0$	$d\mathcal{F} = 0$	$\text{rot } E = -\partial_t B$ $\text{div } B = 0$

Invariance de jauge

Définition : **Groupe de jauge** $GA(P)$

$$GA(P) := \{f \in \text{Diff}(P) \mid f \text{ ne change pas les points de base, i.e. } \pi(f(R_x)) = \pi(R_x) = \mathbf{x}\}$$

Invariance de jauge : Ψ **champ matière**, dont la forme locale est ψ (fonction d'onde)

Action du système dépendant d'une connexion ω et du champ Ψ :

$$\mathcal{W}[f^*\omega, f^*\Psi] = \mathcal{W}[\omega, \Psi], \quad \forall f \in GA(P).$$

Trouver des actions qui sont :

- ▶ **Locales** : s'exprimant par une densité d'action sur la base m avec les quantités locales ψ, Γ ;
- ▶ **Invariantes de jauge**;
- ▶ Ayant éventuellement d'autres propriétés (invariance Lorentzienne, normalisable, etc).

Les actions usuelles : Yang-Mills et Klein-Gordon

Action de Yang-Mills

$$\mathcal{W}^{YM}[\omega] := \frac{-1}{2} \int \|\mathcal{F}_{\mathbf{x}}\|_{\eta}^2 \text{vol}_{\eta}, \quad \mathcal{F} \text{ forme locale de la courbure } \Omega = D^{\omega}\omega.$$

Action de Klein-Gordon

$$\mathcal{W}^{KG}[\Psi, \omega] := \int \left[\|\mathcal{A}_{\mathbf{x}}\|_E^2 - M^2 \|\psi(\mathbf{x})\|_E^2 \right] \text{vol}_{\eta}, \quad \mathcal{A} \text{ forme locale de } D^{\omega}\Psi.$$

- ▶ Les équations de Maxwell dans le vide s'obtiennent avec Yang-Mills;
- ▶ On rentre dans la partie modélisation des phénomènes (quels espaces E , actions, etc);
- ▶ Grande littérature autour de tout les problèmes possibles de ces formulations:

Brissures de symétries, réduction, quantisation, etc.

Summary : Introduction à la théorie de jauge

A retenir

- ▶ Un fibré principal P de base M et de groupe structural G est un “espace de coordonnées” localement isomorphe à $M \times G$ mais où on “ne connaît pas l’origine de G ”:

Un choix de **jauge** est le choix d’un système de coordonnées locales.

- ▶ On étudie des **champs matières**, objets intrinsèques mais équivariant par rapport à un choix de jauge:

Formes basiques Ψ sur $P \iff$ Sections du fibré associé \iff Formes locales ψ dans R

- ▶ On cherche les champs minimisant une **action locale** et **invariante de jauge**:

$$\mathcal{W}[f^* \omega, f^* \Psi] = \mathcal{W}[\omega, \Psi] = \int_U L[\Gamma, \psi], \quad \forall f \in \text{GA}(P).$$

References I

 Bleecker, D. (1981). *Gauge theory and variational principles*. Addison-Wesley. (Cit. on p. 2).

 Cendra, H., Ibrort, A., & Marsden, J. (1987). Variational principles on principal fiber bundles. *Journal of Geometry and Physics*, 4(2), 183–205 (cit. on p. 2).

 Hamilton, M. J. (2017). *Mathematical Gauge Theory*. Springer International Publishing. (Cit. on p. 2).

 Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1996). *Foundations of differential geometry*. 2. Wiley. (Cit. on p. 2).

 Weyl, H. (1918). Gravitation and electricity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1918, 465 (cit. on pp. 2, 42).