

Interpolation de données sur une variété riemannienne

R. Mosquera

en collaboration avec A. Hamdouni, A. Falaize

équipe M2N, LaSIE UMR CNRS 7356, La Rochelle Université, France

Année de la Mécanique 2021-22
8 - 9 novembre 2021



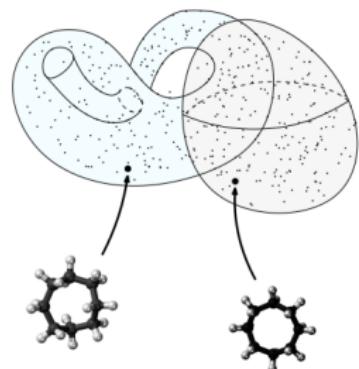
Interpolation de données sur une variété riemannienne

Paradigme :

Les données ou « quantités » d'intérêt associées à un problème possèdent leur propre structure géométrique.

Points qui appartiennent à des espaces non-linéaires

- ensemble de tenseurs, de matrices de covariance
- ensemble de sev
- ensemble de courbes, surfaces



Algorithmes pour l'interpolation des données sur une v.r

- ▶ Définir le concept d'interpolation sur une variété riemannienne
- ▶ Implémenter des algorithmes pour pouvoir le calculer

Plan de l'exposé

- 1 Bases géométriques des algorithmes sur les variétés riemanniennes
- 2 Quelques techniques d'interpolation sur les v.r et applications à la réduction de modèles paramétrique
- 3 Quelques questions à propos de l'interpolation sur les v.r

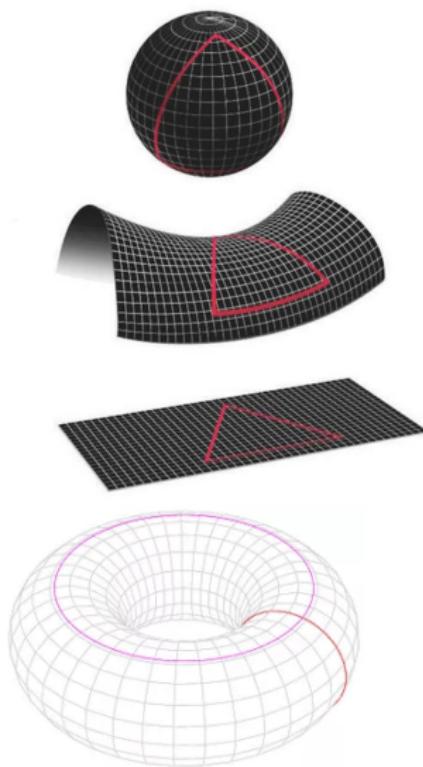
Variété différentiable

Définition :

Espace topologique localement modelisé par un l'espace euclidien mais globalement courbé

Exemples

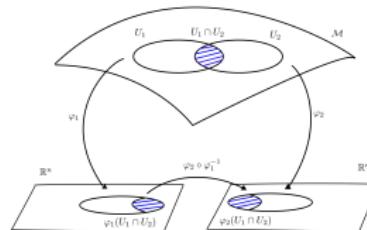
- Surfaces dans \mathbb{R}^3
- Variété des matrices SDP
- Espace des formes de Kendall
- La variété Grassmann $G_m(\mathbb{R}^n)$
- La variété quotient $\mathbb{R}_{*}^{n \times m}/\mathcal{O}(m)$
- La variété des drapeaux



Variété différentiable

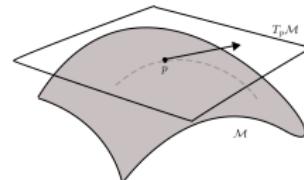
Calculer dans une variété \mathcal{M}

- Ensemble de cartes $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Conditions de compatibilité et régularité
- Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$



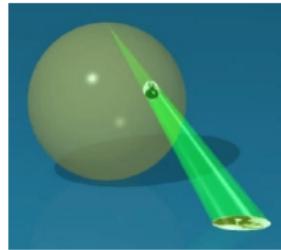
Espace tangent

Ensemble de tous les vecteurs vitesses en p , des courbes tracées dans la variété \mathcal{M} .



Comment mesurer dans une variété \mathcal{M}

- Volumes (surfaces)
- Longueurs
- Lignes droites



Mesurer des distances intrinsèques

Outil de base : métrique riemannienne

$$\langle u, v \rangle_p = v^T G_p u$$

- Norme d'un vecteur

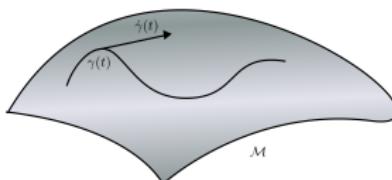
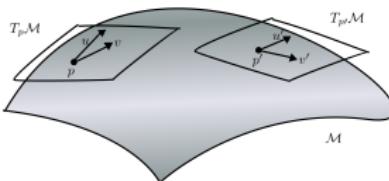
$$\|u\|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}$$

- Angle entre deux vecteurs

$$\langle u, v \rangle_p = \cos(\theta) \|u\|_p \|v\|_p$$

- Longueur d'une courbe

$$L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

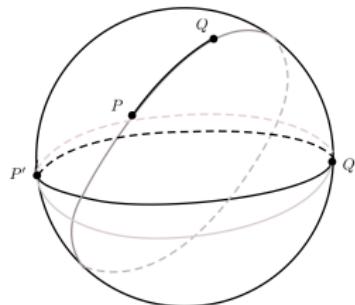


Variétés riemanniennes

$$\langle u, v \rangle_p = v^T G_p u$$

- Longueur d'une courbe

$$L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$$



Géodésique entre deux points

- Localement réalise le plus court chemin
- Équation différentiable d'ordre 2 qui spécifie l'accélération
- Les paramètres libres : la vitesse initiale et la position de départ

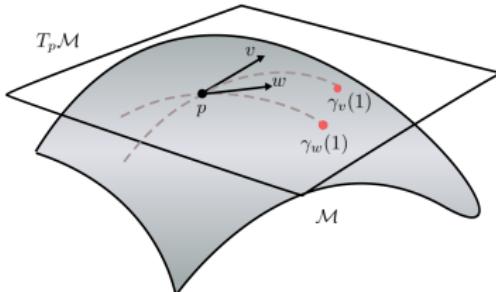
Variétés riemanniennes

Les opérations suivantes sont définies localement :

- **Exponentielle géodésique**

$$\begin{aligned} \exp_p &: T_p \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ v &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

où γ est l'unique géodésique tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$



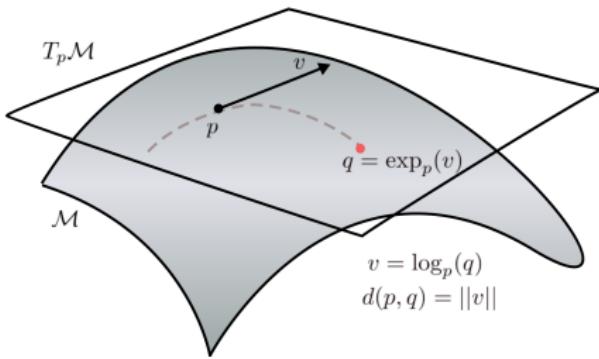
- **Logarithme géodésique**

$$\begin{aligned} \log_p &: \mathcal{M} &\rightarrow T_p \mathcal{M} \\ q &\mapsto v_q \end{aligned}$$

où $\exp_p(v_q) = p$

- **Distance géodésique entre deux points**

$$d(p, q) = \|\log_p(q)\|_p$$



Variétés riemanniennes

- **Barycentre de Karcher :** Généralise la notion de barycentre pondéré à toute variété riemannienne

Dans le cas d'un e.v le barycentre peut être caractérisé comme :

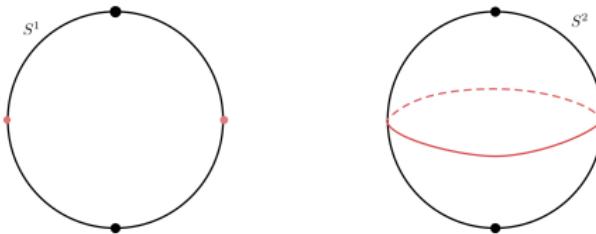
$$\hat{y} = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \iff \hat{y} = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \|y - y_i\|^2$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$

Le Barycentre de Karcher des points $p_1, \dots, p_N \in \mathcal{M}$, est défini comme

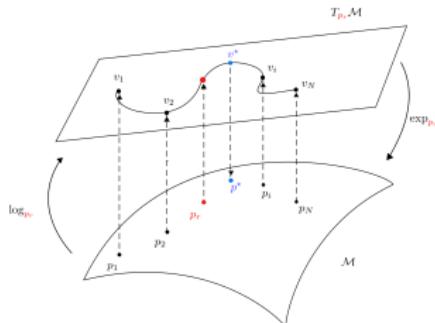
$$\hat{p} \in \arg \min_{p \in \mathcal{M}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i d^2(p, p_i)$$

- ▶ L'existence et l'unicité sont liées à la topologie et à la géométrie de la variété \mathcal{M}



Classes des interpolateurs sur une variété riemannienne

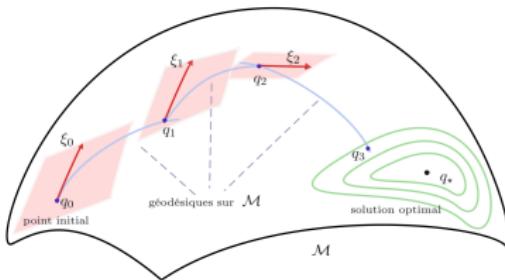
- Utilisant un espace tangent de référence
 - ▶ Application exponentielle
 - ▶ Logarithme géodésique
 - Influence du point de référence



- Utilisant la notion de barycentre de Karcher

$$J(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i d^2(p, p_i)$$

- ▶ Algorithme de descente riemannien
- Caractère itératif



- Utilisant seulement des géodésiques

- ▶ Construction récursive

Rappels sur la méthode POD-Galerkin pour la construction de ROMs

Problème d'évolution paramétrique semi-discrétisé dans $V_h \simeq \mathbb{R}^n$

- $$\begin{cases} \frac{du_h}{dt} = F_h(u_h, \lambda) & t > 0, \\ u_h(0) = u_{h,0} \end{cases}$$

où F_h est un champ de vecteurs de V_h , $\lambda \in \mathbb{R}^P$ un paramètre

- Une base POD $\Phi(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ d'ordre m peut-être calculée à partir des instantanés

Modèle réduit

On cherche une solution approchée du problème sous la forme

$$u_h(t, \lambda) \simeq \Phi(\lambda)a(t, \lambda)$$

avec $a(t, \lambda) \in \mathbb{R}^m$. Un modèle d'ordre réduit (ROM) est donné par

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \widehat{\mathcal{F}}(a, \lambda), & \forall t \geq 0, \\ a(0) = \Phi(\lambda)^T \cdot u_h^0, \end{cases}$$

où

$$\widehat{\mathcal{F}}(a, \lambda) = \Phi(\lambda)^T \cdot \mathcal{F}(\Phi(\lambda) \cdot a, \lambda)$$

Problème d'interpolation de ROMs

- Le modèle d'ordre réduit construit par projection ne dépend pas de la base, sinon du sous-espace engendré par la base

Problème

A partir d'un ensemble de N bases POD $\Phi(\lambda_k)$, $0 \leq k \leq N$, associées aux paramètres d'échantillonnage λ_k , $0 \leq k \leq N$, construire un ROM pour un nouveau paramètre $\lambda^* \neq \lambda_k$, $0 \leq k \leq N$, sans le calcul coûteux des instantanés

Stratégie

Étape 1 Une approximation Φ^* de la base $\Phi(\lambda^*)$ est construite par interpolation à partir de l'ensemble de bases connues $\Phi(\lambda_k)$, $0 \leq k \leq N$.

Étape 2 Cette nouvelle base est utilisée pour construire le champ vectoriel réduit $\widehat{\mathcal{F}}^*(a, \lambda^*) = \Phi^{*\top} \cdot \mathcal{F}(\Phi^* \cdot a, \lambda^*)$ de sorte que le modèle d'ordre réduit pour le nouveau paramètre est donné par

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} &= \widehat{\mathcal{F}}^*(a, \lambda^*), \quad \forall t \geq 0, \\ a(0) &= \Phi^{*\top} \cdot u_h^0. \end{cases}$$

- L'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sera noté $\bar{\Phi}$

La variété de Grassmann

L'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de \mathbb{R}^n , est une variété riemannienne notée par $G_m(\mathbb{R}^n)$

Construction de la métrique

- La projection canonique

$$\begin{array}{ccc} \pi & : & \mathbb{R}_*^{n \times m} & \rightarrow & G_m(\mathbb{R}^n) \\ & & \Phi & \mapsto & \bar{\Phi} \end{array}$$

- On munit l'ensemble $\mathbb{R}_*^{n \times m}$ de la métrique

$$g_\Phi(Y_1, Y_2) = \text{tr} [(\Phi^\top \Phi)^{-1} Y_1^\top Y_2]$$

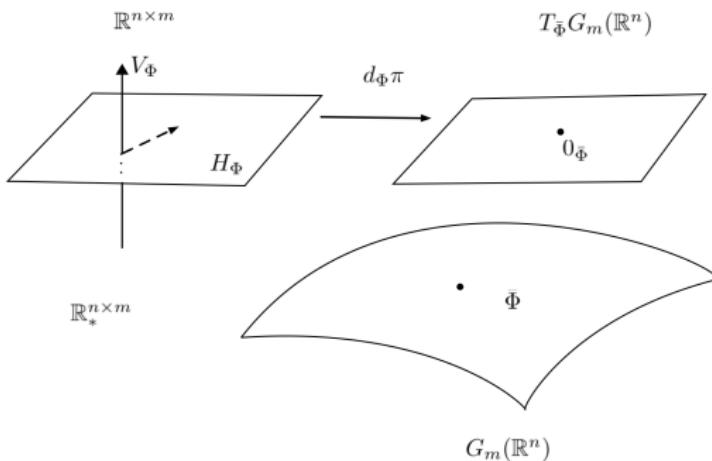
- $\mathbb{R}^{n \times m} = V_Y \oplus H_Y$

- $V_\Phi = T_\Phi \pi^{-1}(\bar{\Phi})$ esp. vertical
- $H_\Phi = [T_\Phi \pi^{-1}(\bar{\Phi})]^\perp$ esp. horizontal

- L'application

$$d_\Phi \pi|_{H_\Phi} : H_\Phi \rightarrow T_{\bar{\Phi}} G_m(\mathbb{R}^n)$$

est un isomorphisme et induit une métrique sur $G_m(\mathbb{R}^n)$



Bases géométriques pour l'interpolation sur la variété de Grassmann

Soient $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}_{\star}^{n \times m}$

- Exponentielle géodésique

$$\exp_{\bar{\Phi}}(v) = \overline{\Phi(\Phi^T \Phi)^{-1/2} V \cos(\Sigma) + U \sin(\Sigma)}$$

où $(d_\Phi \pi)^{-1}(v) (\Phi^T \Phi)^{-1/2} = U \Sigma V^T$ est une SVD.

- Logarithme géodésique

$$\exp_{\bar{\Phi}}^{-1}(\bar{\Psi}) = \overline{U_\alpha \tan^{-1}(\Sigma_\alpha)^t V_\alpha}$$

- ▶ Si $\bar{\Psi} \in B_d(\bar{\Phi}, \frac{\pi}{2})$
- ▶ $U_\alpha \Sigma_\alpha V_\alpha^T = [\Psi(\Phi^T \Psi)^{-1}(\Phi^T \Phi) - \Phi] (\Phi^T \Phi)^{-1/2}$ est une SVD

- Distance géodésique

$$d(\bar{\Phi}, \bar{\Psi}) = \left\| \tan^{-1}(\tilde{\Sigma}) \right\|_F$$

où $\tilde{U} \tilde{\Sigma}^t \tilde{V} = \Psi(\Phi^T \Psi)^{-1} - \Phi$ est une SVD.

Interpolation par IDW Grassmannien (IDW-G)

- Une courbe interpolante sur la variété de Grassmann $G_m(\mathbb{R}^n)$ est construite à partir du problème de minimisation suivant :

$$(P_{\text{IDW}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour chaque } \lambda \in \mathbb{R}^P, \text{ trouver } \bar{\Phi}_{\text{IDW}} \in G_m(\mathbb{R}^n) \text{ tel que :} \\ \bar{\Phi}_{\text{IDW}} = \arg \min_{\bar{\Phi} \in G_m(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i) \right) \end{array} \right.$$

$$\text{où } \alpha_i(\lambda) = \frac{1}{S(\lambda) \|\lambda_i - \lambda\|^q}, S(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\lambda - \lambda_i\|^q} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*$$

- La variété de Grassmann possède une courbure sectionnelle bornée donc on peut montrer que la fonction distance géodésique est localement convexe.
- L'application

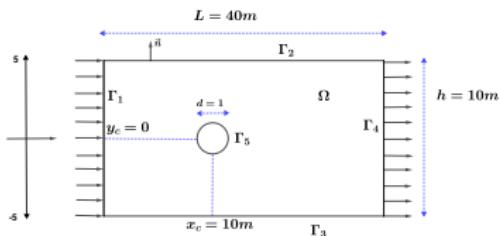
$$\begin{aligned} F_\lambda : \quad G_m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \bar{\Phi} &\mapsto F_\lambda(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i) \end{aligned}$$

vérifie

$$\nabla F_\lambda(\bar{\Phi}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}}^{-1}(\bar{\Phi}_i)$$

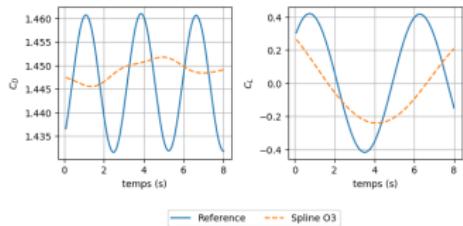
Validation numérique IDW-G

Écoulement 2D autour d'un cylindre

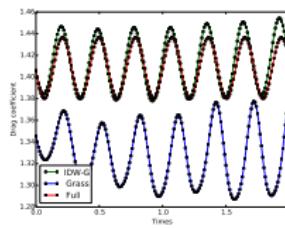


Idée «naïve» : Interpolation vectorielle

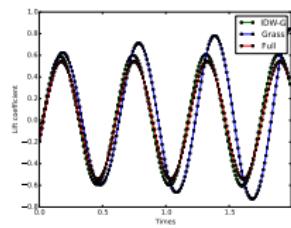
Échantillon $\{100, 120, 130, 160, 170, 200\}$
cible $Re = 110$,



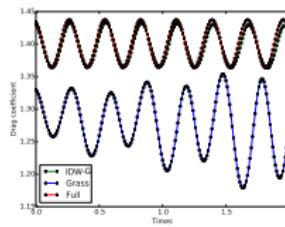
Échantillon $\{70, 80, 90, 150, 180\}$
cible 140 et 160



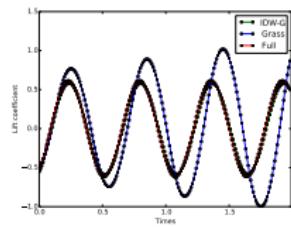
(a) C_D pour $Re = 140$



(b) C_L pour $Re = 140$



(c) C_D pour $Re = 160$



(d) C_L pour $Re = 160$

Méthode de Neville grassmannienne (GN)

- Le barycentre de Karcher de deux points est atteint sur la géodésique reliant ces points

$$\hat{y} = \arg \min_{y \in G_m(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{1}{2} \alpha_1 d^2(y, y_1) + \frac{1}{2} \alpha_2 d^2(y, y_2) \right)$$

- La courbe

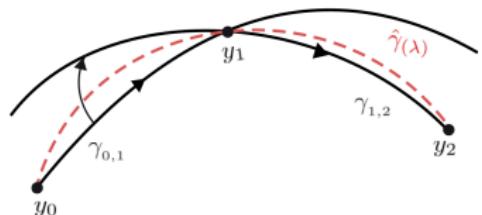
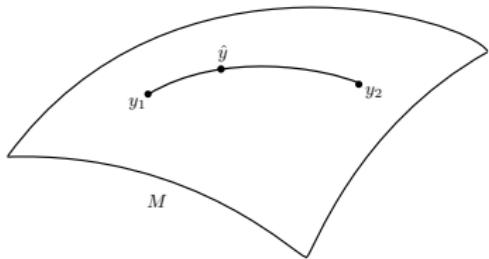
$$\hat{\gamma}(\lambda) = \exp_{\gamma_{0,1}(\lambda)} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_2 - \lambda_0} \exp_{\gamma_{0,1}(\lambda)}^{-1}(\gamma_{1,2}(\lambda)) \right)$$

est une courbe interpolante

- $\gamma_{0,1}(\lambda) = \exp_{y_0} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} \exp_{y_0}^{-1}(y_1) \right)$

- $\gamma_{1,2}(\lambda) = \exp_{y_1} \left(\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp_{y_1}^{-1}(y_2) \right)$

- On peut généraliser ce principe à un nombre fini de points sur la variété



Validation numérique GN

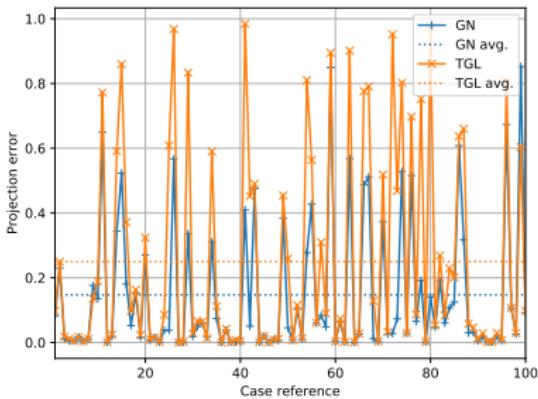
Écoulement 2D autour d'un cylindre

- Ensemble de paramètres disponibles

$$\{70, 75, \dots, 95, 100, 110, \dots, 490, 500\}$$

- 100 cas sélectionnés au hasard
- Critère utilisé : Erreur de projection

$$\varepsilon_{\Phi}^{\text{proj}} \triangleq \frac{\|\tilde{V}_{\lambda^*} - P_{\Phi}\tilde{V}_{\lambda^*}\|_F^2}{\|\tilde{V}_{\lambda^*}\|_F^2}$$



- Quelques cas sélectionnés

10 : {120, 220, 330, 380, 510}, 140

20 : {80, 240, 250, 340, 490}, 170

30 : {90, 140, 270, 390, 460}, 300

40 : {160, 170, 310, 370, 480}, 350

50 : {95, 120, 250, 460, 470}, 390

Case	GN	TGL	TGL-R2	TGL-R4
10	1.35e-01	1.89e-01	1.94e-01	2.03e-01
20	2.71e-01	3.24e-01	3.25e-01	4.52e-01
30	1.89e-02	2.79e-02	2.79e-02	3.66e-02
40	2.68e-03	4.60e-03	4.07e-03	4.44e-03
50	4.58e-02	2.59e-01	1.95e-01	2.58e-01

Interpolation par krigeage grassmannien

Principe

- ➊ Chaque vecteur $\exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}_i)$ sera considéré comme la **réalisation d'un processus aléatoire**
- ➋ Un **semi-variogramme expérimental géodésique** est construit à partir des données $\{\bar{\Phi}_i\}_{i=1}^N$
- ➌ En fonction de l'auto-corrélation spatiale, **un semi-variogramme analytique** est choisi.
- ➍ Le problème : Trouver $(\alpha_1(\lambda^*), \dots, \alpha_N(\lambda^*)) \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$(\alpha_1(\lambda^*), \dots, \alpha_N(\lambda^*)) = \underset{(\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)) \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}_i) - \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}(\lambda^*)) \right\|^2 \right]$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) = 1$$

admet une solution explicite qui dépend seulement du semi-variogramme analytique

- ➎ La base interpolée est calculée via l'exponentiel géodésique :

$$\bar{\Phi}^* = \exp_{\bar{\Phi}_r} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda^*) \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}_i) \right)$$

- ▶ Le semi-variogramme associé au processus **est inconnu en pratique**.

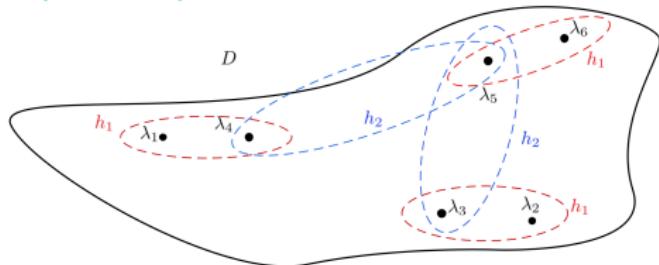
Calcul du semi-variogramme géodésique (étape 2)

- Considérer les quantités

$$m(\Lambda) = \min\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\}$$

$$M(\Lambda) = \max\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\}$$

où $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}^P$



- Définir les ensembles :

$$D_k = \{(\lambda_p, \lambda_q) \in \Lambda^2 : 1 \leq p < q \leq N \text{ et } h_{k-1} < \|\lambda_p - \lambda_q\|_{\mathbb{R}^P} \leq h_k\}$$

où

- ▶ $h_k = k \cdot m(\Lambda)$, $k \in \{1, \dots, K^* + 1\}$
- ▶ $K^* = \max\{K \in \mathbb{N} : K \cdot m(\Lambda) < M(\Lambda)\}$

- Le semi-variogramme géodésique est modélisé par les quantités

$$\nu_k = \frac{1}{\text{Card}(D_k)} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q) \in D_k} d^2(\bar{\Phi}_p, \bar{\Phi}_q)$$

Validation numérique (1/4)

Description de la procédure de validation

- Deux applications numériques :
 - ▶ l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre dans un canal ($P = 1$ paramètre)
 - ▶ l'équation de Burger bidimensionnelle ($P = 2$ paramètres)
- Procédure
 - ▶ Données de référence $\Lambda \subset \mathbb{R}^P$
 - ▶ Ensembles d'échantillonnage Λ_ℓ utilisés pour interpoler les bases POD
- Évaluation de la méthode

La méthode de Krigeage Grassmannien (GK) est comparée à l'interpolation de krigeage classique sur l'espace tangent à la variété de Grassmann (TGK).

 - ▶ Offline. Calcul du semi-variogramme expérimental
 - ▶ Online. Interpolation dans les ensembles d'échantillonnage Λ_ℓ
 - ▶ Précision
 - ★ Distance de Grassmann entre la base POD interpolée et la base POD cible
 - ★ Précision des POD-ROM
 - ▶ Temps pour obtenir les points interpolés¹

1. Tous les tests numériques ont été effectués sur un ordinateur équipé de 32 coeurs et 64Go de RAM.

Validation numérique (2/4)

Écoulement 2D autour d'un cylindre

- $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{121} \subset R$ paramètres (nombre de Reynolds) équidistants, avec $\lambda_{\min} = 71,43$ et $\lambda_{\max} = 500$
- Ensembles d'échantillonnage Λ_4 ($\text{card}(\Lambda) = 17$) et Λ_5 ($\text{card}(\Lambda) = 33$)
- Résultats pour la vitesse

Sampling set	Λ_4 (17 samples)		Λ_5 (33 samples)	
Method	GK	TGK	GK	TGK
Time offline	1.7207e+01	1.5051e+01	3.3941e+01	2.5856e+01
Mean time online	2.3945e-01	3.6491e-01	4.6051e-01	9.4354e-01
Total time online	2.8973e+01	4.4154e+01	5.5722e+01	1.1417e+02
Offline+Online	4.6180e+01	5.9205e+01	8.9663e+01	1.4002e+02
Mean distance	6.5462e-01	6.5462e-01	5.2442e-01	5.2442e-01
Mean proj. error	3.0162e-03	3.0162e-03	1.1583e-03	1.1583e-03
Mean ROM error	1.6088e-03	1.6088e-03	3.9364e-04	3.9364e-04

Le temps moyen hors ligne est le temps total hors ligne divisé par $\text{card}(\Lambda) = 121$ qui est le nombre total de paramètres cibles.

Validation numérique (3/4)

Équation de Burger bidimensionnelle (1/2)

- Équation de Burger régissant la solution $\vec{u} \in (H^1(\Omega, \mathbb{R}_+))^2$ dans le domaine spatial $\Omega = [-0.5, 0.5]^2 \subset \mathbb{R}^2$ avec la frontière $\partial\Omega$ et le domaine temporel \mathbb{R}_+ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}(\vec{u}) \cdot \vec{u} &= \frac{1}{\lambda_1} \Delta \vec{u}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= (0, 0), \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_0(\vec{x}; \lambda_2), \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases}$$

où le paramètre $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ désigne ici le nombre de Reynolds $\lambda_1 = \text{Re}$ et λ_2 contrôle la condition initiale

$$\vec{u}_0(\vec{x}; \lambda_2) = \gamma(\vec{x}) \begin{pmatrix} (1 - \lambda_2) \cos(\pi x_1) + \lambda_2 \cos(3\pi x_1) \\ \cos(\pi x_2) \end{pmatrix},$$

avec $\gamma(\vec{x}) = \max \{ \cos(\pi \|\vec{x}\|), 0 \}$.

- $\Lambda = (\vec{\lambda}_k)_{k=1}^{442}$ avec $\vec{\lambda}_k \in [100, 1000] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ défini sur une grille équidistante.
- Ensembles d'échantillonnage Λ_3 ($\text{card}(\Lambda) = 41$) et Λ_4 ($\text{card}(\Lambda) = 45$)

Validation numérique (4/4)

Équation de Burger bidimensionnelle (2/2)

Sampling set	Λ_3 (41 samples)		Λ_4 (145 samples)	
Method	GK	TGK	GK	TGK
Time offline	6.6239e+01	4.9344e+01	5.1090e+02	1.6586e+02
Mean time online	7.8069e-01	1.3356e+00	6.4201e+00	3.5939e+01
Total time online	3.4428e+02	5.8901e+02	2.8313e+03	1.5849e+04
Offline+Online	4.1052e+02	6.3836e+02	3.3422e+03	1.6015e+04
Mean distance	7.8176e-01	7.8176e-01	2.9037e-01	2.9037e-01
Mean proj. error	1.0142e-02	1.0142e-02	5.3693e-03	5.3693e-03
Mean ROM error	3.3620e-02	3.3620e-02	2.3221e-02	2.3221e-02

Le temps moyen hors ligne est le temps total hors ligne divisé par $\text{card}(\Lambda) = 442$ qui est le nombre total de paramètres cibles.

La distance de Grassmann, l'erreur de projection et l'erreur du POD-ROM sont calculées pour chaque paramètre cible et moyennées sur les 442 tests.

Interpolateur sur une variété riemannienne :

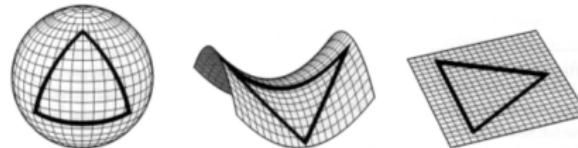
Courbe ou fonction qui passe par un nombre fini de points donnés

Dans le cas classique

- Interpolation polynomiale
 - ▶ Unicité et sensibilité aux valeurs à interpoler (la constante de Lebesgue)
 - ▶ Estimation de l'erreur d'interpolation
- Interpolation polynomiale par morceaux

Dans le cas d'une variété riemannienne

- Généraliser la notion de polynôme sur une variété riemannienne ? Comment ?
 - ▶ Définir une classe de fonctions pour étudier l'unicité de l'interpolateur
 - ▶ Sensibilité aux valeurs à interpoler
- Estimation de l'erreur d'interpolation ?



Interpolation dans un espace tangent de référence

- Notion de polynôme ?

- ▶ Soit $\tilde{P}(x) \in T_{y_r} \mathcal{M}$ un interpolateur polynomiale
- ▶ Qu'est-ce qu'on peut dire sur la courbe interpolante $I(x) = \exp_{y_r}(\tilde{P}(x))$?

- Erreur d'interpolation

Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ une application "sympa"

- ▶ L'application exponentielle $\exp_{y_r} : T_{y_r} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est lisse (donc localement lipschitzienne) alors il existe une constante C_r , tel que :

$$d(y(x), I(x)) \leq C_r \left\| \log_{y_r} \circ y(x) - \tilde{P}(x) \right\|$$

donc

$$d(y(x), I(x)) \leq C_r C \frac{|(x - x_0) \cdots (x - x_N)|}{(N + 1)!}$$

- ▶ On a simplement "déplacé le problème"

Interpolation de Neville dans une variété riemannienne (1/3)

- Géodésique entre deux points y_0, y_1 de la variété \mathcal{M}

$$\gamma_{0,1}(x) = \exp_{y_0} \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \exp_{y_0}^{-1}(y_1) \right)$$

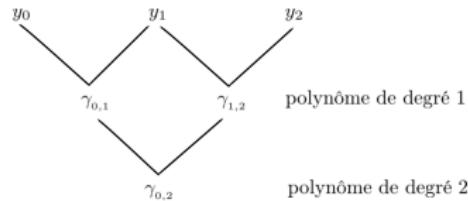
Dans le cas d'un espace vectoriel, on a :

$$\gamma_{0,1}(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (y_1 - y_0)$$

donc

$$\gamma_{0,1}(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 \quad \text{Polynôme de Lagrange}$$

- La géodésique $\gamma_{0,1}$ "peut mimer" un polynôme de degré 1 sur la variété \mathcal{M}



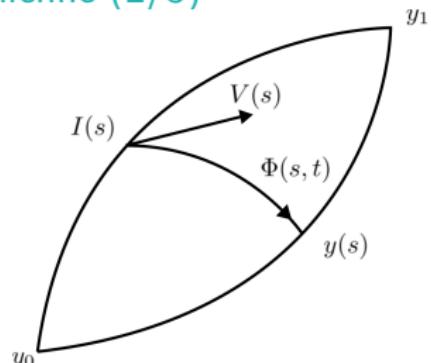
Interpolation de Neville dans une variété riemannienne (2/3)

Erreur d'interpolation

Considérons la variation des géodésiques
 $\Phi : [x_0, x_1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ définies par

$$\Phi(s, t) = \exp_{I(s)}(t V(s)),$$

où $V(s) = \exp_{I(s)}^{-1}(y(s))$ est un champ de vecteurs le long de la courbe I



Il est vérifié

$$d(y(x), I(x)) \leq \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} \left[\|\ddot{y}\|_\infty + \sup_{a \leq s, t \leq b} \left(\frac{\|P_{\partial_t \Phi^\perp} (D_t \partial_s \Phi(s, t))\|^2}{\|\partial_t \Phi(s, t)\|} \right) \right].$$

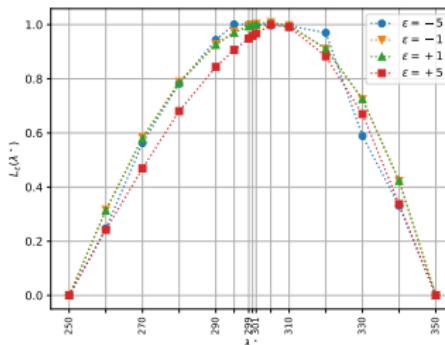
où

- $D_s : \mathfrak{X}(\Phi(\cdot, t)) \rightarrow \mathfrak{X}(\Phi(\cdot, t))$ est la dérivée covariante
- $P_{\partial_t \Phi^\perp}$ est la projection sur le sev $\partial_t \Phi^\perp$ et $\partial_t \Phi^\perp \oplus \partial_t \Phi = T_{\Phi(t, \cdot)} \mathcal{M}$
- Comme $I(x) = \gamma_{0,1}(x)$ est une géodésique $\ddot{I}(s) = 0$

Test numérique pour étudier la notion de constant de Lebesgue (3/3)

- Échantillon de référence $\Lambda_{\text{ref}} = \{250, 300, 350\}$ et base POD associée $\{\Phi(\lambda_i)\}_{0 \leq i \leq 2}$
- Considérons des ensembles d'échantillons modifiés $\Lambda_\epsilon = \{\lambda_0, \lambda_1 + \epsilon, \lambda_2\}$
- Inspirée de la constante de Lebesgue, nous considérons la quantité d'intérêt suivante :

$$L_\epsilon(\lambda^*) = \frac{d(\bar{\Phi}_{\text{ref}}^I(\lambda^*), \bar{\Phi}_\epsilon^I(\lambda^*))}{d(\bar{\Phi}(\lambda_1), \bar{\Phi}(\lambda_1 + \epsilon))}.$$
 - ▶ $\Phi_{\text{ref}}^I(\lambda^*)$ interpolateur associé à l'ensemble Λ_{ref}
 - ▶ $\Phi_\epsilon^I(\lambda^*)$ interpolateur associé à l'ensemble Λ_ϵ
- $L_\epsilon(\lambda^*)$ est calculé pour $\lambda^* \in \{250, 260, \dots, 290, 295, 299, 300, 301, 305, 310, \dots, 350\}$



Conclusion

Contributions

- Clarification du cadre mathématique pour l'interpolation sur les variétés riemanniennes
- Généralisation aux variétés riemanniennes de plusieurs interpolateurs définis sur des e.v.
- Implémentation dans une librairie ^a utilisable en "boîte noire"

a. PyDAMA : a Python library for Data Approximation on MAnifolds

Perspectives

- Définition d'une classe de fonction pour lesquelles l'unicité de l'interpolation peut être garantie
- Définition et calcul des erreurs d'interpolation sur les variété riemanniennes
- Interpolation des champs de vecteurs réduits

Merci pour votre attention.