

Introduction à la théorie des poutres Cosserat pour la robotique continue: Première partie : La statique

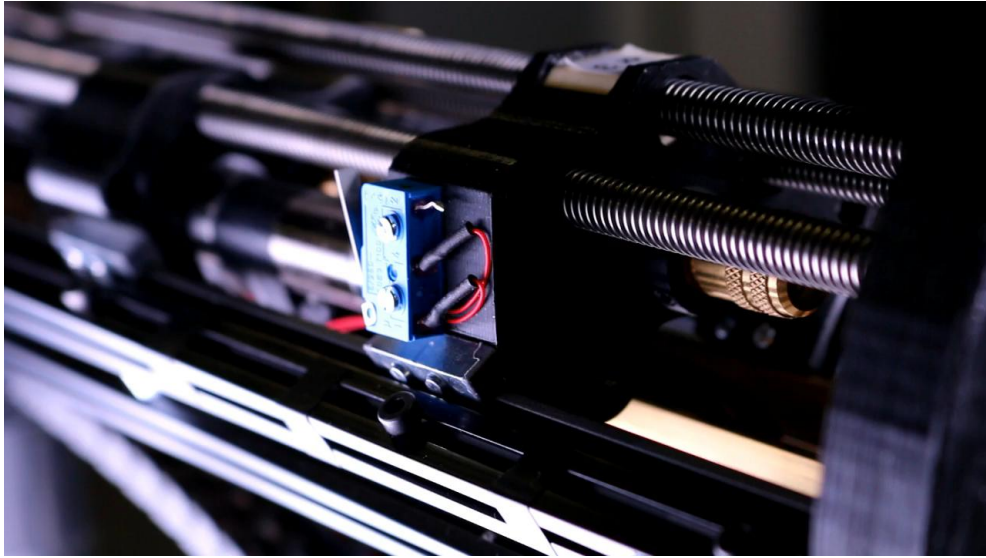
Frédéric Boyer & Vincent Lebastard

Atelier du GDR-GDM : structures minces

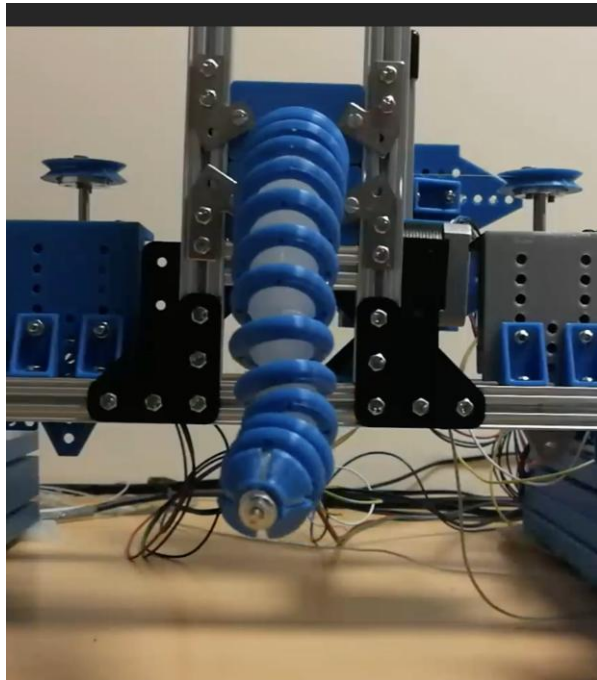
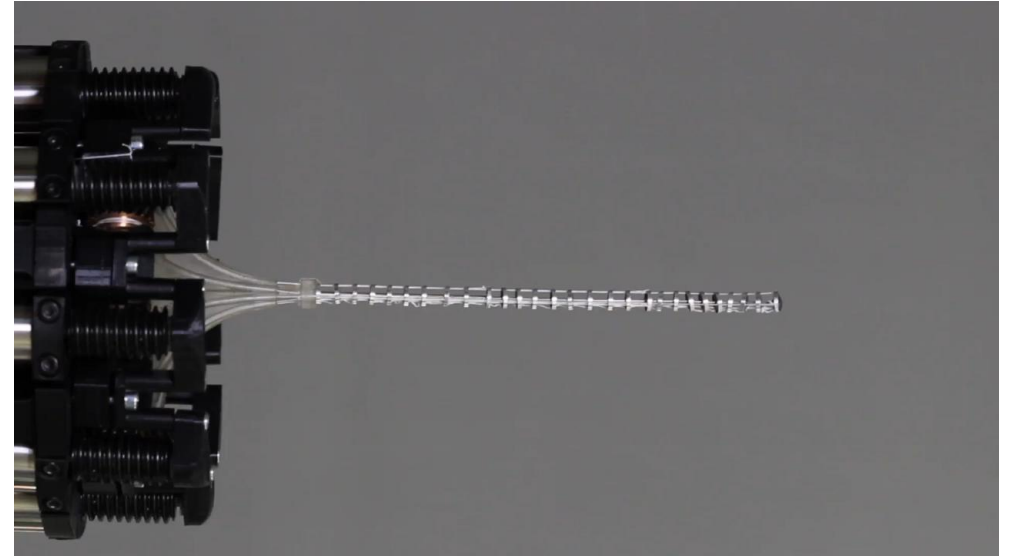
Nantes, 29 Avril 2026

Ces dernières années...

Le modèle des poutres Cosserat devient un standard pour la robotique continue, soft et bio-inspirée.



Robotique
continue ...



... soft...

AGENCE NATIONALE DE LA RECHERCHE
ANR

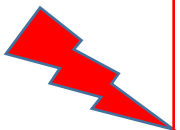


... bioinspirée.

Modèle des poutres Cosserat

On adopte une représentation matricielle de $SE(3)$.

Avec : $g = \begin{pmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \Omega \\ V \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} K \\ \Gamma \end{pmatrix}$, on a :


$$ad_{\eta} = \begin{pmatrix} \hat{\Omega} & 0 \\ \hat{V} & \hat{\Omega} \end{pmatrix}, ad_{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{K} & 0 \\ \hat{\Gamma} & \hat{K} \end{pmatrix}$$

$$Ad_g = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \hat{r}R & R \end{pmatrix}$$

- Les équations de la dynamique sont déduites du principe d'Hamilton sur le groupe:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} \int_0^1 \mathcal{L}(g, \dot{g}, g') dX dt - \int_{t_a}^{t_b} \delta W_{ext} dt = \delta \int_{t_a}^{t_b} \int_0^1 \mathfrak{L}(g, \eta, \xi) dX dt - \int_{t_a}^{t_b} \delta W_{ext} dt = 0$$

- Calcul des variations d'Euler-Poincaré donne les EDPs de Poincaré-Cosserat:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} \right) - \text{ad}_\eta^T \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} \right) - \text{ad}_\xi^T \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} \right) - X_g(\mathfrak{L}) = \bar{F}_{ext} \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} \right) (0) = F_{ext}^- , \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} \right) (1) = -F_{ext}^+ \end{cases}$$

- Les forces inertielles et internes sont gauche-invariantes, et entrées via le lagrangien:

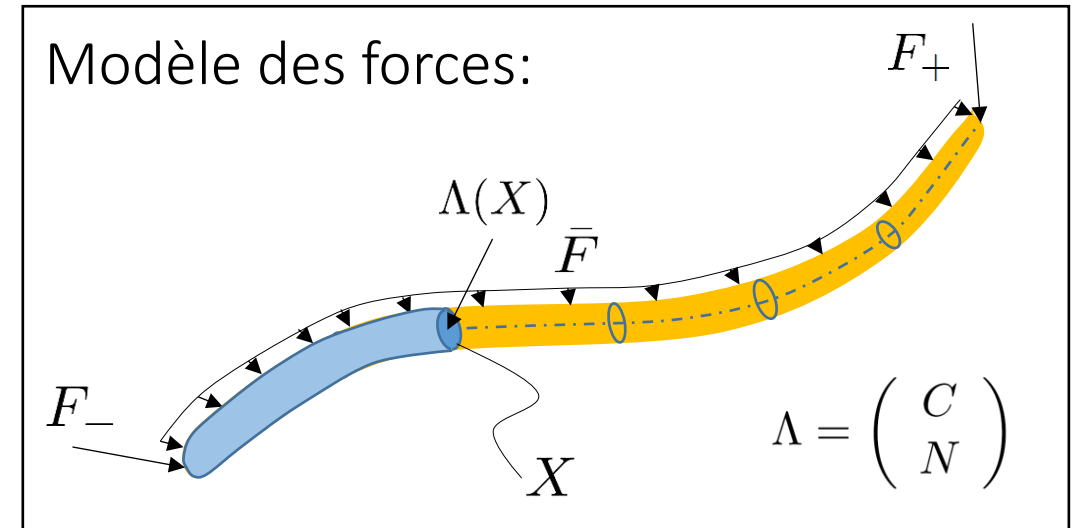
$$l(\xi, \eta) = \int_0^1 \mathfrak{L} dX = \int_0^1 \mathfrak{T}(\eta) - \mathfrak{U}(\xi) dX = \int_0^1 \frac{1}{2} \eta^T \mathcal{M} \eta - \frac{1}{2} \epsilon^T \mathcal{H} \epsilon dX$$

Le principe donne la forme fermée du modèle de Reissner-Simo:

- $$\begin{cases} \mathcal{M}\dot{\eta} - \text{ad}_{\eta}^T \mathcal{M}\eta = \Lambda' - \text{ad}_{\xi}^T \Lambda + \bar{F}_{ext}(g) , & \mathcal{M} = \text{diag}(\rho I_1, \rho I_2, \rho I_3, \rho A, \rho A, \rho A) \\ \dot{g} = g\hat{\eta} , & g' = g\hat{\xi} \end{cases}$$

+ C.I. and C.L.:

- $$\begin{cases} g(0) = 1_{4 \times 4} , & \Lambda(1) = F_{ext}^+ \quad \rightarrow \text{Manip.} \\ \Lambda(0) = -F_{ext}^- , & \Lambda(1) = F_{ext}^+ \quad \rightarrow \text{Locom.} \end{cases}$$



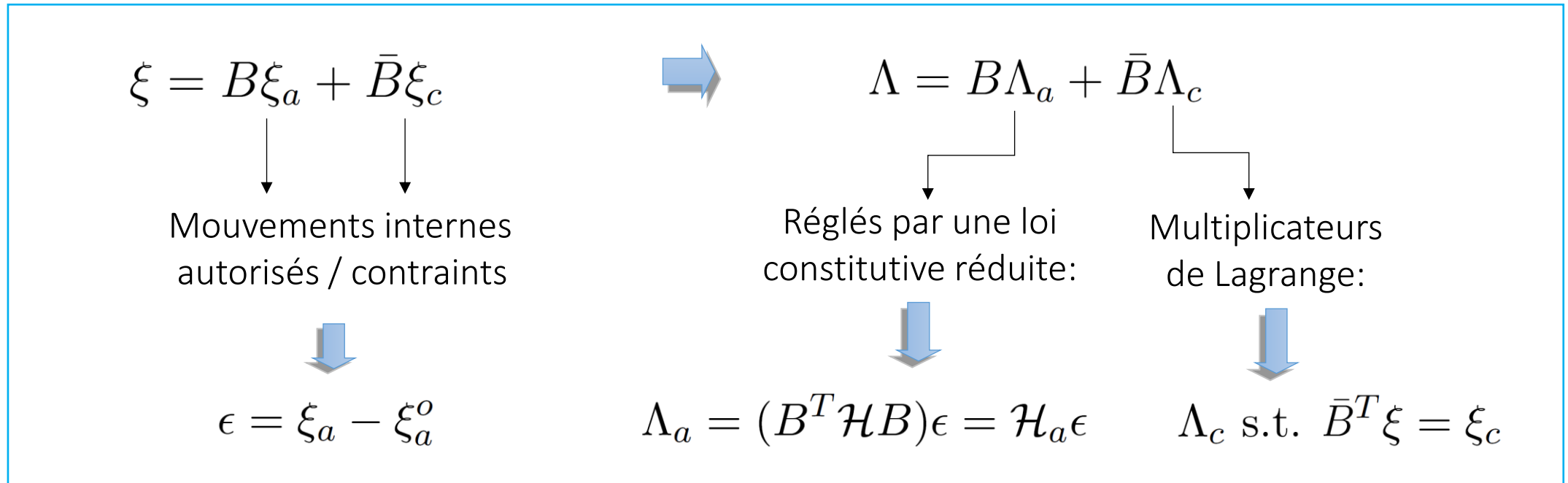
+ def. des déformations + Loi constitutive (Hookéenne):

- $$\epsilon = \xi - \xi_o \quad , \quad \Lambda = \mathcal{H}\epsilon \quad , \quad \mathcal{H} = \text{diag}(GI_1, EI_2, EI_3, EA, GA, GA) .$$

Rq: Cette formulation est à la base de la MEF-GE de Simo...

Paramétrisation basée champs de déformation

Dans le modèle de Reissner-Simo, le champ ξ est libre. On peut introduire des contraintes cinématiques internes (e.g. pas de cisaillement ou d'élongation...):



Exemple: poutres de Kirchhoff

$$\xi_a = (K_1, K_2, K_3)^T, \quad \xi_c = (1, 0, 0)^T, \quad B = \begin{pmatrix} 1_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_a = \mathcal{H}_a \epsilon \quad \img alt="arrow" style="vertical-align: middle;"/> \quad C = \text{diag}(GI_1, EI_2, EI_3)(K - K^o)$$

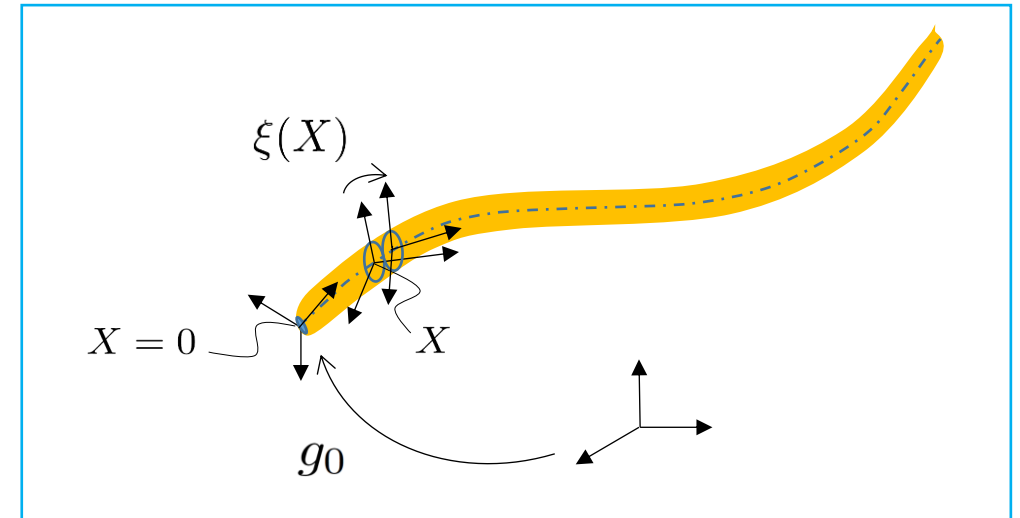
En utilisant la def. de ξ comme une équation de reconstruction: $g' = g\hat{\xi}$.

Si l'on connaît ξ_a et $g_0 = (R_0, r_0)$, on peut l'intégrer de $X = 0$ à 1 :

$$g' = g\hat{\xi} = g(B\xi_a + \bar{B}\xi_c)^\wedge$$



Quaternion $\leftarrow \begin{pmatrix} Q \\ r \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (1/2)A(K)Q \\ R(Q)\Gamma \end{pmatrix}$



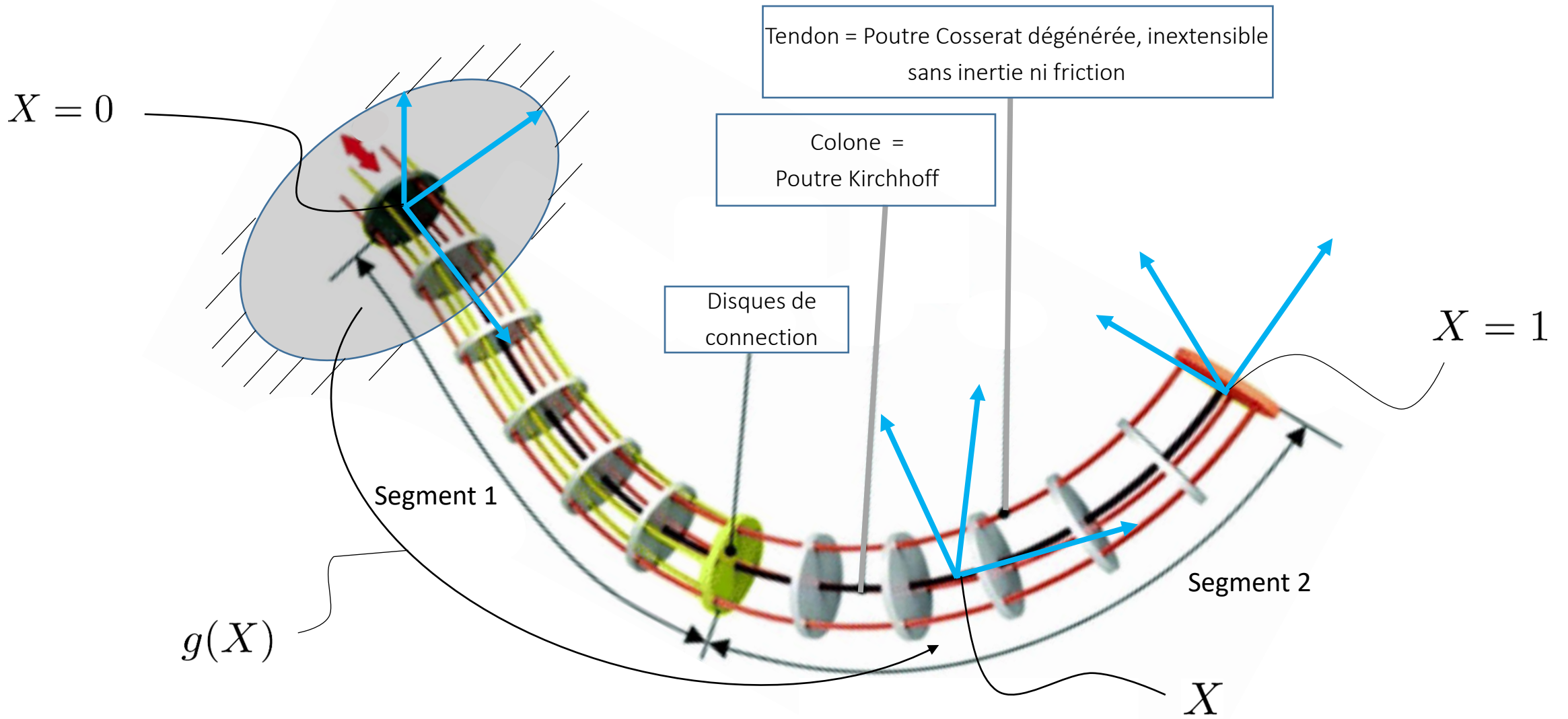
Définit l'espace des configurations comme l'ensemble des paires (g_0, ξ_a) .

$$\mathcal{C} = SE(3) \times \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} = \{\xi_a : [0, 1] \mapsto \xi_a(X) \in \mathbb{R}^{n_a \leq 6}\}$$

En robotique, cette paramétrisation est préférée...

Application à la statique des TACRs

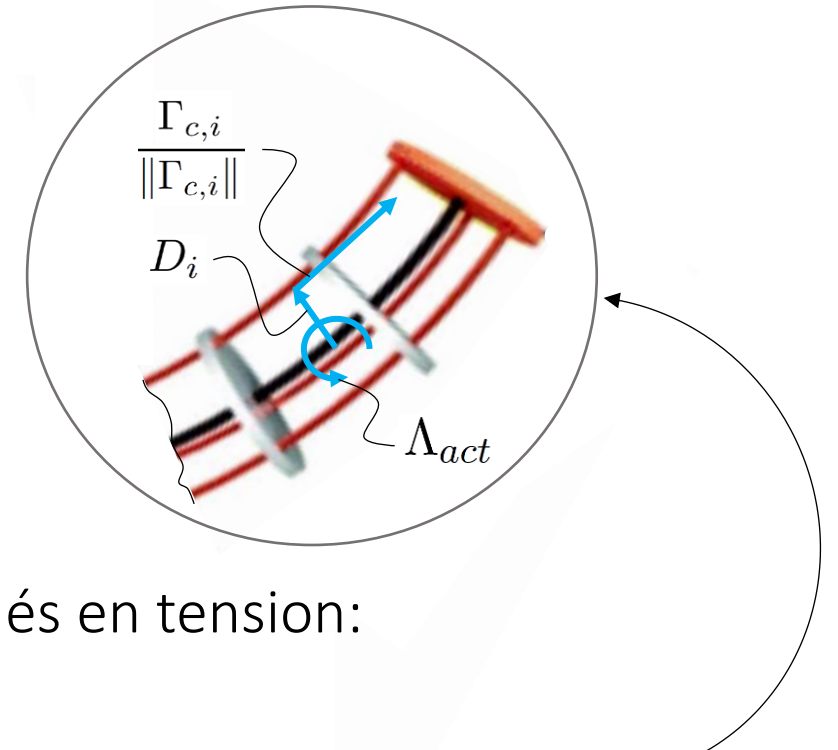


Avec ξ_a comme paramètres, une formulation fermée de la statique d'un TACR est donnée par :

● Equil. statique:
$$\begin{cases} g' = g\hat{\xi} \\ \Lambda' - ad_{\xi}^T \Lambda + \bar{F}_{ext}(g) = 0 \end{cases}$$
 ● C.L.: $g(0) = 1_{4 \times 4}$, $\Lambda(1) = F_{ext}^+ \rightarrow$ Manip.

+ Def. des déformations + Loi constitutive active:

● $B^T \Lambda = \Lambda_{act} + \mathcal{H}_a \epsilon$ \rightarrow Contraintes d'actionnement \rightarrow



Ici : Poutre de Kirchhoff actionnée par N tendons commandés en tension:

$$\Lambda_{act}(X, t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{D_i(X) \times \Gamma_{c,i}}{\|\Gamma_{c,i}\|} \right) T_i(t) \quad , \quad \Gamma_{c,i} = E_1 + K \times D_i + D_i' \quad , \quad E_1 = (1, 0, 0)^T.$$

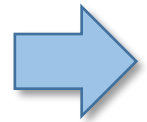
Algorithme de résolution de la statique
inverse (directe) des robots continus

BVP en espace X :

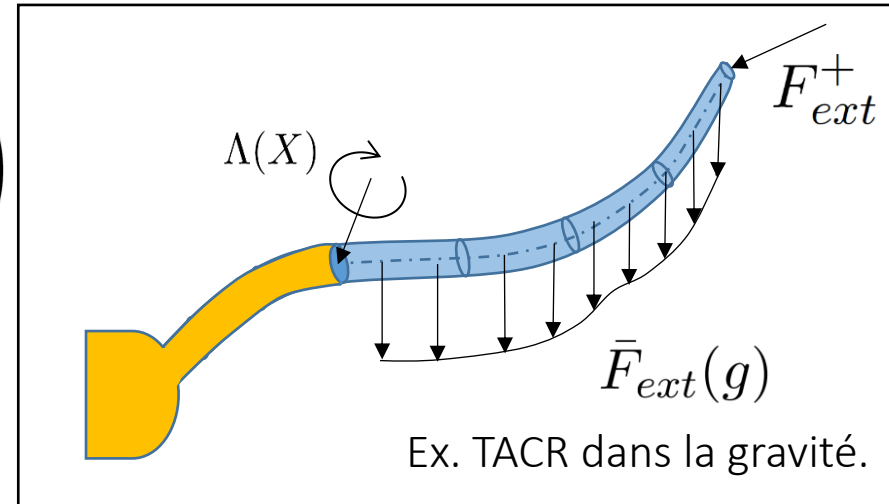
$$X \in [0, 1] : \quad x' = f(x), \quad h_-(x(0)) = 0, \quad h_+(x(1)) = 0,$$

- $x(X)$: Vecteur d'état
- $f(x)$: Vecteur d'évolution de l'état
- $h_-(x(0))$: CLs proximales
- $h_+(x(1))$: CLs distales

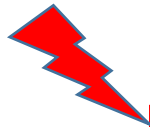
Problème inverse statique: entrées $\xi = B\xi_a + \bar{B}\xi_c$ \rightarrow outputs = Λ_{act} .



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} g \\ \Lambda \end{array} \right)' = \left(\begin{array}{c} g\hat{\xi} \\ ad_{\xi}^T \Lambda + \bar{F}_{ext}(g) \end{array} \right) \\ g(0) = 1_{4 \times 4} \text{ , } \Lambda(1) = F_{ext}^+ \\ \Lambda_{act} = B^T \Lambda - \mathcal{H}_a(\xi_a - \xi_a^o) \end{array} \right.$$



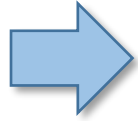
BVP inverse



BVP inverse: Peut être résolu en deux passes découplées (avec un algorithme de type Newton-Euler): $B^T \Lambda = B^T ISM(\xi_a)$

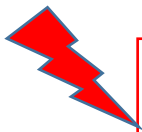
En utilisant la def des strains et la loi constitutive active dans ce BVP...

Problème direct statique: entrée = Λ_{act} \rightarrow sortie = ξ_a (ou eq. ϵ).



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} g' \\ \Lambda' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} g(B\mathcal{H}_a^{-1}(B^T \Lambda - \Lambda_{act}) + \xi_o)^\wedge \\ ad_{(B\mathcal{H}_a^{-1}(B^T \Lambda - \Lambda_{act}) + \xi_o)}^T \Lambda - \bar{F}(g) \end{array} \right) \\ g(0) = 1_{4 \times 4} , \quad \Lambda(1) = F_+ . \\ \xi_a = \mathcal{H}_a^{-1}(B^T \Lambda - \Lambda_{act}) + B^T \xi_o \end{array} \right.$$

BVP direct



BVP direct: couplé... peut être résolu par l'alg. du tir...

Le BVP direct statique dérive d'un problème de commande optimale:

• **OCP1:** Find the optimal control u that makes stationary the cost functional defined by the potential energy:

$$\mathcal{C}(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} u^T \mathcal{H}_r u + u^T \Lambda_{act} + \bar{\mathcal{Q}} dX + U_+$$

under the constraints:

$$g' = g(Bu + \xi_o)^\wedge$$

with $g(0) = 1_{4 \times 4}$, due to the fixed root cross-section •

Modèle statique Lagrangien des TACRs

Reduction des déformations autorisées:

Dans:

$$\xi = B\xi_a + \bar{B}\xi_c$$

On impose:

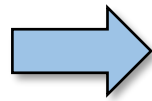
$$\xi_a(X, t) = \xi_a^o(X) + \Phi(X)q(t)$$

Avec:

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) \quad , \text{ e.g.: } \quad \Phi_{K_i}(X) = (\mathbf{1}, X, X^2, \dots, X^k)^T$$

Une base de Ritz des champs de déformation:

PCC, PCS...

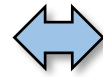


$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$$

C'est l'espace de dimension fini usuel des robots rigides ou q joue le rôle des angles articulaires.

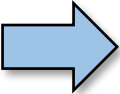
Projection de la loi constitutive sur la base Φ : $\int_0^1 \Phi^T (B^T \Lambda - \Lambda_{act} - \mathcal{H}_a(\xi_a - \xi_a^o)) dX = 0$.

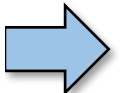
$$Kq + Q(q) = L(q)T(t)$$

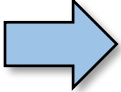



Equilibre statique sous
forme matricielle lagrangienne

Où:

• $K = \int_0^1 \Phi^T \mathcal{H}_a \Phi dX$  Matrice des raideurs généralisées

• $L(q)T(t) = - \sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \frac{\Phi^T (D_i \times \Gamma_{c,i})}{\|\Gamma_{c,i}\|} dX \right) T_i(t)$  Forces gén. d'actionnement

• $Q(q) = - \int_0^1 \Phi^T B^T \Lambda dX$  Forces gén. extérieurs

 $\Lambda = ISM(\xi_a^o + \Phi q)$

De la statique à la dynamique...

... A poursuivre lors d'une autre journée...