

Modélisation géométriques de défauts matériels

Guy Casale, Loïc Le Marrec, Van Hoi Nguyen, Mewen Crespo

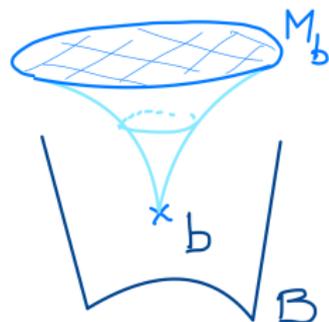
(guy.casale@univ-rennes1.fr / loic.lemarrec@univ-rennes1.fr)



Rencontre GdR-GDM, Saclay
24 novembre 2022

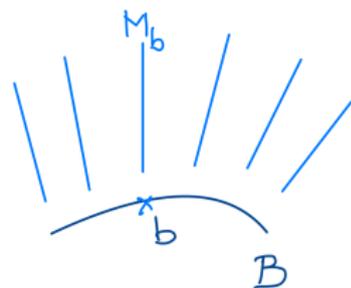
Un matériau composé de micro-éléments

- B identifie les micro-particules à des points matériels macroscopiques.
- Pour $b \in B$, M_b est l'espace dans lequel on place la micro-particule en b



Premières hypothèses

- $B \subset \mathbb{E}^3$ est un ouvert.
- $\coprod_{b \in B} M_b = M \xrightarrow{\pi} B$ est un espace fibré
- les fibres M_b sont de dimension 3.



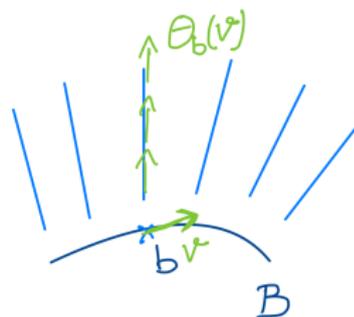
La forme de soudure

La micro-particule M_b est en tout point tangent à B en b :

Une soudure est un isomorphisme en chaque $b \in B$,

$$\theta_b : T_b B \times M_b \rightarrow TM_b$$

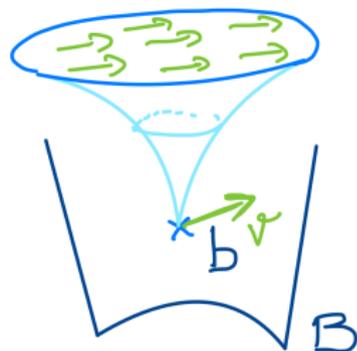
ou encore $\theta : TB \times_B M \rightarrow VM := \ker d\pi$.



Hypothèse plus forte

Le fibré M est un fibré affine de direction TB :

θ_b identifie $T_b B$ aux translations dans M_b



Soudure en coordonnées

$$(x^1, x^2, x^3) = b \in B \text{ et } (x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3) = m \in M$$

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}_{TB}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial y^3}}_{VM}}^{TM}$$

Une soudure s'écrit

$$\theta \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \theta_a^j(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

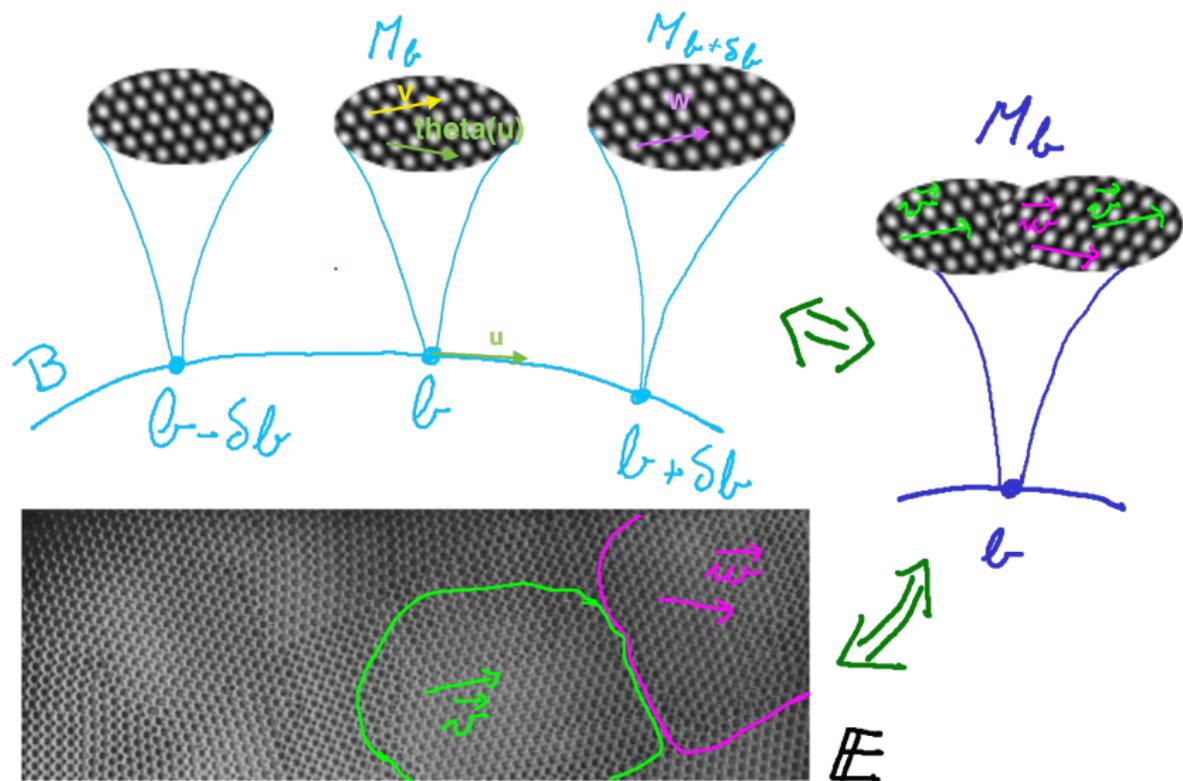
Dans le cas d'un fibré affine

$$\theta \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \theta_a^j(x) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Dans le cas $M = TB$, x^1, x^2, x^3 et y^1, y^2, y^3 telles que $TB \ni v = y^a \frac{\partial}{\partial x^a}$:

$$\theta(v) = y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{ou encore} \quad \theta_a^j = \delta_a^j$$

Illustration : fibré et soudure



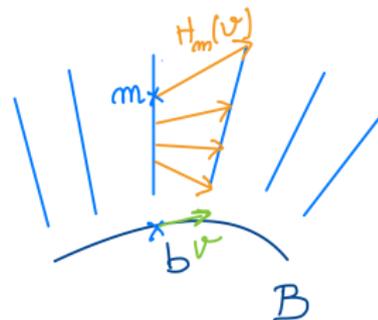
Connexion

Des micro-particules infinitésimalement proches M_b et $M_{b+\delta b}$ sont comparables.

Un connexion est une application

$$H : M \times_B TB \rightarrow TM$$
$$(m, v) \mapsto (m, H_m(v))$$

linéaire en v telle que $d\pi \circ H_m(v) = v$.



Les vecteurs de $H(TB)$ sont dit horizontaux

En coordonnées :

$$H_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \frac{\partial}{\partial x^a} + H_a^j(x,y) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

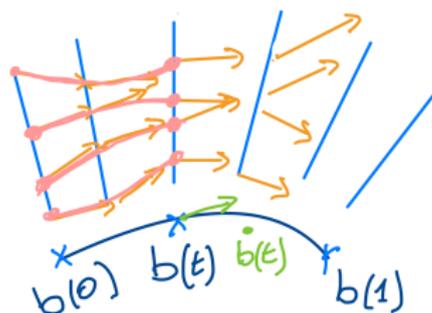
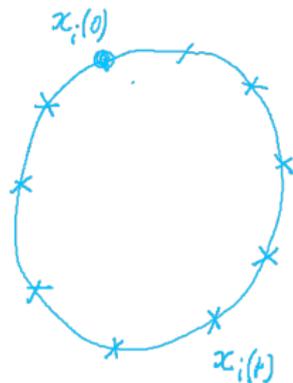
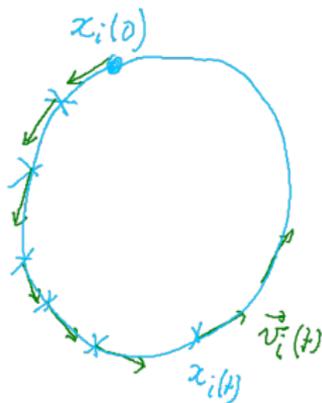


Illustration : integration et champ de vecteurs

$$\{x_i(t)\}$$



$$\{x_i(0), v_i(t) \in T_{x_i(t)} B\}$$



$$\{x_i(0), v_i(t) \in T_{x_i(t)} B\}$$

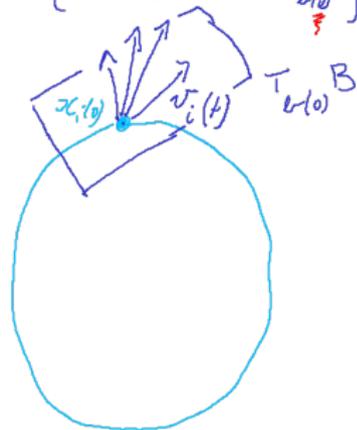
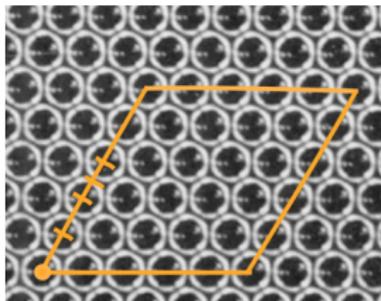
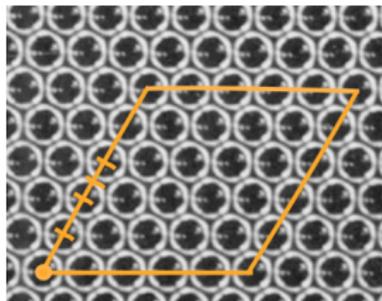


Illustration : integration et champ de vecteurs

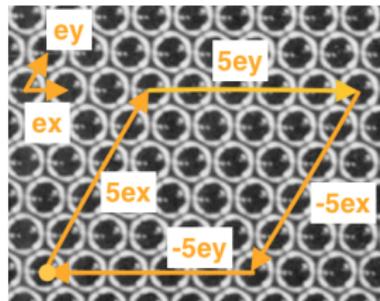


sur E

Illustration : integration et champ de vecteurs

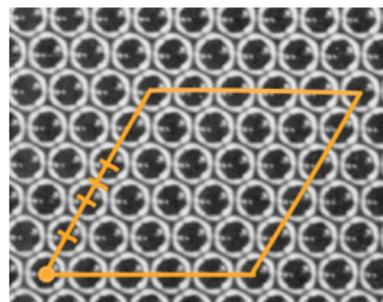


sur E

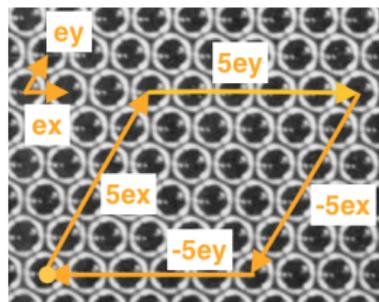


globalement sur TE

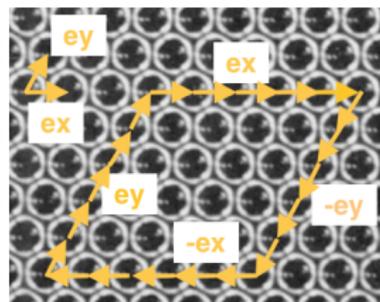
Illustration : integration et champ de vecteurs



sur E



globalement sur TE



intégration sur TE

Remarques

- Le résultat est le même dans tous les cas.
- L'intégration
 - Nécessite un **point** de départ $x_i(0)$
 - Les autres **points** $x_i(t)$ du lacet sur B ne sont pas prédéfinis

Illustration : integration et champ de vecteurs

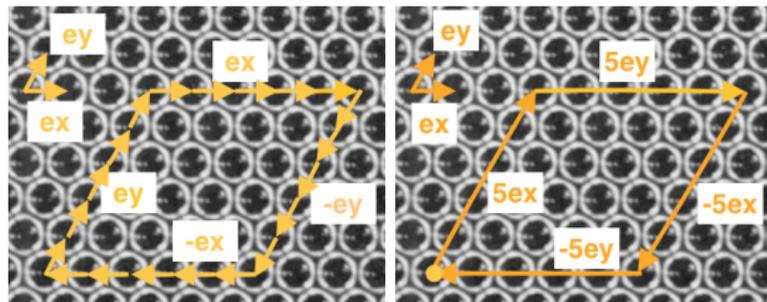


Illustration : integration et champ de vecteurs

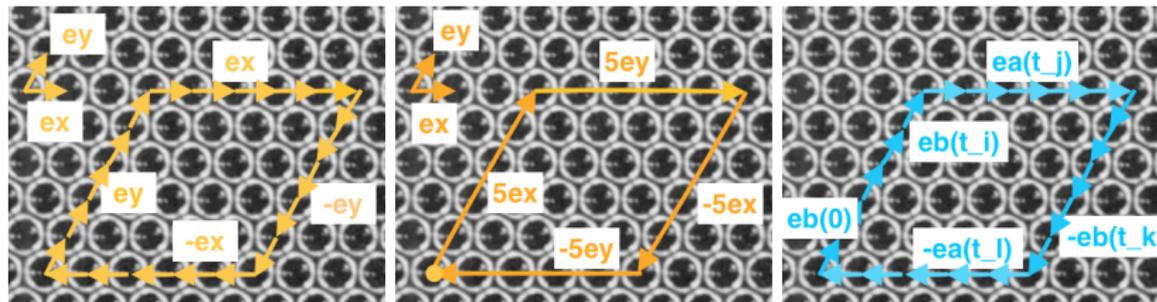


Illustration : integration et champ de vecteurs

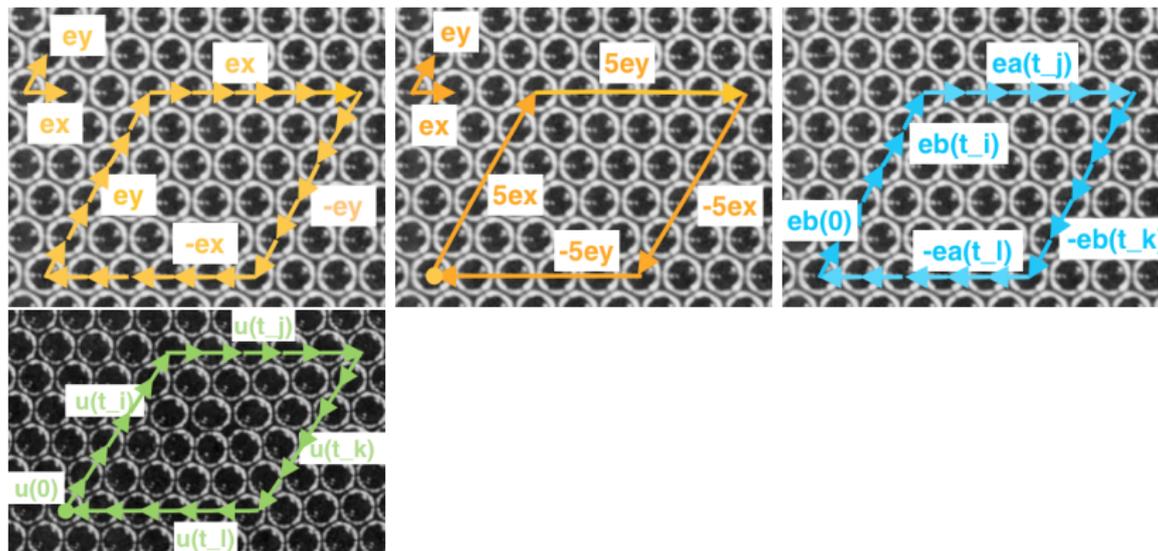


Illustration : integration et champ de vecteurs

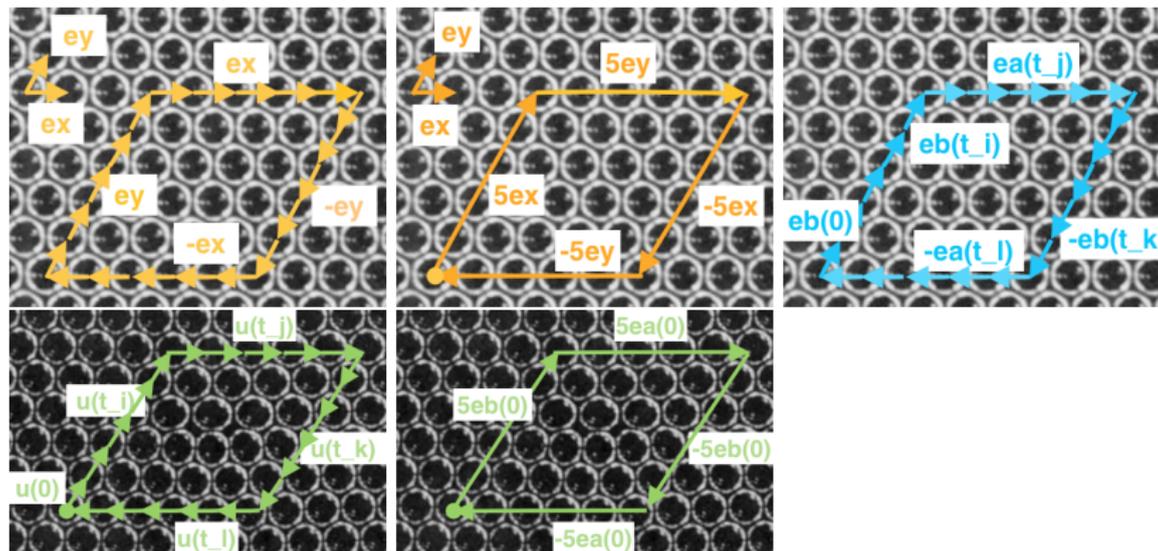
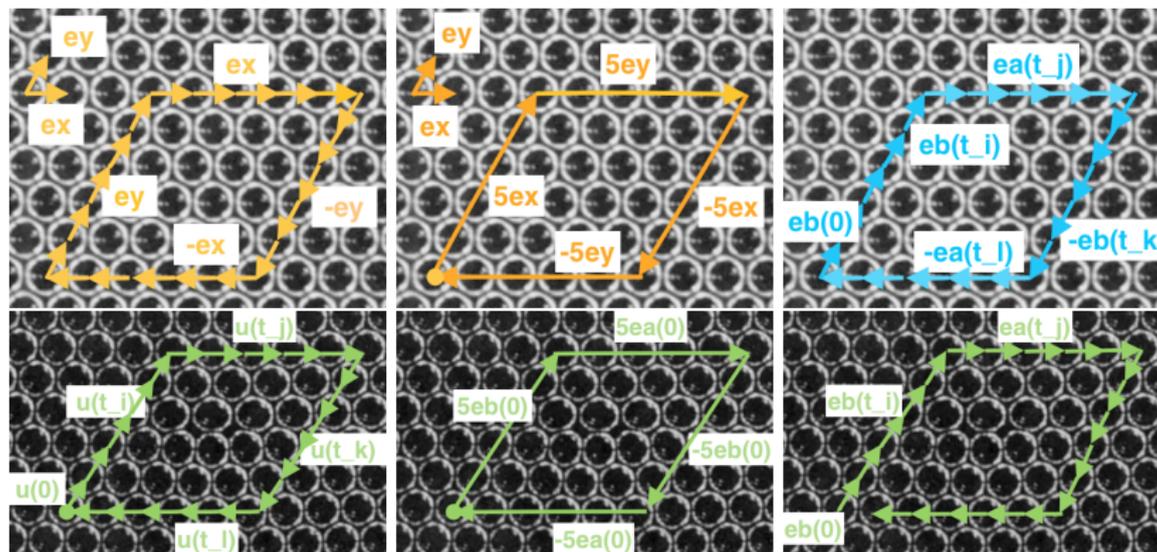


Illustration : integration et champ de vecteurs



Connexion affine

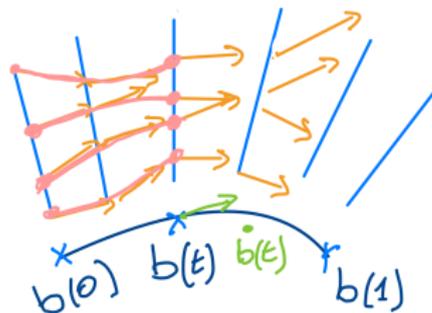
Une connexion H est affine si elle preserve les champs de translations :
elle identifie les translations sur M_b avec celles sur $M_{b+\delta b}$

En coordonnées :

$$H_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(p_{a,k}^j(x) y^k + q_a^j(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Si $b(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ est un chemin, on identifie $M_{b(0)}$ à $M_{b(t)}$ via

$$f_{\gamma(t)} : y(0) \mapsto y(t) = P(t)(y(0) + Q(t))$$



Les applications

$$f_{\gamma(t)} : y(0) \mapsto y(t) = P(t) (y(0) + Q(t))$$

sont obtenues en résolvant le système d'EDO:

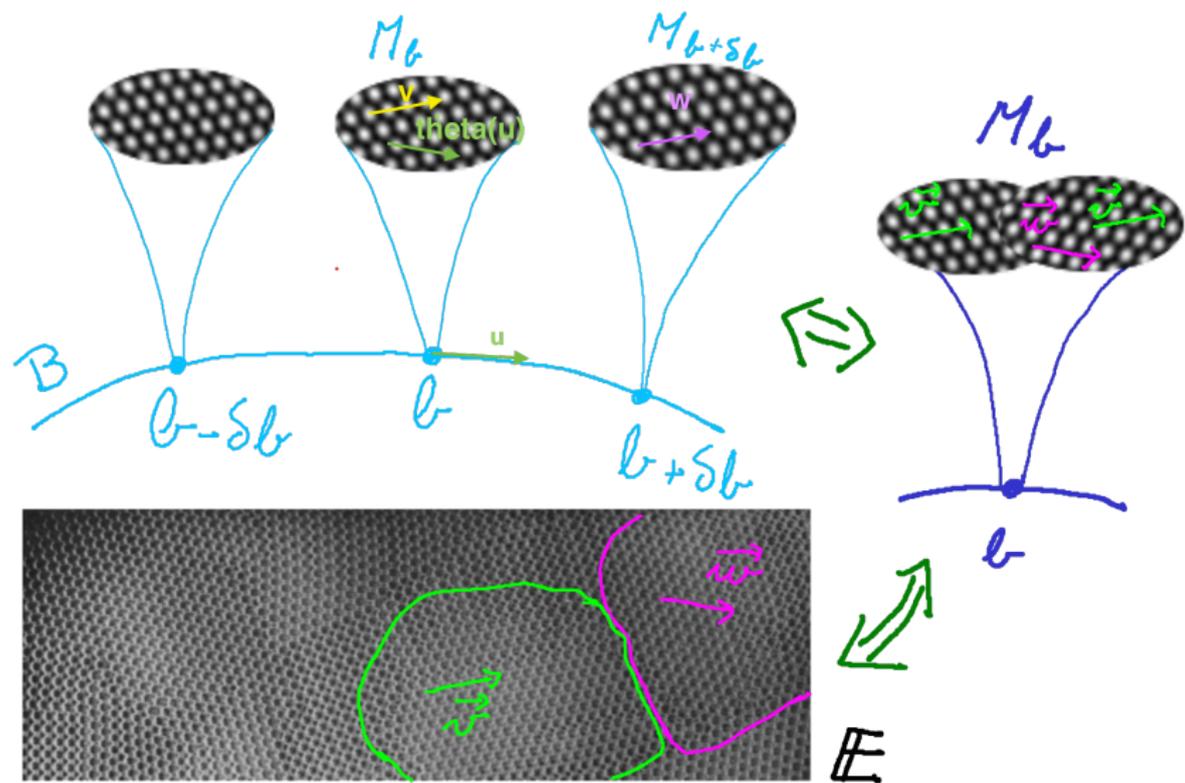
$$\dot{y}^j(t) = \left(p_{a,k}^j(x(t)) y^k(0) + q_a^j(x(t)) \right) \dot{x}^a(t)$$

qui se réécrit comme un système d'edp

$$dPP^{-1} = p := \left(p_{a,k}^j dx^a \right) \quad \text{et} \quad PdQ = q := \left(q_a^j dx^a \right)$$

que l'on résout le long du chemin $b(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$.

Illustration : connexion



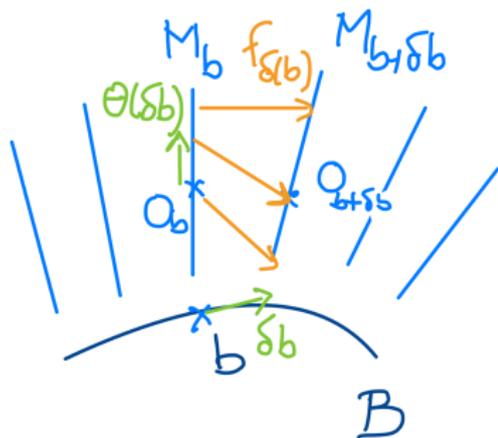
Connexion affine "soudée"

Dans le cas où M_b contient un point privilégié O_b , on impose

$$f_{\delta b}^{-1}(O_{b+\delta b}) = O_b + \theta_b(\delta b)$$

En coordonnée, (x, y) telles que $O_b = (x, 0, 0, 0)$ ceci s'écrit $q = -\theta$:

$$H_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(p_{a,k}^j(x) y^k - \theta_a^j(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^j}$$



Courbure

Pour résoudre les edp

$$dPP^{-1} = p \quad \text{et} \quad PdQ = q$$

les conditions de compatibilité sont

$$\begin{aligned} d(dPP^{-1}) &= dp & \text{et} & & d(PdQ) &= dq \\ dP \wedge (-P^{-1}dPP^{-1}) &= & & & dP \wedge dQ &= \\ -p \wedge p &= & & & p \wedge q &= \end{aligned}$$

ou encore

$$dp_i^j + p_i^k \wedge p_k^j = 0 \quad \text{et} \quad dq^j - p_i^j \wedge q^i = 0$$

La courbure est la matrice carré de format 1+3 :

$$\mathfrak{R}[H] := \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline dq - p \wedge q & dp + p \wedge p & & \end{array} \right]$$

ou encore une 2-forme sur B à valeurs dans les champs de vecteurs verticaux affines sur M

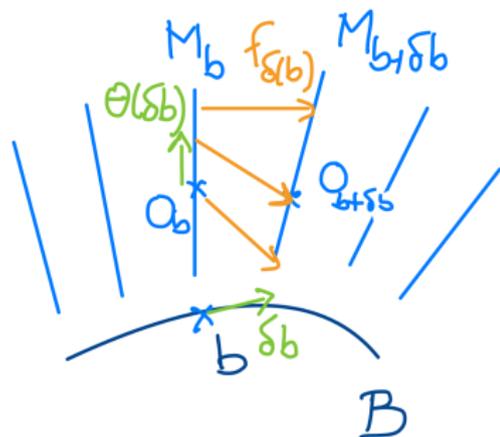
$$\left((dp + p \wedge p)_i^j y^i + (dq - p \wedge q)^j \right) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Torsion et courbure linéaire

Dans le cas où M_b contient un point privilégié O_b , on impose

$$f_{\delta b}^{-1}(O_{b+\delta b}) = O_b + \theta_b(\delta b)$$

En coordonnée, (x, y) telles que $O_b = (x, 0, 0, 0)$ ceci s'écrit $q = -\theta$:



$$H_{(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(p_{a,k}^j(x) y^k - \theta_a^j(x) \right) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$\mathfrak{R}[H] := \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline p \wedge \theta - d\theta & dp + p \wedge p & & \end{array} \right]$$

Torsion Courbure

Illustration : courbure et torsion

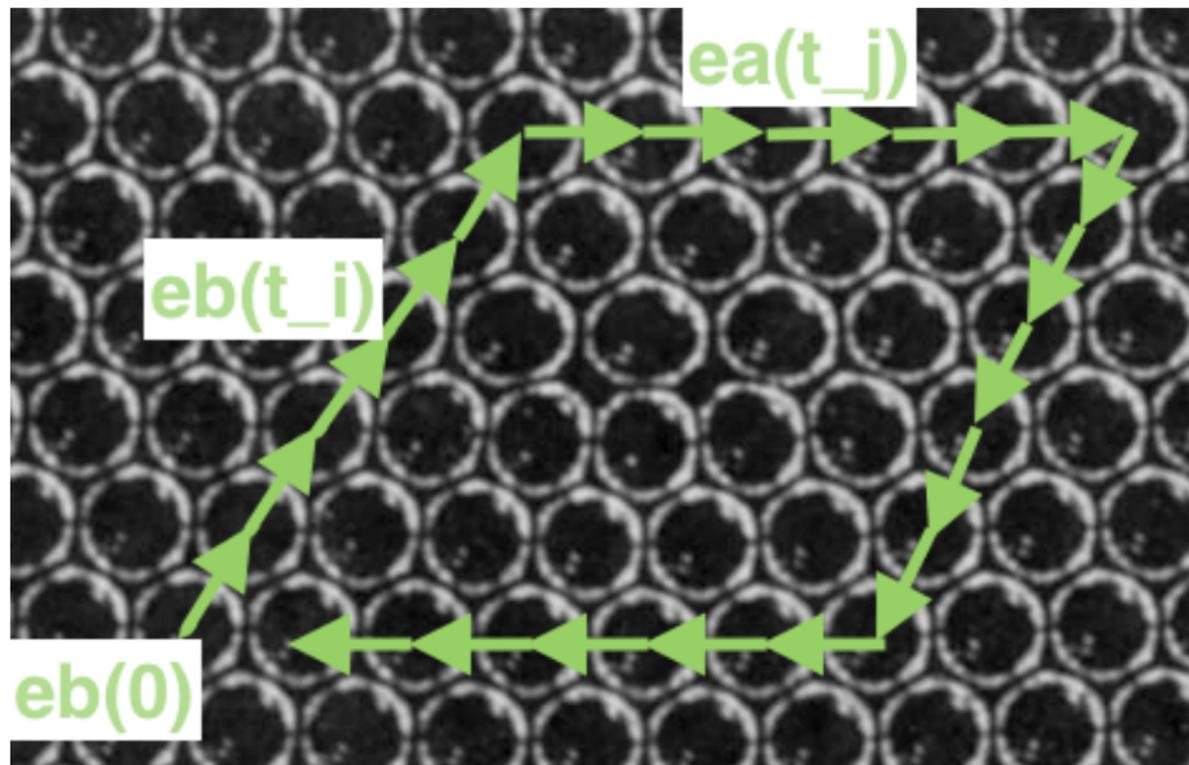
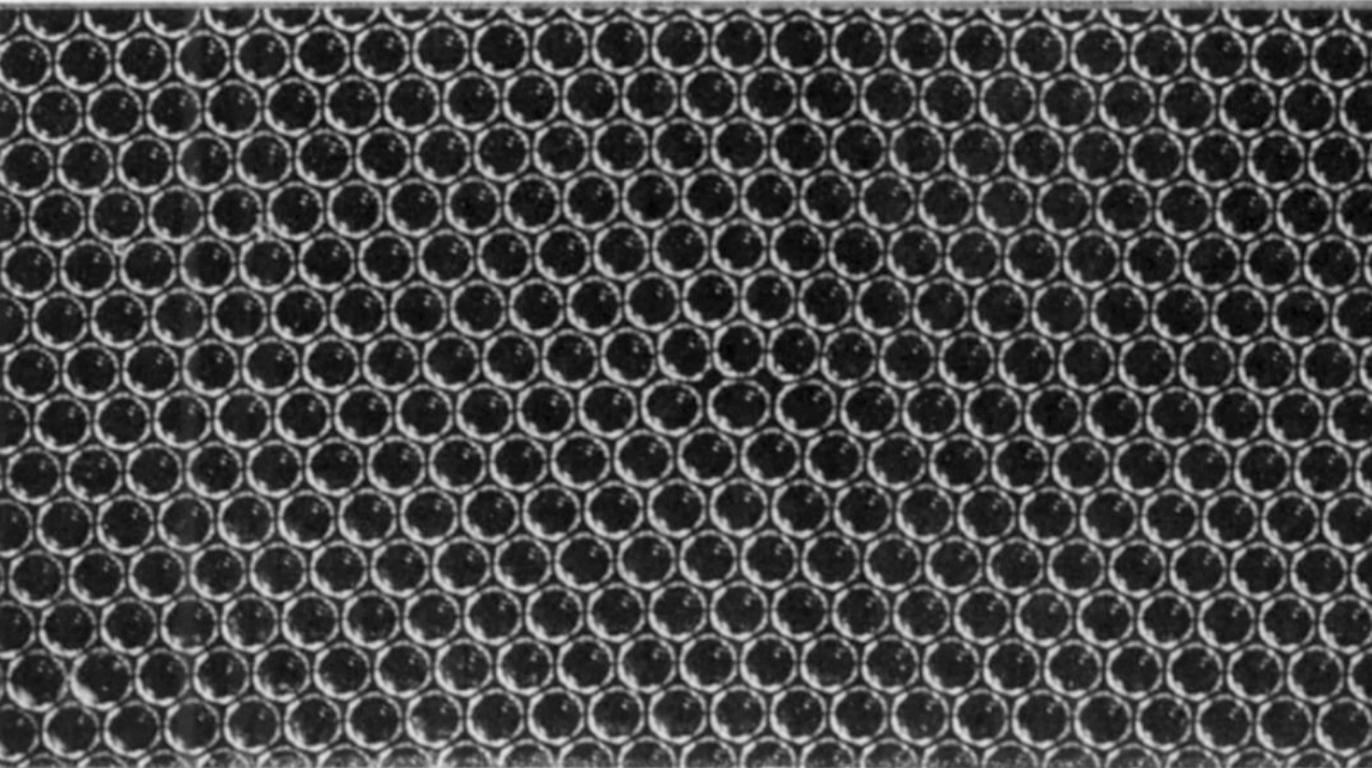


Illustration : vision globale



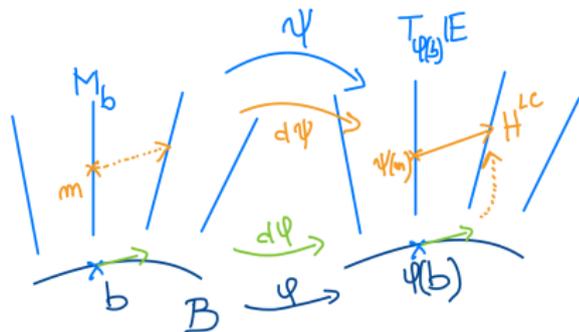
Transformations d'un matériau

Une transformation consiste en

- 1 donner un emplacement pour la micro-particule b dans \mathbb{E} ,
- 2 placer la micro-particule M_b dans $T_b\mathbb{E}$ par une transformation affine :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & T\mathbb{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{E} \end{array}$$

Le pull-back de la connexion de Levi-Civita de \mathbb{E}



$$H_m(v) = d\psi^{-1} \left(H^{LC}(\psi(m), d\varphi(v)) \right) - \theta$$

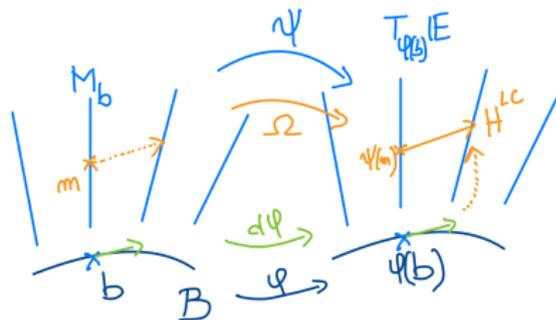
a une courbure nulle :

$$\mathfrak{R}[H] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0_{1 \times 3} \\ * & 0_{3 \times 3} \end{array} \right]$$

Transformations d'un matériau

Les vecteurs tangents à M non verticaux sont à cheval sur deux échelles.
On s'autorise d'autre règles de transformations :

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{\Omega} & T(TE) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\psi} & TE \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{E}
 \end{array}$$



avec
$$\Omega_m = \left[\begin{array}{c|c} \vec{\psi} & \Theta_{3 \times 3} \\ \hline 0_{3 \times 3} & d\varphi \end{array} \right] \quad \text{à la place de} \quad (d\psi)_m = \left[\begin{array}{c|c} \vec{\psi} & \partial_b(\psi) \\ \hline 0_{3 \times 3} & d\varphi \end{array} \right]$$

La connexion
$$H_m(v) = \Omega^{-1} \left(H^{LC}(\psi(m), d\phi(v)) \right) - \theta$$
 mesure les placements relatifs des M_b dans \mathbb{E} .

La courbure de la connexion

$$H_m(v) = \Omega^{-1} \left(H^{LC}(\psi(m), d\phi(v)) \right) - \theta$$

mesure la densité de défauts de placements de M dans \mathbb{E} :

$$\mathfrak{R}[H] := \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0_{1 \times 3} \\ \hline Torsion_{3 \times 1} & Courbure_{3 \times 3} \end{array} \right]$$

Dislocation Disclination

ou encore

$$\mathfrak{R}[H] := \left((Courbure) {}^j_i y^i + (torsion) {}^j \right) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Transformations d'un matériau de V.H. NGuyen

- Les microparticules ont un point privilégié $O_b \in M_b : M \cong TB$.
- M est muni d'une soudure θ et d'une connexion linéaire H^0 ,
- Toutes les connexions et applications considérées sont linéaires sur les microparticules

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{\Omega} & T(T\mathbb{E}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\psi} & T\mathbb{E} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{E}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} & \rightarrow & \left[\begin{array}{c|c} \Psi(x) & \Theta \\ \hline 0 & d\varphi \end{array} \right] \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \\
 y & \rightarrow & \Psi(x)y \\
 x & \rightarrow & \varphi(x)
 \end{array}$$

•

$$\Theta = \left((1 - \zeta) \frac{\partial}{\partial x^a} (d\varphi_k^j) + \zeta \frac{\partial}{\partial x^a} (\Psi_k^j) \right) y^k$$

ζ est un paramètre de rapport d'échelle

- pour $\zeta = 1$ on a une transformation gradient. \Rightarrow Courbure = $0_{3 \times 3}$
- pour $\Psi = d\varphi$ on a une transformation purement macroscopique. \Rightarrow Torsion = $0_{3 \times 1}$ Courbure = $0_{3 \times 3}$

Conclusion

- Description géométrique de certains type de matériaux... mais qui fournissent trop de degré de liberté !
- Pas de métriques présentées, mais abordées dans les travaux de Van Hoi Nguyen
- Notion d'énergie, loi de comportements à faire (Mewen Crespo)
- Etendre aux structures de type "poutres" :
 $\dim(B) = 1$, mais $\dim(M_b) = 3$
- On peut déformer les connexion de manière abstraite, mais il faut être en mesure de le relier à des transformations matérielles.