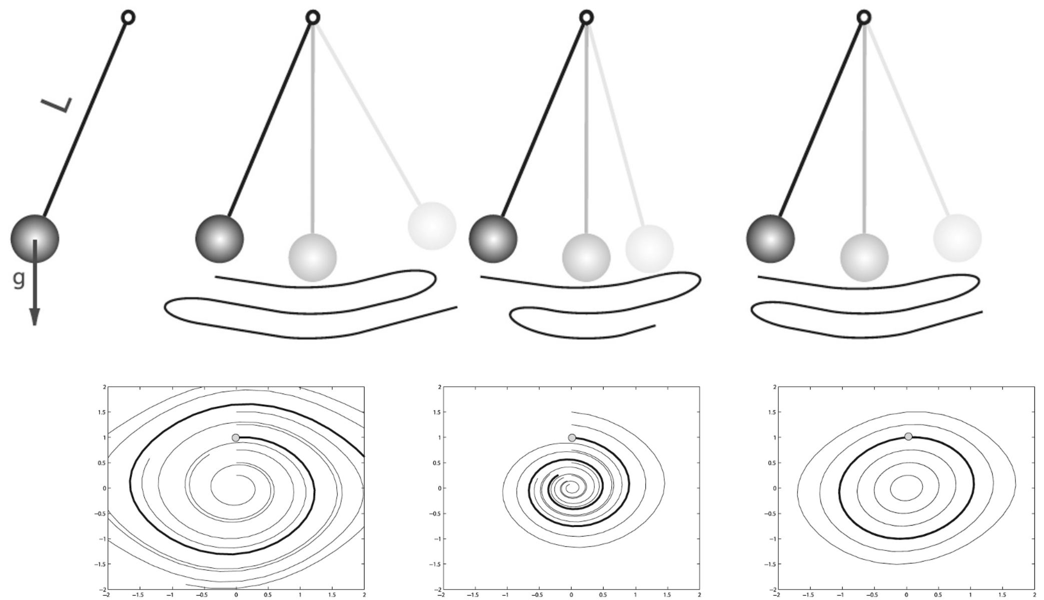
GdR GDM, Paris-Saclay, 23-25 novembre 2022

L'élastodynamique non-régulière comme exemple pour la mise en place d'un intégrateur variationnel explicite

Anthony Gravouil
Laboratoire LaMCoS, INSA Lyon, Université de Lyon

Introduction

- *Les simulations numériques précises des systèmes dynamiques sont essentielles dans pratiquement tous les domaines de la physique et de la mécanique.*
- *Cependant, la plupart des méthodes numériques traditionnelles ne prennent pas en compte la structure géométrique sous-jacente du système physique, conduisant à des résultats de simulation qui peuvent suggérer des comportements non-physiques.*
- *Le champ de l'intégration géométrique numérique (GNI) concerne les méthodes numériques qui respectent la physique fondamentale d'un problème en préservant les propriétés géométriques des équations différentielles associées.*



Introduction

- *Depuis l'émergence des méthodes de calcul, des propriétés fondamentales telles que la précision, la stabilité, la convergence et l'efficacité de calcul sont considérées comme cruciales pour décider de l'utilité d'un algorithme numérique.*

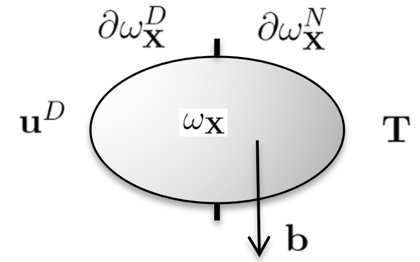
  Aujourd'hui, les aspects liés à la préservation de la structure sous-jacente sont considérés comme essentielles, en plus de ces propriétés fondamentales.

  L'une des idées clés de la préservation de la structure approchée consiste à traiter la méthode numérique comme un système dynamique discret qui se rapproche du flux de l'équation différentielle continue au lieu de se concentrer sur l'approximation numérique d'une seule trajectoire.

  Une telle approche permet une meilleure compréhension des invariants et les propriétés qualitatives de la méthode numérique.

  OBJECTIF: développer un intégrateur variationnel explicite pour l'élastodynamique non-régulière vérifiant exactement TOUTES les équations de conservation au sens discret.

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

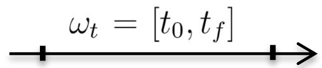


- *Configuration déformée définie par le vecteur position:*

$$\mathbf{x} \equiv \varphi(t, \mathbf{X}) \quad \forall (t, \mathbf{X}) \in \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}}$$

- *Vecteur d'état:*

$$\mathbf{m} \equiv (t, \mathbf{X}, \varphi)$$



- *Action associée à la théorie des champs de l'élastodynamique (configuration non-déformée):*

$$\boxed{\mathcal{A}\,(t, \mathbf{X}, \varphi) = \int_{\omega_t} \int_{\omega_{\mathbf{X}}} \mathcal{L}\,(t, \mathbf{X}, \varphi, d_t\varphi, d_{\mathbf{x}}\varphi)\ \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t}$$

$$d_t\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{V}$$ *vitesse*

$$d_{\mathbf{x}}\varphi = \frac{d\varphi}{d\mathbf{X}} = \mathbf{F}$$ *Tenseur gradient de la transformation*

- *Lagrangien correspondant:*

$$\mathcal{L} = T(d_t\varphi) - V(\varphi, d_{\mathbf{x}}\varphi)$$

$$T(d_t\varphi) = \tfrac{1}{2}\rho d_t\varphi . d_t\varphi \quad \text{and} \quad V(\varphi, d_{\mathbf{x}}\varphi) = V_{int}(d_{\mathbf{x}}\varphi) - V_{ext}(\varphi)$$

$$V_{int} = \psi(d_{\mathbf{x}}\varphi) \quad \text{and} \quad V_{ext}(\varphi) = \mathbf{b}.\varphi$$

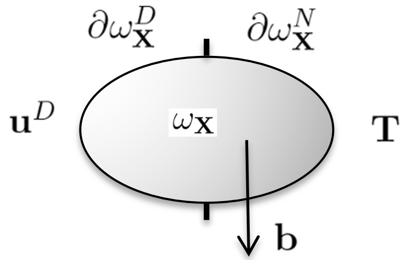
Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

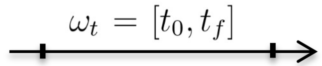
- *Principe de Hamilton:*

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta\mathcal{A} + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = 0\\ &\forall\delta\mathbf{m} \in \mathcal{M}_0(\delta\mathbf{m} \in H^1(\omega_t \times \omega_{\mathbf{X}}); \delta t|_{\partial\omega_t} = 0; \delta\mathbf{X}|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}} = 0; ...\\ &...\delta\varphi|_{\partial\omega_t} = 0; \delta\varphi|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^D} = 0)\end{aligned}}$$

$$\partial\omega_{\mathbf{X}} = \partial\omega_{\mathbf{X}}^D \cup \partial\omega_{\mathbf{X}}^N \quad and \quad \partial\omega_{\mathbf{X}}^D \cap \partial\omega_{\mathbf{X}}^N = \emptyset$$

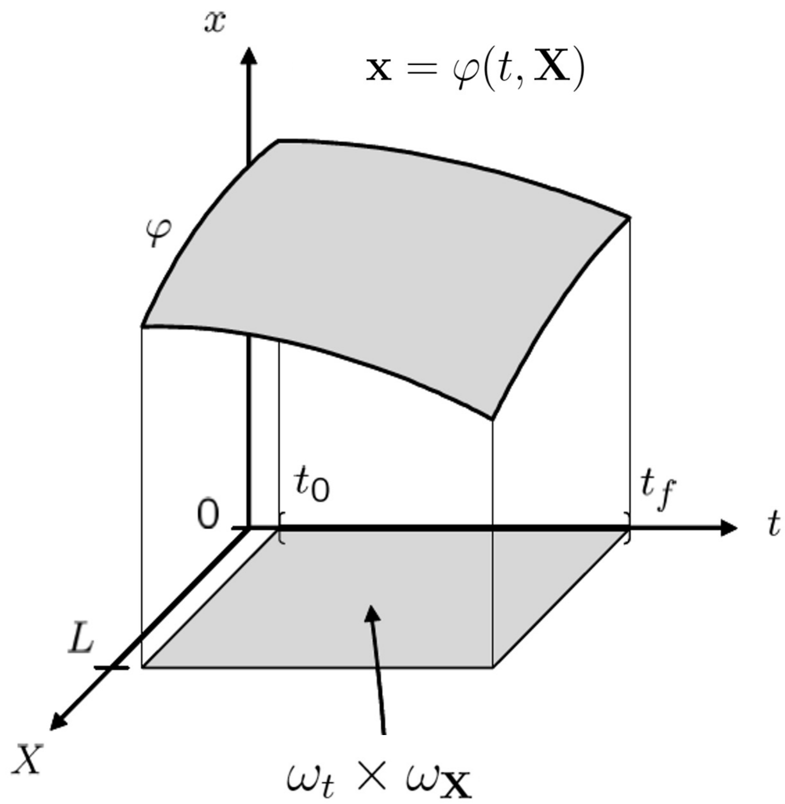
$$\varphi|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^D} = \mathbf{u}^D$$





- *Générateurs correspondants:*

$$\delta\mathcal{A} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\mathbf{m}}.\delta\mathbf{m} = \delta_t\mathcal{A} + \delta_{\mathbf{x}}\mathcal{A} + \delta_\varphi\mathcal{A} = D_t\mathcal{A}.\delta t + D_{\mathbf{X}}\mathcal{A}.\delta\mathbf{X} + D_\varphi\mathcal{A}.\delta\varphi$$


x
$\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{X})$
φ
t_0
t_f
0
t
L
X
$\omega_t \times \omega_{\mathbf{X}}$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Variation verticale:* $\boxed{\delta \mathbf{m} \equiv (\delta t = 0, \delta \mathbf{X} = 0, \delta\varphi)}$

- *Détermination du générateur vertical* $D_\varphi \mathcal{A}$ *:*

$$
\begin{aligned}
\delta_\varphi \mathcal{A} &= \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.\delta\varphi + \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.\delta d_t\varphi + \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi} : \delta d_{\mathbf{x}}\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.\delta\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} d_t \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.\delta\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t - \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} d_t \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}\right).\delta\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} d_{\mathbf{x}}. \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.\delta\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t - \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} d_{\mathbf{x}}. \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}\right).\delta\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.\delta\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \left[\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.\delta\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\right]_{t_0}^{t_f} - \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} d_t \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}\right).\delta\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}} \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.\mathbf{N}\right).\delta\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t - \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} d_{\mathbf{x}}. \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}\right).\delta\varphi \,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&= D_\varphi \mathcal{A}.\delta\varphi
\end{aligned}
$$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Variation verticale:* $\delta\mathbf{m} \equiv (\delta t = 0, \delta\mathbf{X} = 0, \delta\varphi)$

- *Générateur associé:*

$$\delta_\varphi \mathcal{A} = D_\varphi \mathcal{A}.\delta\varphi$$
$$= \int_{\omega_t} \int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - d_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi} \right) - d_{\mathbf{x}}. \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}} \varphi} \right) \right) .\delta\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{\omega_t} \int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}} \varphi}.\mathbf{N} \right) .\delta\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t$$

- *Principe de Hamilton:*

$$\boxed{D_\varphi \mathcal{A}.\delta\varphi + \int_{\omega_t} \int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\delta\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{M}_0}$$

- *Equations d'Euler-Lagrange pour l'élastodynamique:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - d_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi} \right) - d_{\mathbf{x}}. \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}} \varphi} \right) = 0 \quad in \ \omega_{\mathbf{X}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}} \varphi}.\mathbf{N} + \mathbf{T} = 0 \quad on \ \partial\omega_{\mathbf{X}}^N \end{array}}$$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Expressions des dérivées premières du Lagrangien:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \mathbf{b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi} = \rho d_t \varphi = \rho \dot{\varphi} = \mathbf{p}$$ *Quantité de mouvement*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}} \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial d_{\mathbf{x}} \varphi} = -\mathbf{\Pi}$$ *Tenseur non-symétrique des contraintes de Piola-Kirchhoff 1*

- *Equations des champs de l'élastodynamique:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{b} - d_t \mathbf{p} + d_{\mathbf{x}} . \mathbf{\Pi} = 0 \quad in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\ -\mathbf{\Pi} . \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0 \quad in\ \omega_t \times \partial \omega_{\mathbf{X}}^N \end{array}}$$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Variation horizontale:* $\boxed{\delta \mathbf{m} \equiv (\delta t, \delta \mathbf{X}, \delta \varphi = 0)}$

- *Détermination des générateurs horizontaux* $D_t\mathcal{A}$ *et* $D_{\mathbf{X}}\mathcal{A}$ *:*

$$\begin{aligned}
&\delta_t \mathcal{A} + \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{A} = \\
&\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.d_t\varphi\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_{tt}\varphi\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_{t\mathbf{x}}\varphi\delta t \right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}}.\delta \mathbf{X} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi.\delta \mathbf{X} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_{\mathbf{x}t}\varphi.\delta \mathbf{X} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi} : d_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\varphi.\delta \mathbf{X} \right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \mathcal{L}\,\delta\,(d\mathbf{X}\mathrm{d}t) = \delta\mathcal{A}^1 + \delta\mathcal{A}^2 + \delta\mathcal{A}^3
\end{aligned}$$

avec:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\delta\mathcal{A}^1 = \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + d_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_t\varphi \right) + d_{\mathbf{x}}.\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_t\varphi \right) \right) \delta t \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - d_t(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}) - d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}) \right) .d_t\varphi\delta t\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&\delta\mathcal{A}^2 = \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} + d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi) + d_t(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi) \right) .\delta \mathbf{X} \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - d_t(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}) - d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}) \right) .d_{\mathbf{x}}\varphi.\delta \mathbf{X}\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&\delta\mathcal{A}^3 = -\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} ((d_{\mathbf{X}}\mathcal{L}).\delta \mathbf{X} + (d_t\mathcal{L})\delta t)\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t
\end{aligned} \right.$$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Remarque sur le troisième terme:*

$$\delta\mathcal{A}^3 = \int_{\omega_\tau}\int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}} \mathcal{L}\,\delta\left(d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X}d_\tau t\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau$$

$$\forall(\delta t(\tau), \delta\mathbf{X}(\Xi)) \in \square_0$$

$$\square_0 \equiv ((\delta t(\tau), \delta\mathbf{X}(\Xi)) \in H^1(\omega_\tau \times \omega_\Xi); \delta t(\tau)|_{\partial\omega_\tau} = 0; \delta\mathbf{X}(\Xi)|_{\partial\omega_\Xi} = 0)$$

- *Configuration paramétrique:* $\omega_\tau = [0,1]$ and $\omega_{\boldsymbol{\Xi}} = [0,1]^3$

$$\delta\mathcal{A}^3 = \int_{\omega_\tau}\int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}} \mathcal{L}\left(\delta(d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X})d_\tau t + d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X}\delta(d_\tau t)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{\omega_\tau}\int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}} \mathcal{L}(d_{\boldsymbol{\Xi}}\delta\mathbf{X})d_\tau t\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau + \int_{\omega_\tau}\int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}} \mathcal{L}(d_\tau\delta t)d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X}\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau$$

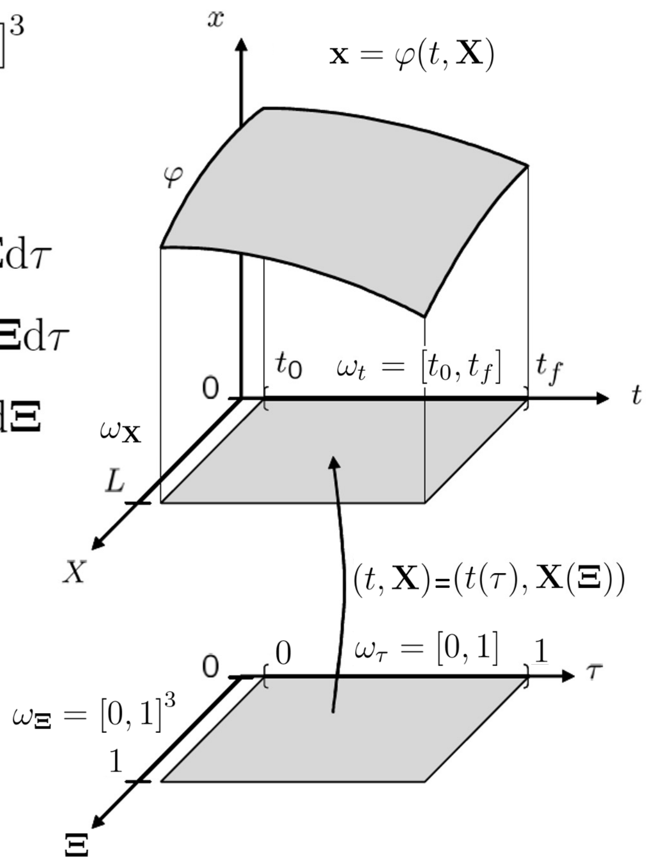
$$= \int_{\omega_\tau}\int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}} d_{\boldsymbol{\Xi}}.(\mathcal{L}\delta\mathbf{X})d_\tau t\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau - \int_{\omega_\tau}\int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}}(d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathcal{L}).\delta\mathbf{X}d_\tau t\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau$$

$$+ \int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}}\int_{\omega_\tau} d_\tau(\mathcal{L}\delta t)d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi} - \int_{\omega_{\boldsymbol{\Xi}}}\int_{\omega_\tau}(d_\tau\mathcal{L})\delta t d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}$$

avec:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \varphi(t,\mathbf{X}) = \varphi(t(\tau),\mathbf{X}(\boldsymbol{\Xi})) \\ \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t = (d_{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{X}d_\tau t)\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}\mathrm{d}\tau \end{cases}$$

$$\boxed{\delta\mathcal{A}^3 = -\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}}((d_{\mathbf{X}}\mathcal{L}).\delta\mathbf{X} + (d_t\mathcal{L})\delta t)\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t}$$



Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Principe de Hamilton:*

$$\begin{aligned}
&\delta_t\mathcal{A} + \delta_{\mathbf{X}}\mathcal{A} = \\
&\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + d_t\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_t\varphi\right) + d_{\mathbf{x}}.\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_t\varphi\right) - d_t\mathcal{L}\right)\delta t\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{X}} + d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d^s_{\mathbf{X}}\varphi) + d_t(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi) - d_{\mathbf{X}}\mathcal{L}\right).\delta\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&= D_t\mathcal{A}.\delta t + D_{\mathbf{X}}\mathcal{A}.\delta\mathbf{X} = 0
\end{aligned}$$

- *Conservation de l'énergie mécanique (générateur horizontal temporel):*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + d_t\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_t\varphi - \mathcal{L}\right) + d_{\mathbf{x}}.\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_t\varphi\right) = 0}$$

- *Conservation des forces configurationnelles (générateur horizontal spatial):*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{X}} + d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathcal{L}\mathbf{I}) + d_t(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi) = 0}$$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Forme matricielle espace-temps:*

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}}\right) + (d_t, d_{\mathbf{x}}).\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_t\varphi - \mathcal{L} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_t\varphi & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathcal{L}\mathbf{I} \end{bmatrix} = (0,0)}$$

- *Tenseur d'impulsion énergie-matière (tenseur de Eshelby espace-temps) pour l'élastodynamique:*

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}}\right) + (d_t, d_{\mathbf{x}}).\mathbf{C}_{t\mathbf{x}} = (0,0)$$

- *Cas où le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps et de l'espace:* $\mathcal{L}\left(\varphi, d_t\varphi, d_{\mathbf{x}}\varphi\right)$

$d_t(T+V) = d_{\mathbf{x}}.(\mathbf{\Pi}.\mathbf{V})$	*(énergie mécanique)*
$d_{\mathbf{x}}.(\mathbf{C}) - \mathbf{F}^T.\mathbf{b} + d_t(\mathbf{F}^T.\mathbf{p}) = 0$	*(forces configurationnelles)*
$\mathbf{C} = (-T+\psi)\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}^T.\mathbf{F}$	*(tenseur dynamique de Eshelby)*

- *Forme intégrale de la conservation de l'énergie mécanique:*

$$\boxed{\left[\int_{\omega_{\mathbf{X}}} (T+V)\ \mathrm{d}\mathbf{X}\right]_{t_0}^{t_f} = \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^D} \mathbf{\Pi}.\mathbf{N}.\mathbf{V}\ \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\mathbf{V}\ \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t}$$

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Générateur vertical prenant en compte les bords du domaine espace-temps et les forces de volume pour tout sous-domaine* $\omega'_{\mathbf{X}} \subset \omega_{\mathbf{X}}$ *:*

$$\delta_\varphi \mathcal{A}' = D_\varphi \mathcal{A}'.\delta\varphi = \left[\int_{\omega'_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi}\right).\delta\varphi\, \mathrm{d}\mathbf{X}\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega'_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.\mathbf{N}\right).\delta\varphi\, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t$$
$$- \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.\delta\varphi\, \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t$$

- *Théorème de Noether:*

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}'}{d\epsilon}(\varphi^\epsilon)|_{\epsilon=0} = D_\varphi \mathcal{A}'.\frac{d\varphi^\epsilon}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \delta\varphi^\epsilon \in \mathcal{M} \equiv (\delta\varphi^\epsilon \in H^1(\omega_t \times \omega'_{\mathbf{X}}))}$$

- *Pour tout vecteur* $\mathbf{v}$ *de* R^3 *:* $\boxed{\varphi^\epsilon = \varphi + \epsilon\mathbf{v}}$

$$\frac{d\mathcal{A}'}{d\epsilon}(\varphi^\epsilon)|_{\epsilon=0} = D_\varphi \mathcal{A}'.\mathbf{v}$$
$$= \left[\int_{\omega'_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi}\right).\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{X}\right]_{t_0}^{t_f} + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega'_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.\mathbf{N}\right).\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t - \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \quad (3$$
$$= \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}} (d_t(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi}.\mathbf{v}) + d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.\mathbf{v}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.\mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}} (d_t(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_t \varphi}) + d_{\mathbf{x}}.(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}).\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in R^3$$

→ *Nous obtenons de nouveau la conservation de l'impulsion linéaire*

Formalisme Variationnel pour l'élastodynamique

- *Pour tout tenseur antisymétrique* $\mathbf{\Omega}$ *:* $\boxed{\varphi^{\epsilon} = exp(\mathbf{\Omega}\epsilon)\varphi}$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{d\mathcal{A}'}{d\epsilon}(\varphi^{\epsilon})|_{\epsilon=0} = D_{\varphi}\mathcal{A}'.\mathbf{\Omega}\varphi \\
&= \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}}(d_t(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}.\mathbf{\Omega}\varphi) + d_{\mathbf{x}}.(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.\mathbf{\Omega}\varphi) - \tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}.\mathbf{\Omega}\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}}(d_t(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_t\varphi}) + d_{\mathbf{x}}.(\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}) - \tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}).\mathbf{\Omega}\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_t}\int_{\omega'_{\mathbf{X}}}\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi} : (\mathbf{\Omega}d_{\mathbf{x}}\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&= 0 \quad \forall\mathbf{\Omega}
\end{aligned}
$$

Il vient :

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi} : (\mathbf{\Omega}d_{\mathbf{x}}\varphi) = 0\ \forall\mathbf{\Omega} \iff (\mathbf{\Pi}.\mathbf{F}^T) : \mathbf{\Omega} = 0\ \forall\mathbf{\Omega} \\
&\iff \mathbf{\Pi}.\mathbf{F}^T = (\mathbf{\Pi}.\mathbf{F}^T)^T
\end{aligned}
$$

$\boxed{\sigma = \sigma^T}$ *conservation de l'impulsion angulaire* $\begin{cases} J = det(\mathbf{F}) \\ \sigma = J^{-1}\mathbf{\Pi}.\mathbf{F}^T \end{cases}$

➡ *Le théorème de Noether peut aussi être appliqué aux générateurs horizontaux (par exemple l'invariance par rotation entraine la symétrie du tenseur dynamique de Eshelby)*

$$\boxed{\mathbf{C} = (-T + \psi)\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}^T.\mathbf{F}}$$

Formalisme multi-symplectique pour l'élastodynamique

- *Transformées de Legendre-Fenchel partielles (voir tenseur espace-temps de Eshelby):*

$$\boxed{\begin{aligned} T^*\left(\frac{\partial T}{\partial d_t\varphi}\right) &= \sup_{d_t\varphi}\left(\frac{\partial T}{\partial d_t\varphi}.d_t\varphi - T(d_t\varphi)\right) \\ \psi^*\left(\frac{\partial \psi}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}\right) &= \sup_{d_{\mathbf{x}}\varphi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \psi(d_{\mathbf{x}}\varphi)\right) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} T^*(\mathbf{p}) &= \sup_{d_t\varphi}(\mathbf{p}.d_t\varphi - T(d_t\varphi)) \\ \psi^*(\mathbf{\Pi}) &= \sup_{d_{\mathbf{x}}\varphi}(\mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \psi(d_{\mathbf{x}}\varphi)) \end{aligned}$$

- *Action avec deux dualisations partielles sur la quantité de mouvement et la contrainte:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{A}^*(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}) = \\ &\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} (\mathbf{p}.d_t\varphi - \mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathcal{L}^*(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}))\, \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\ &\mathcal{L}^* = T^*(\mathbf{p}) - \psi^*(\mathbf{\Pi}) - V_{ext}(\varphi) \qquad T^*(\mathbf{p}) = \tfrac{1}{2}\rho^{-1}\mathbf{p}.\mathbf{p} \end{aligned}}$$

- *Vecteur d'état correspondant:* $\mathbf{m}^* \equiv (t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi})$

- *Principe de Hamilton:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta\mathcal{A}^* + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\delta\varphi\, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \delta\mathbf{m}^* \in \mathcal{M}_0^* \\ &\mathcal{M}_0^* \equiv (\delta\mathbf{m}^* \in H^1(\omega_t \times \omega_{\mathbf{X}}); \delta t|_{\partial\omega_t} = 0; \delta\mathbf{X}|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}} = 0; \ldots \\ &\ldots\delta(\varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi})|_{\partial\omega_t} = 0; \delta\varphi|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^D} = 0) \end{aligned}}$$

Formalisme multi-symplectique pour l'élastodynamique

- *Notations des 5 générateurs correspondants (2 horizontaux et 3 verticaux):*

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta\mathcal{A}^* = \tfrac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \mathbf{m}^*}.\delta\mathbf{m}^* = \delta_t\mathcal{A}^* + \delta_{\mathbf{x}}\mathcal{A}^* + \delta_\varphi\mathcal{A}^* + \delta_{\mathbf{p}}\mathcal{A}^* + \delta_{\mathbf{\Pi}}\mathcal{A}^*\\ &= D_t\mathcal{A}^*.\delta t + D_{\mathbf{X}}\mathcal{A}^*.\delta\mathbf{X} + D_\varphi\mathcal{A}^*.\delta\varphi + D_{\mathbf{p}}\mathcal{A}^*.\delta\mathbf{p} + D_{\mathbf{\Pi}}\mathcal{A}^*.\delta\mathbf{\Pi}\end{aligned}}$$

- *Calcul des 3 générateurs verticaux:*

$$\begin{aligned}
&\delta_\varphi\mathcal{A}^* + \delta_{\mathbf{p}}\mathcal{A}^* + \delta_{\mathbf{\Pi}}\mathcal{A}^* =\\
&\textstyle\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\delta\mathbf{p}.d_t\varphi + \mathbf{p}.\delta d_t\varphi - \delta\mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathbf{\Pi} : \delta d_{\mathbf{x}}\varphi\right)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t\\
&\textstyle -\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi}.\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}}.\delta\mathbf{p} + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}}.\delta\mathbf{\Pi}\right)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t\\
&\textstyle\iff \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\delta\mathbf{p}.d_t\varphi - d_t\mathbf{p}.\delta\varphi - \delta\mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi + d_{\mathbf{x}}.\mathbf{\Pi}.\delta\varphi\right)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t\\
&\textstyle +\int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N}(-\mathbf{\Pi}.\mathbf{N}).\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t\\
&\textstyle -\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi}.\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}}.\delta\mathbf{p} + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} : \delta\mathbf{\Pi}\right)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t\\
&\textstyle\iff \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}}(-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi} - d_t\mathbf{p} + d_{\mathbf{x}}.\mathbf{\Pi}).\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t\\
&\textstyle +\int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N}(-\mathbf{\Pi}.\mathbf{N}).\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t\\
&\textstyle +\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}}(-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}} + d_t\varphi).\delta\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t\\
&\textstyle +\int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}}(-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} - d_{\mathbf{x}}\varphi) : \delta\mathbf{\Pi}\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Formalisme multi-symplectique pour l'élastodynamique

- *Principe de Hamilton :*

$$D_\varphi \mathcal{A}^*.\delta\varphi + D_{\mathbf{p}}\mathcal{A}^*.\delta\mathbf{p} + D_{\mathbf{\Pi}}\mathcal{A}^*.\delta\mathbf{\Pi} + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\delta\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = 0$$

$$\forall(\delta\varphi, \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{\Pi}) \in \mathcal{M}_0^*$$

- *Equations d'Euler-Lagrange de l'élastodynamique à 3 champs:* $\mathbf{s} \equiv (\varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi})$

$$\boxed{\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi} - d_t\mathbf{p} + d_{\mathbf{x}}.\mathbf{\Pi} &= 0 \quad in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\
-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}} + d_t\varphi &= 0 \quad in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\
-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} - d_{\mathbf{x}}\varphi &= 0 \quad in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\
-\mathbf{\Pi}.\mathbf{N} + \mathbf{T} &= 0 \quad on\ \omega_t \times \partial\omega_{\mathbf{X}}^N
\end{aligned}}$$

- *Formalisme multi-symplectique:*

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} d_{\mathbf{x}} \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}} \\ \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{W}.d_t\mathbf{s} + \mathbf{K}.d_{\mathbf{x}}\mathbf{s} = \partial_{\mathbf{s}}\mathcal{L}^*$$

Formalisme multi-symplectique pour l'élastodynamique

- *Expressions des dérivées premières du Lagrangien:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \varphi} = -\mathbf{b}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{p}} = \rho^{-1}\mathbf{p}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{\Pi}} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{\Pi}} = -\mathbf{F}$$

- *Equations d'Euler-Lagrange de l'élastodynamique à 3 champs:* $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathbf{b} - d_t\mathbf{p} + d_{\mathbf{X}}.\mathbf{\Pi} & = 0 & in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\ -\rho^{-1}\mathbf{p} + d_t\varphi & = 0 & in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{F} - d_{\mathbf{X}}\varphi & = 0 & in\ \omega_t \times \omega_{\mathbf{X}} \\ -\mathbf{\Pi}.\mathbf{N} + \mathbf{T} & = 0 & in\ \omega_t \times \partial\omega_{\mathbf{X}}^N \end{array}}$$

- *Remarque 1: la forme multi-symplectique proposée est une extension de la formulation mixte d'Hellinger-Reissner à la dynamique. Des liens peuvent aussi être faits avec les formulations mixtes de Fraej de Veubeke et Hu Washizu au cas de la dynamique.*

- *Remarque 2: nous pouvons obtenir une forme symplectique lorsque le Lagrangien ne dépend pas de* $d_{\mathbf{X}}\varphi$ *et* $\mathbf{\Pi}$ *:* $\mathbf{s} \equiv (\varphi, \mathbf{p})$

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}) = \int_{\omega_t}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} (\mathbf{p}.d_t\varphi - \mathcal{L}^*(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}))\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\ \mathcal{L}^* = \mathcal{H} = T^*(\mathbf{p}) + V(\varphi) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} d_t \begin{bmatrix} \varphi \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}} \qquad \mathbf{J}.d_t\mathbf{s} = \partial_{\mathbf{s}}\mathcal{L}^*$$

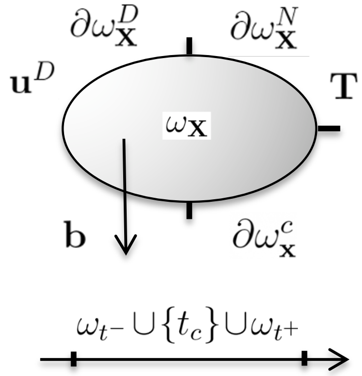
Formalisme Variationnel multi-symplectique pour l'élastodynamique non-régulière

- *Définition du bord potentiellement en contact et gap:*

$$C \equiv (\mathbf{X} \in \partial\omega^c_{\mathbf{x}}; g_N(\mathbf{X},t) \geq 0)$$

$$g_N = (\varphi - \mathbf{X}_0).(-\mathbf{N})$$

$$\partial\omega_{\mathbf{X}} = \partial\omega^D_{\mathbf{X}} \cup \partial\omega^N_{\mathbf{X}} \cup \partial\omega^c_{\mathbf{x}}$$



$$\omega_{t^+} \equiv [t_c^+, t_f]$$

$$\omega_{t^-} \equiv [t_0, t_c^-]$$

- *Action à 7 champs avec multiplicateur de Lagrange pour le contact en élastodynamique:*

$$\boxed{\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{A}}(t, t_c, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}, \lambda)\\ &= \mathcal{A}^{*-}(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}, \lambda) + \mathcal{A}^{*+}(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}, \lambda) + \textstyle\int_{\partial C} \lambda(t_c).g_N(t_c)\,\mathrm{d}\mathbf{S}\end{aligned}}$$

avec:

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{*\pm}(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}) \\ = \int_{\omega_{t^\pm}} \int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\mathbf{p}.d_t\varphi - \mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathcal{L}^*(t, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi})\right)\,\mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\ + \int_{\omega_{t^\pm}} \int_C \lambda(t).\dot{g}_N(t)\,\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t \\ \mathcal{L}^* = T^*(\mathbf{p}) - \psi^*(\mathbf{\Pi}) - V_{ext}(\varphi) \quad T^*(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\rho^{-1}\mathbf{p}.\mathbf{p} \end{cases}$$

- *Conditions complémentaires de Karush-Kuhn-Tucker sur tout l'intervalle de temps:*

$$\boxed{\lambda(\mathbf{X},t).g_N(\mathbf{X},t) = 0 \quad \lambda(\mathbf{X},t) \geq 0 \quad g_N(\mathbf{X},t) \geq 0 \ \forall \mathbf{X} \in C \ \forall t \in [t_0, t_f]}$$

Formalisme Variationnel multi-symplectique pour l'élastodynamique non-régulière

- *Définition du vecteur d'état:*

$$\widetilde{\mathbf{m}} \equiv (t, t_c, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}, \lambda)$$

- *Principe de Hamilton pour l'élastodynamique non-régulière:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta\widetilde{\mathcal{A}} + \int_{\omega_t} \int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\delta\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\delta\widetilde{\mathbf{m}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \\ \widetilde{\mathcal{M}}_0 \equiv (\delta(t, t_c, \mathbf{X}, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi}) \in H^1(\omega_t \times \omega_{\mathbf{X}}); \delta t|_{[t_0,t_f]} = 0; \delta\mathbf{X}|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}} = 0; .. \\ ...; \delta(\varphi, \mathbf{p}, \mathbf{\Pi})|_{[t_0,t_f]} = 0; \delta\varphi|_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^D} = 0; \delta\lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\omega_t \times C); \delta\lambda(t_c) > 0) \end{array}}$$

- *Définition des 7 générateurs (3 horizontaux, 4 verticaux):*

$$\begin{aligned} \delta\widetilde{\mathcal{A}} &= \frac{\partial\widetilde{\mathcal{A}}}{\partial\widetilde{\mathbf{m}}}.\delta\widetilde{\mathbf{m}} = \delta_t\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{\mathbf{x}}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_\varphi\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{\mathbf{p}}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{\mathbf{\Pi}}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{t_c}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_\lambda\widetilde{\mathcal{A}} \\ &= D_t\widetilde{\mathcal{A}}.\delta t + D_{\mathbf{X}}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\mathbf{X} + D_\varphi\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\varphi + D_{\mathbf{p}}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\mathbf{p} + D_{\mathbf{\Pi}}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\mathbf{\Pi} \\ &+ D_{t_c}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta t_c + D_\lambda\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\lambda \end{aligned}$$

Formalisme Variationnel multi-symplectique pour l'élastodynamique non-régulière

- *Définition du vecteur d'état (sans l'espace):*

$$\boxed{\delta\widetilde{\mathbf{m}} \equiv (\delta t, \delta t_c, \delta \mathbf{X} = 0, \delta\varphi, \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{\Pi}, \delta\lambda)}$$

- *Calcul des 6 générateurs correspondants (2 horizontaux, 4 verticaux):*

$$\begin{aligned}
&\delta_t\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_\varphi\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{\mathbf{p}}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{\mathbf{\Pi}}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_{t_c}\widetilde{\mathcal{A}} + \delta_\lambda\widetilde{\mathcal{A}} = \\
&\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\delta\mathbf{p}.d_t\varphi + \mathbf{p}.\delta d_t\varphi - \delta\mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathbf{\Pi} : \delta d_{\mathbf{x}}\varphi\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&- \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi}.\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}}.\delta\mathbf{p} + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} : \delta\mathbf{\Pi}\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{C} \left(\delta\lambda.\dot{g}_N + \lambda.\delta\dot{g}_N\right) \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial(\mathbf{p}.d_t\varphi)}{\partial d_t\varphi}.d_{tt}\varphi.\delta t + \frac{\partial(\mathbf{p}.d_t\varphi)}{\partial\mathbf{p}}.d_t\mathbf{p}\delta t\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&- \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial(\mathbf{\Pi}:d_{\mathbf{x}}\varphi)}{\partial d_{\mathbf{x}}\varphi}.d_{t\mathbf{x}}\varphi.\delta t + \frac{\partial(\mathbf{\Pi}:d_{\mathbf{x}}\varphi)}{\partial\mathbf{\Pi}} : d_t\mathbf{\Pi}\delta t\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&- \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial t}.\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi}.d_t\varphi\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}}.d_t\mathbf{p}\delta t + \frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} : d_t\mathbf{\Pi}\delta t\right) \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}}\int_{C} \left(\frac{\partial(\lambda.\dot{g}_N)}{\partial\lambda}.d_t\lambda.\delta t + \frac{\partial(\lambda.\dot{g}_N)}{\partial\dot{g}_N}.d_t g_N\delta t\right) \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left(\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \left(\mathbf{p}.d_t\varphi - \mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathcal{L}^*\right) \mathrm{d}\mathbf{X} + \int_C \lambda.\dot{g}_N \,\mathrm{d}\mathbf{S}\right) \delta(\mathrm{d}t) \\
&+ \int_C \delta\lambda(t_c).g_N(t_c)\,\mathrm{d}\mathbf{S} + \int_C \lambda(t_c).\delta g_N(t_c)\,\mathrm{d}\mathbf{S}
\end{aligned}$$

Formalisme Variationnel multi-symplectique pour l'élastodynamique non-régulière

- *Principe de Hamilton:*

$$D_t\widetilde{\mathcal{A}}.\delta t + D_\varphi\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\varphi + D_{\mathbf{p}}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\mathbf{p} + D_{\mathbf{\Pi}}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\mathbf{\Pi}$$
$$+D_{t_c}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta t_c + D_\lambda\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\lambda + \int_{\omega_t}\int_{\partial\omega^N_{\mathbf{X}}}\mathbf{T}.\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = 0$$
$$\forall(\delta t, \delta t_c, \delta\varphi, \delta\mathbf{p}, \delta\mathbf{\Pi}, \delta\lambda) \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$$

- *Equations d'Euler-Lagrange de l'élastodynamique non-régulière:*

$$\boxed{\begin{array}{lll}
-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\varphi} - d_t\mathbf{p} + d_{\mathbf{x}}.\mathbf{\Pi} & = 0 & \text{in } (\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+})\times\omega_{\mathbf{X}} \\
-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{p}} + d_t\varphi & = 0 & \text{if } (\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+})\times\omega_{\mathbf{X}} \\
-\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial\mathbf{\Pi}} - d_{\mathbf{x}}\varphi & = 0 & \text{in } (\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+})\times\omega_{\mathbf{X}} \\
\mathbf{\Pi}.\mathbf{N} & = \dot{\lambda}\mathbf{N} & \text{on } (\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+})\times\partial\omega^c_{\mathbf{X}} \\
\mathbf{\Pi}.\mathbf{N} & = \mathbf{T} & \text{on } (\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+})\times\partial\omega^N_{\mathbf{X}} \\
\frac{\partial\mathcal{L}^*}{\partial t} + d_t(\mathbf{p}.d_t\varphi - \mathcal{L}^*) - d_{\mathbf{x}}(\mathbf{\Pi}.d_t\varphi) & = 0 & \text{in } (\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+})\times\omega_{\mathbf{X}} \\
[\mathbf{p}]_{t_c^-}^{t_c^+} & = 0 & \text{in } \omega_{\mathbf{X}} \\
[\mathbf{p}.d_t\varphi - \mathcal{L}^*]_{t_c^-}^{t_c^+} & = 0 & \text{in } \omega_{\mathbf{X}} \\
\lambda(t_c).\dot{g}_N(t_c) & = 0 & \text{on } \partial\omega^c_{\mathbf{X}} \\
g_N(t_c) & = 0 & \text{on } \partial\omega^c_{\mathbf{X}} \\
+\text{KKT conditions} & &
\end{array}}$$

Formalisme Variationnel multi-symplectique pour l'élastodynamique non-régulière

- *Les conditions KKT combinées aux deux conditions de contact précédentes s'écrivent:*

$$\begin{cases} \lambda(\mathbf{X},t).g_N(\mathbf{X},t)=0 \quad \lambda(\mathbf{X},t)\geq 0 \quad g_N(\mathbf{X},t)\geq 0 \ \forall \mathbf{X}\in C \ \forall t\in[t_0,t_f] \\ \lambda(t_c).\dot{g}_N(t_c) \qquad\qquad = 0 \quad \text{on } \partial\omega^c_{\mathbf{x}} \\ g_N(t_c) \qquad\qquad = 0 \quad \text{on } \partial\omega^c_{\mathbf{x}} \end{cases}$$

- *Ces conditions sont strictement équivalentes aux conditions de Hertz-Signorini-Moreau (HSM):*

$$\boxed{\begin{cases} g_N(t)\geq 0 \\ \lambda(t)\geq 0 \\ \lambda(t).g_N(t)=0 \\ \lambda(t_c).\dot{g}_N(t_c)=0 \\ g_N(t_c)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{if } \ g_N(t)>0 \ \text{ then } \ \lambda(t)=0 \\ \text{if } \ g_N(t)=0 \ \text{ then } \ \begin{cases} \dot{g}_N(t)\geq 0 \\ \lambda(t)\geq 0 \\ \lambda(t).\dot{g}_N(t)=0 \end{cases} \end{cases}}$$

Formalisme Variationnel multi-symplectique pour l'élastodynamique non-régulière

- *A partir des dérivées premières du Lagrangien, on obtient les équations d'Euler-Lagrange de l'élastodynamique non-régulière dans le cadre d'une formulation mixte, à laquelle on associe les conditions HSM:*

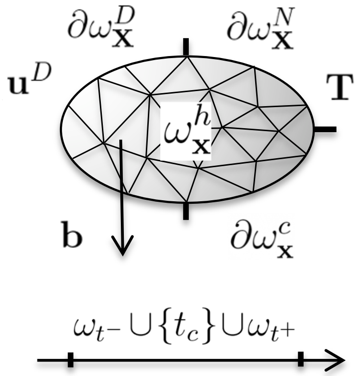
$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\mathbf{b} - d_t\mathbf{p} + d_{\mathbf{x}}.\mathbf{\Pi} & = 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega_{\mathbf{X}} \\
-\rho^{-1}\mathbf{p} + d_t\varphi & = 0 \quad \text{if } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega_{\mathbf{X}} \\
\mathbf{F} - d_{\mathbf{x}}\varphi & = 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega_{\mathbf{X}} \\
\mathbf{\Pi}.\mathbf{N} & = \dot{\lambda}.\mathbf{N} \quad \text{on } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \partial\omega_{\mathbf{X}}^{c} \\
\mathbf{\Pi}.\mathbf{N} & = \mathbf{T} \quad \text{on } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \partial\omega_{\mathbf{X}}^{N} \\
d_t(T^*(\mathbf{p}) + \psi^*(\mathbf{\Pi})) - d_{\mathbf{x}}(\mathbf{\Pi}.d_t\varphi) & = 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega_{\mathbf{X}} \\
[\mathbf{p}]_{t_c^-}^{t_c^+} & = 0 \quad \text{in } \omega_{\mathbf{X}} \\
[T^*(\mathbf{p})]_{t_c^-}^{t_c^+} & = 0 \quad \text{in } \omega_{\mathbf{X}} \\
+\text{HSM conditions} &
\end{array}
}
$$

- *De la même façon, on peut calculer l'expression de l'équation de conservation des forces configurationnelles (formulation mixte) à partir du générateur horizontal spatial $D_{\mathbf{X}}\underset{\sim}{\mathcal{A}}$:*

$$
\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{X}} + d_{\mathbf{x}}.(-\mathbf{\Pi}.d_{\mathbf{x}}\varphi - \mathcal{L}^*\mathbf{I}) + d_t(\mathbf{p}.d_{\mathbf{x}}\varphi) = 0
$$

Formulation variationnelle semi-discrétisée en espace pour l'élastodynamique non-régulière

- *Maillage de la géométrie:*



Coordonnées des noeuds:

$$\mathbf{X}_j$$

- *Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis:*

$$\boxed{\begin{array}{c}
\varphi(t,\mathbf{X}) \simeq \varphi^h(t,\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t).\phi_i^u(\mathbf{X}) \\
\mathbf{p}(t,\mathbf{X}) \simeq \mathbf{p}^h(t,\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t).\phi_i^p(\mathbf{X}) \\
\mathbf{\Pi}(t,\mathbf{X}) \simeq \mathbf{\Pi}^h(t,\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} s_i(t).\phi_i^s(\mathbf{X}) \\
\hline
\lambda(t,\mathbf{X}) \simeq \lambda^h(t,\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(t).\phi_i^\lambda(\mathbf{X})
\end{array}}$$

- *Partition de l'unité et support compact:* $\sum_{i=1}^{n} \phi_i^u(\mathbf{X}) = 1$ $\quad \phi_i^u(\mathbf{X}_j) = \delta_{ij}$

Formulation variationnelle semi-discrétisée en espace pour l'élastodynamique non-régulière

- *Action multi-champs semi-discrétisée en espace pour la dynamique non-régulière:*

$$\boxed{\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{A}}^h(t, t_c, \mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{F}_{int}, \mathbf{\Lambda})\\ &= \int_{\omega_{t^-}\cup\omega_{t^+}} \left(\mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{F}_{int}^T.\mathbf{U} - \mathcal{L}^{h^*} + \mathbf{\Lambda}^T.\dot{\mathbf{g}}_N\right)\,\mathrm{d}t + \Lambda(t_c)^T.\mathbf{g}_N(t_c)\\ &+ \text{KKT conditions}\\ &\text{with} \quad \mathcal{L}^{h^*} = T^{h^*}(\mathbf{P}) - \Psi^{h^*}(\mathbf{F}_{int}) - \mathbf{F}_{ext}^T.\mathbf{U}\end{aligned}}$$

- *Discrétisation spatiale des différents termes:*
  - $\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \mathbf{p}.d_t\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{X} \simeq \int_{\omega_{\mathbf{X}}^h} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t).\phi_i^p(\mathbf{X})\right).d_t\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t).\phi_j^u(\mathbf{X})\right)\,\mathrm{d}\mathbf{X}$
    $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\left(\int_{\omega_{\mathbf{X}}^h} \phi_i^p.\phi_j^u\,\mathrm{d}\mathbf{X}\right) d_t u_j(t) = \mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}}$
  - $\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \mathbf{\Pi} : d_{\mathbf{X}}\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{X} \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_i(t).\left(\int_{\omega_{\mathbf{X}}^h} \phi_i^s : d_{\mathbf{X}}\phi_j^u\,\mathrm{d}\mathbf{X}\right) u_j(t) = \mathbf{F}_{int}^T.\mathbf{U}$
  - $\int_{\omega_{\mathbf{X}}} \mathbf{b}.\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{X} \simeq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\omega_{\mathbf{X}}^h} \mathbf{b}.\phi_i^u(\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X}\right) u_i(t) = \mathbf{F}_{ext}^T.\mathbf{U}$
  - $\int_C \lambda(t).\dot{g}_N(t)\,\mathrm{d}\mathbf{S} \simeq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i(t).(\int_C \phi_i^\lambda.\phi_j^\lambda\,\mathrm{d}\mathbf{S})\dot{g}_{N_j}(t) = \mathbf{\Lambda}^T.\dot{\mathbf{g}}_N$
  - $\int_C \dot{\lambda}.\delta g_N\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_C \dot{\lambda}.d_\varphi g_N\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S}$
    $\simeq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \dot{\lambda}_i.(\int_C \phi_i^\lambda.\phi_j^u.(-\mathbf{N})\,\mathrm{d}\mathbf{S})\delta U_j = \dot{\mathbf{\Lambda}}^T.(-\mathbf{L}).\delta\mathbf{U} = \dot{\mathbf{\Lambda}}^T.\delta\mathbf{g}_N$

Formulation variationnelle semi-discrétisée en espace pour l'élastodynamique non-régulière

- *Principe de Hamilton semi-discrétisé en espace pour la dynamique non-régulière:*

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\delta\widetilde{\mathcal{A}}^h + \int_{\omega_t} {\mathbf{F}^s_{ext}}^T.\delta\mathbf{U}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\delta\widetilde{\mathbf{m}}^h \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^h \\
\widetilde{\mathcal{M}}_0^h \equiv (\delta(\mathbf{U},\mathbf{P},\mathbf{F}_{int}) \in H^1(\omega_t \times \omega_{\mathbf{x}}^h); \delta t|_{[t_0,t_f]} = 0; ... \\
...\delta(\mathbf{U},\mathbf{P},\mathbf{F}_{int})|_{[t_0,t_f]} = 0; \delta\mathbf{U}|_{\partial\omega_{\mathbf{x}}^D} = 0; \delta\mathbf{\Lambda} \in H^{\frac{1}{2}}(\omega_t \times C); ... \\
...\delta\Lambda^i(t_c) > 0, i \in \{1,...p\})
\end{array}
}
$$

avec: $\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\delta\varphi\,\mathrm{d}\mathbf{S} \simeq \sum_{i=1}^{n} (\int_{\partial\omega_{\mathbf{X}}^N} \mathbf{T}.\phi_i\,\mathrm{d}\mathbf{S}).\delta U_i = {\mathbf{F}^s_{ext}}^T.\delta\mathbf{U}$

Formulation variationnelle semi-discrétisée en espace pour l'élastodynamique non-régulière

- *Définition des 6 générateurs semi-discrétisés en espace 2 horizontaux et 4 verticaux):*

$$\delta\widetilde{\mathcal{A}}^h = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{A}}^h}{\partial\widetilde{\mathbf{m}}^h}.\delta\widetilde{\mathbf{m}}^h = \delta_t\widetilde{\mathcal{A}}^h + \delta_{t_c}\widetilde{\mathcal{A}}^h + \delta_{\mathbf{U}}\widetilde{\mathcal{A}}^h + \delta_{\mathbf{P}}\widetilde{\mathcal{A}}^h + \delta_{\mathbf{F}_{int}}\widetilde{\mathcal{A}}^h + \delta_{\mathbf{\Lambda}}\widetilde{\mathcal{A}}^h$$
$$= D_t\widetilde{\mathcal{A}}^h.\delta t + D_{t_c}\widetilde{\mathcal{A}}^h.\delta t_c + D_{\mathbf{U}}\widetilde{\mathcal{A}}^h.\delta\mathbf{U} + D_{\mathbf{P}}\widetilde{\mathcal{A}}^h.\delta\mathbf{P} + D_{\mathbf{F}_{int}}\widetilde{\mathcal{A}}^h.\delta\mathbf{F}_{int}$$
$$+D_{\mathbf{\Lambda}}\widetilde{\mathcal{A}}.\delta\mathbf{\Lambda}$$

- *Calcul des 6 générateurs correspondants*

$$\delta\widetilde{\mathcal{A}}^h = \int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left(\delta\mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}^T.\delta\dot{\mathbf{U}} - \delta\mathbf{F}_{int}^T.\mathbf{U} - \mathbf{F}_{int}^T.\delta\mathbf{U}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left(-(\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial\mathbf{U}})^T.\delta\mathbf{U} - (\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial\mathbf{P}})^T.\delta\mathbf{P} - (\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial\mathbf{F}_{int}})^T.\delta\mathbf{F}_{int}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left(\delta\mathbf{\Lambda}^T.\dot{\mathbf{g}}_N + \mathbf{\Lambda}^T.\delta\dot{\mathbf{g}}_N\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left((\frac{\partial(\mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}})}{\partial\mathbf{P}})^T.\dot{\mathbf{P}}\delta t + (\frac{\partial(\mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}})}{\partial\dot{\mathbf{U}}})^T.\ddot{\mathbf{U}}\delta t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left((\frac{\partial({\mathbf{F}_{int}}^T.\dot{\mathbf{U}})}{\partial\mathbf{F}_{int}})^T.\dot{\mathbf{F}}_{int}\delta t + (\frac{\partial({\mathbf{F}_{int}}^T.\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}})^T.\dot{\mathbf{U}}\delta t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left(-(\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial t})^T\delta t - (\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial\mathbf{U}})^T.\dot{\mathbf{U}}\delta t - (\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial\mathbf{P}})^T.\dot{\mathbf{P}}\delta t - (\frac{\partial\mathcal{L}^{h*}}{\partial\mathbf{F}_{int}})^T.\dot{\mathbf{F}}_{int}\delta t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left((\frac{\partial(\mathbf{\Lambda}^T.\dot{\mathbf{g}}_N)}{\partial\mathbf{\Lambda}})^T.\dot{\mathbf{\Lambda}}\delta t + (\frac{\partial(\mathbf{\Lambda}^T.\dot{\mathbf{g}}_N)}{\partial\dot{\mathbf{g}}_N})^T.\ddot{\mathbf{g}}_N\delta t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\omega_{t-}\cup\omega_{t+}} \left(\mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{F}_{int}^T.\mathbf{U} - \mathcal{L}^{h*} + \mathbf{\Lambda}^T.\dot{\mathbf{g}}_N)\right)\,\delta(\mathrm{d}t)$$
$$+\delta\mathbf{\Lambda}(t_c)^T.\mathbf{g}_N(t_c) + \mathbf{\Lambda}(t_c)^T.\delta\mathbf{g}_N(t_c)$$

Formulation variationnelle semi-discrétisée en espace pour l'élastodynamique non-régulière

- *Equations d'Euler-Lagrange semi-discrétisées en espace de l'élastodynamique non-régulière:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}^{h*}}{\partial \mathbf{U}} + \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{F}_{int} &&= \mathbf{F}^{s}_{ext} + \mathbf{L}^T \dot{\mathbf{\Lambda}} \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
&-\frac{\partial \mathcal{L}^{*}}{\partial \mathbf{P}} + \dot{\mathbf{U}} &&= 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
&-\frac{\partial \mathcal{L}^{*}}{\partial \mathbf{F}_{int}} - \mathbf{U} &&= 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
&-\frac{\partial \mathcal{L}^{h*}}{\partial t} + d_t(\mathcal{L}^{h*} + \mathbf{F}^T_{int}\mathbf{U}) &&= (\mathbf{L}^T \dot{\mathbf{\Lambda}})^T.\dot{\mathbf{U}} + {\mathbf{F}^{s}_{ext}}^T.\dot{\mathbf{U}} \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
&[\mathbf{P}]^{t_c^+}_{t_c^-} &&= 0 \quad \text{in } \omega^h_{\mathbf{x}} \\
&[\mathbf{P}^T.\dot{\mathbf{U}} - \mathcal{L}^{h*}]^{t_c^+}_{t_c^-} &&= 0 \quad \text{in } \omega^h_{\mathbf{x}} \\
&\mathbf{\Lambda}(t_c)^T.\dot{\mathbf{g}}_N(t_c) &&= 0 \quad \text{on } \partial\omega^c_{\mathbf{x}} \\
&\mathbf{g}_N(t_c) &&= 0 \quad \text{on } \partial\omega^c_{\mathbf{x}} \\
&+\text{KKT conditions}
\end{aligned}
$$

Formulation variationnelle semi-discrétisée en espace pour l'élastodynamique non-régulière

- *Expressions des dérivées premières du Lagrangien semi-discrétisé en espace:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{h*}}{\partial \mathbf{U}} = -\mathbf{F}_{ext}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{h*}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial T^*}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$$

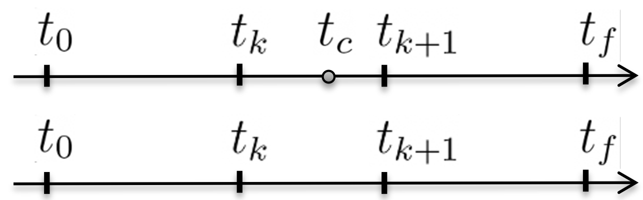
$$\frac{\partial \mathcal{L}^{h*}}{\partial \mathbf{F}_{int}} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{F}_{int}} = -\mathbf{K}_{tang}^{-1}\mathbf{F}_{int}$$

- *Equations d'Euler-Lagrange semi-discrétisées en espace de l'élastodynamique non-régulière:*

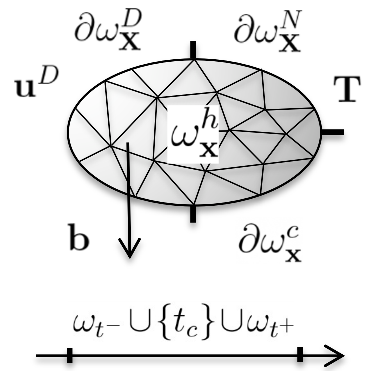
$$\boxed{\begin{array}{ll}
\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{F}_{int} & = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}^s_{ext} + \mathbf{L}^T\dot{\mathbf{\Lambda}} \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} + \dot{\mathbf{U}} & = 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
\mathbf{K}_{tang}^{-1}\mathbf{F}_{int} - \mathbf{U} & = 0 \quad \text{in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
d_t(T^{h^*}(\mathbf{P}) + \psi^*(\mathbf{F}_{int})) & = (\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}^s_{ext} + \mathbf{L}^T\dot{\mathbf{\Lambda}})^T.\dot{\mathbf{U}} \text{ in } (\omega_{t^-} \cup \omega_{t^+}) \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
[\mathbf{P}]_{t_c^-}^{t_c^+} & = 0 \text{ in } \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
[\frac{1}{2}\mathbf{P}^T.\mathbf{M}^{-1}.\mathbf{P}]_{t_c^-}^{t_c^+} & = 0 \text{ in } \times \omega^h_{\mathbf{x}} \\
+\text{HSM conditions} &
\end{array}}$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Deux familles de schémas temporels en dynamique non-régulière:*
  - *Event driven*
  - *Time stepping*



$$\tau = t_{k+1} - t_k$$



Contrairement à la formulation continue en temps, et suivant les idées de Moreau, l'instant de l'impact ne doit pas être détecté. En effet, l'impact est ici pris au sens faible. En d'autres termes, de nombreux impacts peuvent survenir au cours d'un pas de temps. Cependant, il n'est pas nécessaire de les détecter avec précision. Ici, une différence principale doit être faite entre les intégrateurs « event driven » (détection de l'événement d'un impact) et les intégrateurs temporels « time stepping » (pas de détection de l'événement d'un impact au sens fort). Ici, l'approche « time stepping » sera privilégiée afin de permettre éventuellement une infinité d'événements d'impact dans un temps fini (paradoxe de Zenon). Par conséquent, l'approximation temporelle ne contient plus l'instant d'impact t_c comme variable de l'action.

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Action multi-champs discrétisée en espace et en temps pour la dynamique non-régulière:*

$$\tilde{\mathcal{A}}^{h}(t) \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathcal{A}}^{h\tau}(t_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}, \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}})$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{A}}^{h\tau}(t_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}, \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}) \\ &= \tau \mathbf{P}^{T}_{k+\frac{1}{2}} . \frac{(\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k)}{\tau} - \frac{\tau}{2}(\mathbf{F}_{int\,k}^{T} . \mathbf{U}_k + \mathbf{F}_{int\,k+1}^{T} . \mathbf{U}_{k+1}) \\ &- \frac{\tau}{2}(\mathcal{L}^{h\tau *}(\mathbf{U}_k, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{P}_k) + \mathcal{L}^{h\tau *}(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{P}_{k+1})) \\ &+ \tau \mathbf{\Lambda}^{T}_{k+\frac{1}{2}} . \dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{1}{2}}} \\ &+ \text{HSM conditions} \end{aligned}}$$

avec: $$\mathcal{L}^{h\tau *}(\mathbf{U}_k, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k}) = T^{h\tau *}(\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}) - \Psi^{h\tau *}(\mathbf{F}_{int\,k}) - \mathbf{F}^{T}_{ext\,k} . \mathbf{U}_k$$

$$\begin{cases} \text{if} \quad g^{i}_{N\,k+1} > 0 \quad \text{then} \quad \Lambda^{i}_{k+\frac{3}{2}} = 0 \\ \text{if} \quad g^{i}_{N\,k+1} \leq 0 \quad \text{then} \quad \begin{cases} \dot{g}^{i}_{N_{k+\frac{3}{2}}} \geq 0 \\ \Lambda^{i}_{k+\frac{3}{2}} \geq 0 \\ \Lambda^{T}_{k+\frac{3}{2}} . \dot{g}^{i}_{N_{k+\frac{3}{2}}} = 0 \end{cases} \end{cases} \qquad i \in \{1, ...p\}$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Vecteur d'état:*

$$\boxed{\overset{\sim}{\mathbf{m}}^{h\tau} \equiv \left(t_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}, \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}\right)}$$

- *Principe de Hamilton discret espace-temps:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \tau {\mathbf{F}^{s}_{ext\,k+1}}^{T}.\delta\mathbf{U}_{k+1} = 0 \quad \forall \delta\overset{\sim}{\mathbf{m}}^{h\tau} \in \overset{\sim}{\mathcal{M}}_0^{h\tau} \\ \overset{\sim}{\mathcal{M}}_0^{h\tau} \equiv \left(\delta\overset{\sim}{\mathbf{m}}^{h\tau}|_{\partial\omega_t} = 0; \delta\mathbf{U}|_{\partial\omega^D_{\mathbf{X}}} = 0; \delta\mathbf{\Lambda} = 0\right) \end{array}}$$

- *Générateurs discrets espace-temps (1 horizontal et 4 verticaux):*

$$\begin{aligned} \delta\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} &= \frac{\partial\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}}{\partial\overset{\sim}{\mathbf{m}}^{h\tau}}.\delta\overset{\sim}{\mathbf{m}}^{h\tau} = \delta_t\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} + \delta_{\mathbf{U}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} + \delta_{\mathbf{P}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} + \delta_{\mathbf{F}_{int}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} + \delta_{\mathbf{\Lambda}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} \\ &= D_t\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}.\delta t_{k+1} + D_{\mathbf{U}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}.\delta\mathbf{U}_{k+1} + D_{\mathbf{P}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}.\delta\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} \\ &+ D_{\mathbf{F}_{int}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}.\delta\mathbf{F}_{int\,k+1} + D_{\mathbf{\Lambda}}\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}.\delta\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Calcul des 5 générateurs correspondants (1 horizontal et 4 verticaux):*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1}(\delta\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}^T.(\mathbf{U}_{k+1}-\mathbf{U}_k)+\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}^T.\delta\mathbf{U}_{k+1}-\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}^T.\delta\mathbf{U}_k\\
&-\tfrac{\delta\tau}{2}(\mathbf{F}_{int\,k}^{\ T}.\mathbf{U}_k+\mathbf{F}_{int\,k+1}^{\ T}.\mathbf{U}_{k+1})\\
&-\tfrac{\tau}{2}(\delta\mathbf{F}_{int\,k}^{\ T}.\mathbf{U}_k+\mathbf{F}_{int\,k}^{\ T}.\delta\mathbf{U}_k+\delta\mathbf{F}_{int\,k+1}^{\ T}.\mathbf{U}_{k+1}+\mathbf{F}_{int\,k+1}^{\ T}.\delta\mathbf{U}_{k+1})\\
&-\tfrac{\delta\tau}{2}(\mathcal{L}^{h\tau*}(\mathbf{U}_k,\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k})+\mathcal{L}^{h\tau*}(\mathbf{U}_{k+1},\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k+1}))\\
&-\tfrac{\tau}{2}(\tfrac{\partial\mathcal{L}^{h\tau*}}{\partial\mathbf{U}_k}(\mathbf{U}_k,\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k})\delta\mathbf{U}_k+\tfrac{\partial\mathcal{L}^{h\tau*}}{\partial\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}}(\mathbf{U}_k,\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k})\delta\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}+\ldots\\
&\ldots+\tfrac{\partial\mathcal{L}^{h\tau*}}{\partial\mathbf{F}_{int\,k}}(\mathbf{U}_k,\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k})\delta\mathbf{F}_{int\,k})\\
&-\tfrac{\tau}{2}(\tfrac{\partial\mathcal{L}^{h\tau*}}{\partial\mathbf{U}_{k+1}}(\mathbf{U}_{k+1},\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k+1})\delta\mathbf{U}_{k+1}+\ldots\\
&\ldots+\tfrac{\partial\mathcal{L}^{h\tau*}}{\partial\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}}(\mathbf{U}_{k+1},\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k+1})\delta\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}+\ldots\\
&\ldots+\tfrac{\partial\mathcal{L}^{h\tau*}}{\partial\mathbf{F}_{int\,k+1}}(\mathbf{U}_{k+1},\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}},\mathbf{F}_{int\,k+1})\delta\mathbf{F}_{int\,k+1})\\
&+\delta\tau\boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}^T.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{1}{2}}}+\tau\delta\boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}^T.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{1}{2}}}+\tau\boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}^T.\delta\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}})\\
&+\tau\mathbf{F}_{ext\,k+1}^{s\ \ T}.\delta\mathbf{U}_{k+1})=0\quad\forall\delta\tilde{\mathbf{m}}^{h\tau}\in\tilde{\mathcal{M}}_0^{h\tau}\\
&+\ \text{HSM conditions}
\end{aligned}
$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Générateur vertical associé à la quantité de mouvement:*

$$\delta \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} \qquad D_{\mathbf{P}} \overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} = (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^{h\tau *}}{\partial \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}} (\mathbf{U}_k, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k}) + ...$$

$$... - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^{h\tau *}}{\partial \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}} (\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \tau \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}}$$

- *Générateur vertical associé au déplacement (équation du mouvement discrétisée en espace-temps):*

$$\delta \mathbf{U}_{k+1} \qquad D_{\mathbf{U}} \overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau} = -\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} + \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} - \tau \mathbf{F}_{int\,k+1}$$

$$-\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{h\tau *}}{\partial \mathbf{U}_{k+1}} (\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^{h\tau *}}{\partial \mathbf{U}_{k+1}} (\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}) \right)$$

$$+\mathbf{L}^T \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} - \mathbf{L}^T \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}} + \tau \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} = 0$$

avec: $\delta \dot{\mathbf{g}}_{N\,k+\frac{1}{2}} = -\mathbf{L} \delta \dot{\mathbf{U}}_{k+\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} = \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} + \tau (\mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} - \mathbf{F}_{int\,k+1}) + \mathbf{L}^T (\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} - \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}})}$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Générateur vertical associé aux efforts intérieurs:*

$\delta \mathbf{F}_{int\,k+1}$

$$D_{\mathbf{F}_{int}} \overset{\sim h\tau}{\mathcal{A}} = \mathbf{U}_{k+1} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}^{h\tau *}}{\partial \mathbf{F}_{int\,k+1}}(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}) + \frac{\partial \mathcal{L}^{h\tau *}}{\partial \mathbf{F}_{int\,k+1}}(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1})\Big) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{K}_{tang}^{-1}\mathbf{F}_{int\,k+1} = 0}$$

- *Générateur horizontal associé au temps (bilan énergétique discrétisé en espace-temps):*

δt_{k+1}

$$\boxed{\begin{aligned}&\Big(\big(T^{h\tau *}(\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}) + \tfrac{1}{2}(\Psi^{h\tau *}(\mathbf{F}_{int\,k+1}) + \Psi^{h\tau *}(\mathbf{F}_{int\,k+2})\big)\\ &-\big(T^{h\tau *}(\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2}(\Psi^{h\tau *}(\mathbf{F}_{int\,k}) + \Psi^{h\tau *}(\mathbf{F}_{int\,k+1}))\big)\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big((\mathbf{F}_{ext\,k+1}^T.\mathbf{U}_{k+1} + \mathbf{F}_{ext\,k+2}^T.\mathbf{U}_{k+2}) - (\mathbf{F}_{ext\,k}^T.\mathbf{U}_k + \mathbf{F}_{ext\,k+1}^T.\mathbf{U}_{k+1})\big)\\ &-\big(\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}}^T.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}} - \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}^T.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{1}{2}}}\big)\end{aligned}}$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Bilan des équations d'Euler-Lagrange discrétisées pour la dynamique non-régulière:*

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \tau \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} \\
&\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{K}_{tang}^{-1}\mathbf{F}_{int\,k+1} = 0 \\
&\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} = \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} - \mathbf{F}_{int\,k+1}) + \mathbf{L}^T(\boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} - \boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}) \\
&+ \text{HSM conditions}
\end{aligned}}$$

avec:

$$\mathbf{g}_{N\,k+1} = -(\mathbf{L}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{X}_0.\mathbf{N})$$

$$\dot{\mathbf{g}}_{N_{free}} = -\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{free} \qquad \dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}} = -\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{P}_{free} = \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} - \mathbf{F}_{int\,k+1}) - \mathbf{L}^T\boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}$$

- *Résolution / Problème de type LCP ($\mathbf{M}$ et $\mathbf{H}$ sont diagonaux):*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll}
\mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} = \dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}} - \dot{\mathbf{g}}_{N_{free}} & \mathbf{H} = \mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}^T \\
\text{if } \; g^i_{N\,k+1} > 0 \;\text{ then }\; \Lambda^i_{k+\frac{3}{2}} = 0 & \\
\text{if } \; g^i_{N\,k+1} \leq 0 \;\text{ then }\; \left\{\begin{array}{rl} \dot{g}^i_{N_{k+\frac{3}{2}}} & \geq 0 \\ \Lambda^i_{k+\frac{3}{2}} & \geq 0 \\ \Lambda^T_{k+\frac{3}{2}}.\dot{g}^i_{N_{k+\frac{3}{2}}} & = 0 \end{array}\right. & i \in \{1, ...p\}
\end{array}\right.}$$

Opérateur de Steklov-Poincaré

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Résolution explicite du problème LCP (intégrateur variationnel explicite CD-Lagrange):*

---

1 - calculate $\mathbf{U}_{k+1}$ with $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \tau\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}$

2 - calculate $\mathbf{F}_{int\,k+1}$ with $\mathbf{F}_{int\,k+1}(\mathbf{U}_{k+1})$

3 - calculate $\dot{\mathbf{g}}_{N_{free}}$ and $\mathbf{P}_{free}$ with $\dot{\mathbf{g}}_{N_{free}} = -\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{free}$ and $\mathbf{P}_{free} = \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} + \tau(\mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} - \mathbf{F}_{int\,k+1}) - \mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}$

4 - calculate $\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}}$ with $\Lambda^i_{k+\frac{3}{2}} = \begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad g^i_{N\,k+1} > 0 \\ max(0, H^{-1}_{ii}\dot{g}^{\,i}_{N\,free}) \end{cases}$

5 - calculate $\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}$ with $\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} = \mathbf{P}_{free} + \mathbf{L}^T(\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}})$

6 - calculate $\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}}$ with $-\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}$ (only for post-processing energy balance)

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Forme multi-symplectique discrétisée en espace-temps pour l'élastodynamique non-régulière:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau}(\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \\ \frac{1}{\tau}(\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} - \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}) \\ d_t \mathbf{F}_{int} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k+1} \\ d_{\mathbf{x}} \mathbf{p} \\ \mathbf{F}_{int\,k+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^{s}_{ext\,k+1} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} \\ -\mathbf{K}^{-1}_{tang} \mathbf{F}_{int\,k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \mathbf{L}^T (\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} - \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ *L'intégrateur temporel variationnel explicite proposé préserve la forme discrétisée multi-symplectique de l'élastodynamique non-régulière. En conséquence, les équations de l'impulsion linéaire et angulaire sont vérifiées exactement, même en présence de multiplicateurs de Lagrange. Néanmoins, on peut montrer que le bilan énergétique discrétisé n'est pas assuré exactement. Cependant, on peut montrer que l'erreur correspondante décroit exponentiellement, ce qui caractérise la grande robustesse des intégrateurs temporels variationnels sur des temps longs. Pour assurer un bilan énergétique discrétisé exact, un pas de temps non uniforme doit être considéré.*

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Action multi-champs discrétisée en espace et en temps pour la dynamique non-régulière avec pas de temps adaptatif:*

$$\tau_{k+1} = t_{k+1} - t_k$$

- *Action multi-champs discrétisée en espace et en temps pour la dynamique non-régulière:*

$$\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h}(t) \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}(\tau_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}, \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\sim}{\mathcal{A}}^{h\tau}(\tau_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1}, \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}})) \\
&= \tfrac{1}{2}(\tau_k + \tau_{k+1})\mathbf{P}^T_{k+\frac{1}{2}}.\tfrac{(\mathbf{U}_{k+1}-\mathbf{U}_k)}{\tau_{k+1}} - \tfrac{1}{2}(\tau_k \mathbf{F}_{int\,k}^{T}.\mathbf{U}_k + \tau_{k+1}\mathbf{F}_{int\,k+1}^{T}.\mathbf{U}_{k+1}) \\
&-\tfrac{1}{2}(\tau_k \mathcal{L}^{h\tau^*}(\mathbf{U}_k, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k}) + \tau_{k+1}\mathcal{L}^{h\tau^*}(\mathbf{U}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+1})) \\
&+\tfrac{1}{2}(\tau_k + \tau_{k+1})\mathbf{\Lambda}^T_{k+\frac{1}{2}}.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{1}{2}}} \\
&+ \text{HSM conditions}
\end{aligned}$$

avec: $\mathcal{L}^{h\tau^*}(\mathbf{U}_k, \mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k}) = T^{h\tau^*}(\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}) - \Psi^{h\tau^*}(\mathbf{F}_{int\,k}) - \mathbf{F}^T_{ext\,k}.\mathbf{U}_k$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Vecteur d'état et Equations d'Euler-Lagrange correspondantes:*

$$(\tau_{k+2}, \dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}} \mathbf{U}_{k+2}, \mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}, \mathbf{F}_{int\,k+2}, \mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}})$$

$$\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \tau_{k+1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{K}_{tang}^{-1}\mathbf{F}_{int\,k+1} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\tau_{k+1}+\tau_{k+2}}{\tau_{k+2}}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{\tau_{k+1}}\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} + \tau_{k+1}(\mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} - \mathbf{F}_{int\,k+1})$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\tau_{k+1}+\tau_{k+2}}{\tau_{k+2}}\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{\tau_{k+1}}\mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}$$

$$+ \text{ HSM conditions}$$

$$\tau_{k+2} = (\frac{1}{2}\mathbf{P}^T_{k+\frac{3}{2}}.(\mathbf{U}_{k+2} - \mathbf{U}_{k+1}))$$

$$.(-\frac{1}{2}\frac{-\tau_k}{\tau^2_{k+1}}\mathbf{P}^T_{k+\frac{1}{2}}.(\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) + \mathbf{F}_{int\,k+1}^{\;\;T}.\mathbf{U}_{k+1}$$

$$+\frac{1}{2}(T^{h\tau^*}(\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}) + T^{h\tau^*}(\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}})) - \Psi^{h\tau^*}(\mathbf{F}_{int\,k+1})$$

$$-\mathbf{F}^T_{ext\,k+1}.\mathbf{U}_{k+1} + \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda}^T_{k+\frac{3}{2}}.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}} + \mathbf{\Lambda}^T_{k+\frac{1}{2}}.\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{1}{2}}}))^{-1}$$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Intégrateur variationnel explicite CD-Lagrange avec pas de temps adaptatif:*

---

0 - time step predictor $\tau_{k+2} = \tau_{k+1}$

1 - calculate $\dot{\mathbf{g}}_{N_{free}}$ and $\mathbf{P}_{free}$ with $\dot{\mathbf{g}}_{N_{free}} = -\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{free}$ and $\frac{1}{2}\frac{\tau_{k+1}+\tau_{k+2}}{\tau_{k+2}}\mathbf{P}_{free} = \frac{1}{2}\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{\tau_{k+1}}\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} + \tau_{k+1}(\mathbf{F}_{ext\,k+1} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+1} - \mathbf{F}_{int\,k+1}) - \frac{1}{2}\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{\tau_{k+1}}\mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}}$

2 - calculate $\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}}$ with $\Lambda^i_{k+\frac{3}{2}} = \begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad g^i_{N\,k+1} > 0 \\ max(0, H^{-1}_{ii}\dot{g}_{N\,free}^{\,i}) \end{cases}$

3 - calculate $\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}$ with $\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} = \mathbf{P}_{free} + \mathbf{L}^T(\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}})$

4 - calculate $\dot{\mathbf{g}}_{N_{k+\frac{3}{2}}}$ with $-\mathbf{L}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}$ (for time step update)

5 - calculate $\mathbf{U}_{k+2}$ with $\mathbf{U}_{k+2} = \mathbf{U}_{k+1} + \tau_{k+2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}}$

6 - calculate $\mathbf{F}_{int\,k+2}$ with $\mathbf{F}_{int\,k+2}(\mathbf{U}_{k+2})$

7 - update time step τ_{k+2} with equation (116) and go to step 1 if $\tau_{k+2} \neq \tau_{k+1}$

Formulation variationnelle discrétisée en espace et en temps pour l'élastodynamique non-régulière

- *Forme multi-symplectique discrétisée en espace-temps pour l'élastodynamique non-régulière avec pas de temps adaptatif:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{k+2}}(\mathbf{U}_{k+2}-\mathbf{U}_{k+1}) \\ \frac{1}{2}\frac{\tau_{k+1}+\tau_{k+2}}{\tau_{k+2}}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{\tau_{k+1}}\mathbf{P}_{k+\frac{1}{2}} \\ d_t\mathbf{F}_{int} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k+2} \\ d_{\mathbf{x}}\mathbf{p} \\ \mathbf{F}_{int\,k+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext\,k+2} + \mathbf{F}^s_{ext\,k+2} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{k+\frac{3}{2}} \\ -\mathbf{K}^{-1}_{tang}\mathbf{F}_{int\,k+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\tau_{k+1}+\tau_{k+2}}{\tau_{k+2}}\mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{\tau_k+\tau_{k+1}}{\tau_{k+1}}\mathbf{L}^T\mathbf{\Lambda}_{k+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'intégrateur temporel variationnel explicite proposé vérifie les propriétés suivantes:

- *Intégrateur explicite de type « time stepping »*
- *Convergence spatio-temporelle en non-régulier au sens de Hausdorff*
- *forme discrétisée multi-symplectique (conservation de la résultante et du moment)*
- *conservation de l'énergie discrète*
- *Pas de temps adaptatif automatique (avec vérification de la condition CFL)*
- *Matrix free (LCP explicite) pour les contacts de type déformable / rigide*
- *Grande robustesse sur les temps longs avec un très grand nombre d'impacts*

Merci pour votre attention