GDR Géométrie et Mécanique
Formulation Intrinsèque de la mécanique incrémentale

Jean Lerbet (collaboration N. Challamel, F. Nicot, F. Darve)

24 novembre 2022

Plan de l'exposé

Origine

1. entre 2004 et 2018, étude de question de stabilité des systèmes "non hamiltoniens" à matrice de rigidité non symétrique (type force suiveuse)
2. propriétés "paradoxales" $\Longrightarrow$ Stabilité Structurelle Cinématique
3. Résultat : lien entre le critère de Hill ($K_s(p)$ définie positive) et le critère usuel ($K(p)$ inversible)
4. Problème dual du degré géométrique de non conservativité $d = \frac{1}{2}rg(K_a(p))$

Cadre conceptuel de ces travaux

1. position d'équilibre unique q_e durant l'évolution : le chargement p "augmente" au cours du "temps" et seulement $K = K(p)$
2. statique (le temps physique ne joue aucun rôle et un paramètre σ (on peut prendre l'intensité du chargement) gouverne l'évolution
3. linéaire
4. usuellement : cadre élastique : $K(\sigma) = K_e - \sigma K_g$ avec K_e symétrique définie positive et K_g quelconque
5. usuellement : cadre discret

Objectifs initiaux

1. Trouver un cadre géométrique intrinsèque pour les résultats obtenus
2. Clarifier le sens géométrique des objets mécaniques de base impliqués dans cette formulation : matrice linéaire tangente, chemin de chargement, évolution incrémentale, Stabilité Structurelle Cinématique (SSC), . . .
3. Formuler dans ce cadre intrinsèque l'évolution du système : par exemple, extension au cadre non linéaire, à des lois non élastiques

Démarche initiale

1. utiliser le langage de la géométrie différentielle sur la variété des configurations $\mathbb{M}$:

$$\text{cadre discret} \Longleftrightarrow \mathbb{M} \text{ de dimension finie}$$

2. utiliser le langage des fibrés vectoriels essentiellement sur le fibré cotangent $T^*\mathbb{M}$
3. traduction de l'objectif principal : passer des fibrés vectoriels au dessus d'un point aux fibrés vectoriels généraux au dessus d'une variété (de dimension finie)
4. Par exemple concernant la SSC :

$$\text{propriétés quelque soit la famille de contraintes cinématiques } \mathcal{C} \text{ dans } \mathbb{R}^n$$
$$\Longleftrightarrow \text{propriétés "pour toutes les sous variétés } \mathbb{V} \text{ de } \mathbb{M}\text{"}$$

2 exemples paradigmatiques : la colonne de Ziegler et le système à 4 grains

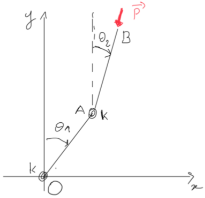
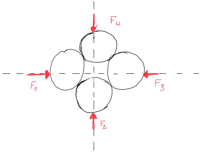


Figure: Système de Ziegler à 2 ddl



Objets de base : aspects cinématiques

- espace des configurations $\mathbb{M}$ du système Σ : variété de dimension finie n, si besoin $q = (q_1, \ldots, q_n)$ système de coordonnés locales
- $m \in \mathbb{M}$ est un placement : $m : P \in \Sigma \mapsto m(P) \in \mathcal{E}$
- action naturelle d'un sous groupe de Lie $\mathbb{G}$ du groupe des déplacements $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{M}$:
$$D.m(P) = D(m(P)) \ \ \forall P \in \Sigma$$
- action libre et propre : $\mathbb{M}$ a une structure naturelle d'espace fibré principal $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \varpi)$ (dim $\mathbb{B} = r$, dim $\mathbb{G} = n - r \leq 6$)
- $\mathbb{B}$ représente les formes ϵ de Σ et si $m \in \mathbb{M}$ alors $\sigma_m : D \in \mathbb{G} \mapsto \sigma_m(D) = D.m \in \mathbb{M}$ plongement dont l'image est la fibre $\pi^{-1}\{m\}$ difféomorphe à $\mathbb{G}$
- si $m \in \mathbb{M}$ alors $T_m\mathbb{M}$ espace tangent à $\mathbb{M}$ en m : $\delta m \in T_m\mathbb{M}$ champs de déplacements infinitésimaux en $m \in \mathbb{M}$
- si $m \in \mathbb{M}, \delta m \in T_m\mathbb{M}$ et si $\varpi^T(\delta m) = 0$ on dit que δm est vertical en m et $\delta m \in T_m\varpi^{-1}\{m\} = Ver(m)$: δm déplacement rigide infinitésimal de Σ dans la configuration m

Objets de base : aspects cinématiques

- si δm est vertical en $m \in \mathbb{M}$ alors il existe $u \in \mathfrak{g}$ tel que $\delta m = \sigma_m^T(u)$
- si $m \in \mathbb{M}$ alors $T_{\varpi(m)}\mathbb{B}$ espace tangent à $\mathbb{B}$ en $\epsilon\varpi(m)$ contient les champs de taux de déformations pures ou déformations pures infinitésimales de la forme $\epsilon = \varpi(m)$ de Σ dans la configuration m
- si $m \in \mathbb{M}$ alors on ne peut pas définir dans $T_m\mathbb{M}$ un sev des champs de déformations infinitésimales car il n'y a pas de connexion naturelle sur $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \varpi)$ qui permettrait de définir les champs de déformations infinitésimales comme des vecteurs horizontaux supplémentaires de $Ver(m)$ dans $T_m\mathbb{M}$.
- dit autrement on ne peut pas relever naturellement les vecteurs de $T_{\varpi(m)}\mathbb{B}$ (taux de déformations pures) en des vecteurs de $T_m\mathbb{M}$. (taux de déformations). On doit faire avec ! !

Objets de base : système de forces comme sections d'un fibré

- (ponctuel) un système de forces $\mathcal{F}$ sur Σ dans la configuration $m \in \mathbb{M}$ est la donnée d'un élément $\mathbf{f} \in T^*_m\mathbb{M}$. On dira que $\mathbf{f} \in T^*\mathbb{M}$ et $\pi_{T^*\mathbb{M}}(\mathbf{f}) = m$
- (local) un système de forces données $\mathcal{F}_d$ sur Σ est la donnée d'une section F_d de $T^*\mathbb{M}$: $F_d \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{M})$. On rappelle que $F_d : \mathbb{M} \to T^*\mathbb{M}$ telle que $\pi_{T^*\mathbb{M}} \circ F_d = \mathrm{id}_{\mathbb{M}}$: $F_d(m) \in T^*_m\mathbb{M}$ est le système de forces données dans la configuration m
- (ponctuel) un système de forces de liaisons $\mathcal{F}_\ell$ sur Σ dans la configuration $m \in \mathbb{M}$ est la donnée d'un élément $\mathbf{f}_\ell$ de $T^*_m\mathbb{M}$ tel que $\mathbf{f}_\ell(\delta m) = 0\ \forall \delta m \in Ver(m)$ déplacement rigide infinitésimal dans la configuration m. On posera $\mathbf{f}_{def} = -\mathbf{f}_\ell$ et on dira que $\mathbf{f}_{def}$ représente les efforts de déformations du système dans la config $m \in \mathbb{M}$.
  On peut de manière équivalente se donner un vecteur cotangent $\mathbf{f}_\epsilon \in T^*_{\varpi(m)}\mathbb{B}$ et poser $\mathbf{f}_{def}(\delta m) = \mathbf{f}_\epsilon(\varpi^T(\delta m))$ pour tout $\delta m \in T_m\mathbb{M}$ et par construction $\mathbf{f}_{def}$ décrira un système de forces de déformations en m. On écrit alors :
  $$\mathbf{f}_{def} = \varpi^*(\mathbf{f}_\epsilon)$$
  On peut dire que $\mathbf{f}_\epsilon$ représente les efforts de déformations pures des formes du système (! !).

Objets de base : lois de comportement élastique

On peut maintenant se poser la question du passage du ponctuel au local pour les efforts de déformation. La réponse positive c'est l'élasticité.

Définition Lois de comportement élastique

- Une loi élastique est la donnée d'une section quelconque $F_{el} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{B})$ de $T^*\mathbb{B}$. Cette forme différentielle est non nécessairement fermée $\mathbf{d}F_{el} \neq 0$.
- Une loi élastique est hyperélastique s'il existe une fonction W_{el} sur $\mathbb{B}$ telle que $F_{el} = dW_{el} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{B})$ (c'est nécessairement une section de $T^*\mathbb{B}$! !)
- Le système est élastique si les efforts de déformations sont décrits par la section $F_{def} = \varpi^*(F_{el})$ (ou si $F_\epsilon = F_{el}$ en tant que sections de $T^*\mathbb{B}$).

On en déduit une section $F_\ell = -F_{def}$ de $T^*\mathbb{M}$ des efforts de liaisons du système.

Objets de base : Equilibre (ponctuel et local), aspects analytiques et géométriques

Définition Equilibre

Soit Σ d'espace de configuration $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \varpi)$.

1. (ponctuel) soit $m \in \mathbb{M}, b = \varpi(m)$, soit $\mathbf{f}_d \in T_m\mathbb{M}$ un système de forces données en m, $\mathbf{f}_\epsilon \in T^*_\epsilon\mathbb{B}$ un système de forces de déformations des formes, $\mathbf{f}_{def} = \varpi^*(\mathbf{f}_\epsilon)$ et $\mathbf{f}_\ell = -\mathbf{f}_{def}$ les deux éléments de $T^*_m\mathbb{M}$ correspondants. m est une position d'équilibre de Σ si $\mathbf{f}_d + \mathbf{f}_\ell = 0_{T^*_m\mathbb{M}}$ ou si $\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_{def}$
2. (local) supposons les efforts donnés et de déformation décrits par des sections F_d de $T^*\mathbb{M}$ et F_ϵ de $T^*\mathbb{B}$ (ou alternativement $F_{def} = \varpi^*(F_\epsilon)$ section de $T^*\mathbb{M}$). Soit $F = F_d - F_{def} = F_d + F_\ell$ la section de tous les efforts s'exerçant sur et dans Σ. m est un point d'équilibre sous l'action de ces différentes forces si F intersecte la section nulle $0_{T^*\mathbb{M}}$ de $T^*\mathbb{M}$ en m c'est-à-dire

$$F(m) = 0 (= 0_{T^*_m\mathbb{M}})$$

Objets de base : T-stabilité d'un équilibre, aspects géométriques

Pour envisager la stabilité, les aspects ponctuels sont insuffisants. L'énoncé naturel dans le cadre des sections de $T^*\mathbb{M}$ est le suivant

Définition T-stabilité

Soit $\mathcal{F}$ un système de forces (données et de liaison) décrit comme précédemment par une section $F = F_d + F_\ell$ de $T^*\mathbb{M}$ et soit $m_e \in \mathbb{M}$ une configuration d'équilibre de Σ soumise à $\mathcal{F}$ (donc $F(m_e) = 0 = 0_{T^*\mathbb{M}}(m_e)$).
m_e est dit Transversalement stable ou T-stable si F intersecte ou coupe transversalement $0_{T^*\mathbb{M}}$ (en tant que section). On identifie donc la section F comme application avec son image $F(\mathbb{M})$ dans $T^*\mathbb{M}$. $F(\mathbb{M})$ est une sous-variété de $T^*\mathbb{M}$. On peut donc la voir soit comme la transversalité de de 2 sous-variétés soit comme la transversalité de F en m_e à $0_{T^*\mathbb{M}}$ (surjectivité de $dF(m_e)$)(On identifie par ailleurs souvent $0_{T^*\mathbb{M}}$ avec $\mathbb{M}$.)

Objets de base : T-stabilité, aspects analytiques, différentielle verticale

On voulait dériver des sections sans connexion. On se sert de la variété des équilibres, comme espace horizontal. Soit (E, B, p) un fibré vectoriel, $s \in \Gamma(E)$ une section de E, $x_e \in B$ avec $s(x_e) = (x_e, 0)$.
si $x \in B$, il y a une décomposition canonique

$$T_{(x,0)}E \simeq T_xB \oplus E_x$$

$\Longrightarrow$ en x_e, la différentielle ds de s s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} ds(x_e) : T_{x_e}B & \rightarrow & T_{(x_e,0)}E = T_{x_e}B \oplus E_{x_e} \\ u & \mapsto & u + ds^{ver}(x_e)(u) \end{array} \tag{1}$$

où $ds^{ver}(x_e)$est linéaire et appartient à $\mathcal{L}(T_{x_e}B, E_{x_e})$ (ne pas confondre d et $\mathbf{d}$)
la condition de transversalité de s en x_e avec la section nulle $\Longrightarrow$ $ds^{ver}(x_e)$ est surjective et

$$T_{(x_e,0)}E = T_{x_e}B + Im(ds^{ver}(x_e))$$

Objets de base : Equilibre et T-stabilité de l'équilibre, aspects analytiques : "matrice de rigidité "tangente, régularité et T-Stabilité.

On applique ce qui précède à $(E, B, p) = (T^*\mathbb{M}, \mathbb{M}, \pi_{T^*\mathbb{M}}), x_e = m_e, s = F$. On a alors $E_{x_e} = T^*_{m_e}\mathbb{M}$ et $T_{x_e}B = T_{m_e}\mathbb{M}$ qui ont la même dimension n.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un système de forces décrit par une section F de $T^*\mathbb{M}$ et soit $m_e \in \mathbb{M}$ une configuration d'équilibre de Σ soumis à $\mathcal{F}$ (donc $F(m_e) = 0 = 0_{T^*\mathbb{M}}(m_e)$). L'application linéaire $dF^{ver}(m_e) \in \mathcal{L}(T_{m_e}\mathbb{M}, T^*_{m_e}\mathbb{M})$ s'appelle l'opérateur de rigidité tangent ou le tenseur de rigidité tangent Σ en m_e. C'est un tenseur d'ordre 2 covariant sur $T_{m_e}\mathbb{M}$. La matrice $K(q_e)$ de $dF^{ver}(m_e)$ dans la base naturelle $(e_i = \frac{\partial}{\partial q^i}|_{m_e})_i$ de $T_{m_e}\mathbb{M}$ et la base duale $(dq^i(m_e))_i$ de $T^*_{m_e}\mathbb{M}$ est ce que les mécaniciens appellent la matrice de rigidité tangente avec q_e les coordonnées de m_e dans la carte locale q.

Proposition

m_e est T-stable sous l'action de $\mathcal{F}$ si et seulement si $dF^{ver}(m_e)$ est bijective c'est-à-dire si $\det K(q_e) \neq 0$.

Objets de base : chemin de chargement (CC)

Définition

Un chemin de chargement sur $\mathbb{M}$ est la donnée d'un champ à un paramètre de sections F_c (forces de contrôle ou de chargement) c'est- à-dire d'une application continue $\sigma \in [0, \sigma_l[\mapsto F_c(\sigma) \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{M})$ d'un intervalle $[0, \sigma_l[\subset (\mathbb{R}, \leq)$ dans $\mathfrak{X}^*(\mathbb{M})$, espace des sections de $T^*\mathbb{M}$. C'est donc un champ de sections de $T^*\mathbb{M}$ à un paramètre que l'on supposera différentiable en σ. On supposera également que $F_c(0) = 0_{\mathfrak{X}^*(\mathbb{M})}$.

Proposition

Soit F_c un CC sur $\mathbb{M}$ et $m \in \mathbb{M}$. Alors, $\frac{dF(\sigma)(m)}{d\sigma} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, T_{F(\sigma)(m)} T^*\mathbb{M})$ est en fait à valeurs dans l'espace vertical $V(F_c(m))$ en $F_c(m)$ sous espace de $T_{F_c(m)} T^*\mathbb{M}$. C'est le même espace pour tous les éléments $\mathbf{f} \in T^*_m\mathbb{M}$ ($V(F_c(m)) = V(\mathbf{f})$) et il est identifiable avec $T^*_m\mathbb{M}$ lui-même. Si l'on se donne une amplitude $\delta\sigma$ du paramètre, on notera souvent $\dot{\xi}_c(\sigma, m) = \frac{dF(\sigma)(m)}{d\sigma}\delta\sigma$ vecteur de $V(F_c(m)) \approx T^*_m\mathbb{M}$.

Evolution faiblement incrémentale, aspects géométriques

Définition Evolution faiblement incrémentale

Soit $\Sigma = ((\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \pi), F_d, F_{el})$ un système mécanique (faiblement hypo)élastique décrit par la section F_{el} de $T^*\mathbb{B}$ (ou $F_\ell = -F_{def} = -\varpi^*(F_{el})$ de $T^*\mathbb{M}$) et soumis à des actions données décrites par une section F_d (de $T^*\mathbb{M}$). On pose $F_0 = F_d + F_\ell$. Un chemin de chargement $F_c : \sigma \mapsto F_c(\sigma)$ sur $\mathbb{M}$ est dit régulier en σ si $F_t(\sigma) = F_c(\sigma) + F_0$ intersecte transversalement la section nulle $0_{T^*\mathbb{M}}$ de $\mathbb{M}$. Soit $m_e = m_e(0)$ un point d'équilibre régulier sous l'action du système de forces initial $F_t(0) = F_0$. La courbe $\sigma \mapsto m_e(\sigma)$ des points d'intersection (existence et unicité locale évidente) de $F_t(\sigma)$ et de $0_{T^*\mathbb{M}}$ est la courbe d'évolution faiblement incrémentale du chemin de chargement.

Evolution faiblement incrémentale, aspects analytiques

A chaque étape σ du chargement, on a

- un équilibre $m_e(\sigma)$ sous l'action de $F_t(\sigma) = F_c(\sigma) + F_0$: $F_t(\sigma)(m_e(\sigma)) = 0$
- l'équilibre est perturbé par une variation infinitésimale $\delta\sigma$ du paramètre de chargement
- $\Longrightarrow$ variation infinitésimale verticale des forces de contrôle $\dfrac{\partial F_t(\sigma)}{\partial \sigma}(m_e(\sigma)) = \dot{\xi}_c(\sigma, m_e(\sigma)) = \dot{\xi}_c(\sigma)$ du chargement : on ne fait pas varier le point $m_e(\sigma)$ sur $\mathbb{M}$
- On écrit que la variation verticale totale des sections est nulle : on "reste" incrémentalement sur la variété des équilibres $0_{T^*\mathbb{M}} \approx \mathbb{M}$

$$\dot{\xi}_c(\sigma) + dF_t(\sigma)^{ver}(m_e(\sigma))\delta m_e(\sigma) = 0$$

  qui a du sens car les vecteurs sont verticaux bien qu'ils ne soient pas a priori dans le même espace tangent (dans $T_{F_c(\sigma)(m_e(\sigma))} T^*\mathbb{M}$ et $T_{F_t(\sigma)(m_e(\sigma))} T^*\mathbb{M} = T_0 T^*\mathbb{M}$)
- On calcule la variation infinitésimale $\delta m_e(\sigma) \in T_{m_e(\sigma)}\mathbb{M}$ correspondante (importance de la T- stabilité) selon l'équation précédente
- On intègre pour décrire l'évolution des équilibres $m_e(\sigma) = \int_0^p \delta m_e(s) ds$

Evolution faiblement incrémentale, aspects analytiques, cas de la T-stabilité

- Dans le cadre de la T-stabilité, l'équation d'équilibre incrémental a une solution unique :

$$\delta m(\sigma) = -\left(dF_t(\sigma)^{ver}(m_e(\sigma))\right)^{-1}(\dot{\xi}_c(\sigma))$$

- la solution à chaque étape σ est donnée par

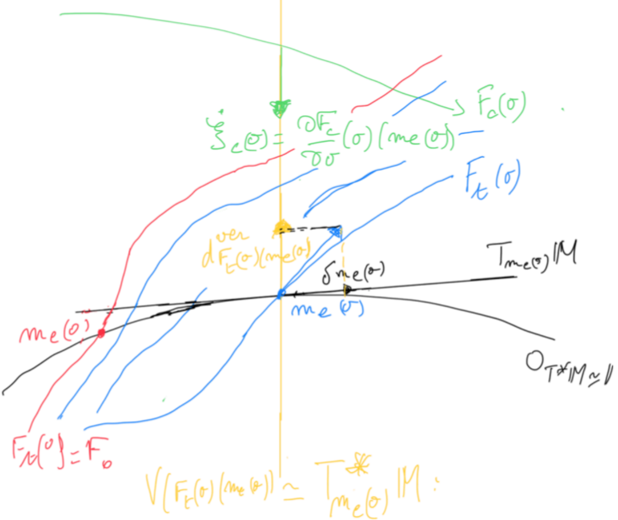
$$\sigma \to m_e(\sigma) = \int_0^\sigma -\left(dF_t(s)^{ver}(m_e(s))\right)^{-1}(\dot{\xi}_c(s))ds$$

- cas particulier $\dfrac{\partial F_c(\sigma)}{\partial \sigma}(m_e(0)) = \dot{\xi}_c(0) = 0$

$$\Downarrow$$

$$m_e(\sigma) = m_e(0) \text{ tant que la T-stabilité est assurée (jusqu'à } \sigma = \sigma^*)$$

Evolution faiblement incrémentale, bilan



Evolution faiblement incrémentale : colonne de Ziegler, retour sur la situation de fibré au dessus d'un point $m_e \in \mathbb{M}$.

- $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $q = (\theta^1, \theta^2)$ système de coordonnées, $q(m_e(0)) = (0, 0)$
- $\mathbb{G} = \mathrm{Rot}(Oz) \approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{B} \approx \mathbb{S}^1$,$\pi : (\theta^1, \theta^2) \mapsto \alpha = \theta^1 - \theta^2$ (localement)
- si $q(m) = (\theta^1, \theta^2)$, alors $F_d(m) = -k\theta^1 d\theta^1$
- hyperélasticité si $\alpha = \alpha(b)$ alors $W_{el}(b) = \frac{1}{2}k\alpha^2$, $F_{el}(b) = k\alpha d\alpha$ et $F_\ell(m) = -\pi^*(F_{el})(m) = -k(\theta^1 - \theta^2)d\theta^1 + k(\theta^1 - \theta^2)d\theta^2$ si $q(m) = (\theta^1, \theta^2)$
- si $q(m) = (\theta^1, \theta^2)$ et si $\sigma \in [0, +\infty[$ alors $F_c(\sigma)(m) = \ell\sigma \sin(\theta^1 - \theta^2)d\theta^1$
- si $q(m) = (\theta^1, \theta^2)$, alors $\dot{\xi}_c(\sigma, m) = \ell \sin(\theta^1 - \theta^2)d\theta^1$
- si $q(m) = (\theta^1, \theta^2)$, alors $F_t(m) = (-2k\theta^1 + k\theta^2 + \ell\sigma \sin(\theta^1 - \theta^2))d\theta^1 + k(\theta^1 - \theta^2)d\theta^2$
- si $q(m) = (\theta^1, \theta^2)$, alors $dF_t(\sigma)^{ver}(m_e(\sigma))$ est l'élément de $\mathcal{L}(T_{m_e(\sigma)}\mathbb{M}, T^*_{m_e(\sigma)}\mathbb{M})$ défini par :
  $\delta m = (\dot{\theta}^1, \dot{\theta}^2) \mapsto (-2k\dot{\theta}^1 + k\dot{\theta}^2 + \ell\sigma \cos(\theta^1 - \theta^2)(\dot{\theta}^1 - \dot{\theta}^2))d\theta^1 + k(\dot{\theta}^1 - \dot{\theta}^2)d\theta^2$ soit une matrice de rigidité tangente donnée par (au signe près) :
  $$K(\sigma, q(m)) = \begin{pmatrix} 2k - \sigma\ell\cos(\theta^1 - \theta^2) & -k + \sigma\ell\cos(\theta^1 - \theta^2) \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Evolution faiblement incrémentale : colonne de Ziegler, retour sur la situation de fibré au dessus d'un point $m_e \in \mathbb{M}$, aspects géométriques

- On démarre de la position d'équilibre verticale sans chargement $\sigma = 0$. (C'est la seule).
- $q(m_e(0)) = (0,0) \Longrightarrow \frac{\partial F_c(0)}{\partial \sigma}(0,0) = \dot{\xi}_c(0) = 0$
- $K(\sigma,(0,0)) = \begin{pmatrix} 2k - \sigma\ell & -k + \sigma\ell \\ -k & k \end{pmatrix}$ toujours inversible $\forall\sigma$ car $\det K(\sigma,(0,0)) = k^2$. $q(m_e(\sigma)) = (0,0)$ $\forall\sigma$ (T-transversalité $\forall\sigma$: $\sigma^* = +\infty$) : fibré au dessus d'un point.
- Géométriquement :

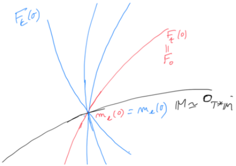
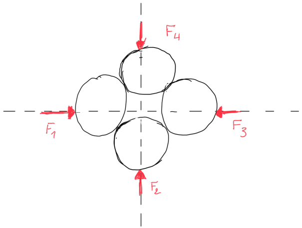


Figure: Evolution faiblement incrémentale ponctuelle : fibré au-dessus d'un point

Bilan et limitations de la formulation actuelle

- hypothèse de base : tout système d'efforts quelque soit sa nature peut être décrit par une section de $T^*\mathbb{M}$
- exemple de systémes qui ne rentrent pas dans ce cadre : milieux granulaires selon la loi de contact choisie



Lois faiblement et fortement hypoélastiques

Définition Lois de comportement hypoélastiques (Forme usuelle analytique)

Une loi hypoélastique est donnée par un système différentiel τ_{el} de rang r sur $T^*\mathbb{B}$. τ_{el} est un sous module de $\Gamma(T(T^*\mathbb{B})) = \mathfrak{X}(T^*\mathbb{B})$ stable par les sommes localement finies tel que pour tout $\mathbf{f}_\epsilon \in T^*\mathbb{B}$, $X_{\mathbf{f}_\epsilon} = \{X(\mathbf{f}_\epsilon), X \in \tau_{el}\}$ sev de dimension r de $T_{\mathbf{f}_\epsilon} T^*\mathbb{B}$

- si τ_{el} intégrable : c'est l'hypoélasticité incrémentale intégrable ou hypoélasticité faible. Une fois l'intégration faite (!!!), on obtient une section F_{el} de $T^*\mathbb{B}$: c'est donc équivalent à l'élasticité générale
- si τ_{el} non intégrable : c'est l'hypoélasticité incrémentale générale (non intégrable) ou hypoélasticité forte

Définition Lois de comportement hypoélastiques (Forme géométrique)

Une loi incrémentalement ou fortement hypoélastique est la donnée d'une connexion (Ehresmann) sur le fibré vectoriel $T^*\mathbb{B}$: $\mathcal{H} : \mathbf{f}_\epsilon \in T^*\mathbb{B} \mapsto \mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon) \subset T_{\mathbf{f}_\epsilon} T^*\mathbb{B}$ telle que

$$T_{\mathbf{f}_\epsilon} T^*\mathbb{B} = V(\mathbf{f}_\epsilon) \oplus \mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon)$$

Ecriture de la loi d'évolution incrémentale

On suppose tout le reste égal par ailleurs : $\Sigma = ((\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \varpi), F_d, \mathcal{H})$, $F_c : \sigma \mapsto F_c(\sigma)$ et pour tout σ, $F_{ext}(\sigma) = F_d + F_c(\sigma)$
Soit une étape $\sigma \in [0, \sigma_l[$ du chemin de chargement et le point d'équilibre $m_e(\sigma) \in \mathbb{M}$ correspondant. A cette étape σ, l'état des efforts extérieurs est décrit par $F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))$ et les efforts intérieurs de déformations sont décrits sur l'espace des formes par $\mathbf{f}_\epsilon(\sigma) \in T^*_{\varpi(m_e(\sigma))}\mathbb{B} \subset T^*\mathbb{B}$ ou pour le système Σ par $\mathbf{f}_{def}(\sigma) = \varpi^*(\mathbf{f}_\epsilon(\sigma)) \in T^*_{m_e(\sigma)}\mathbb{M} \subset T^*\mathbb{M}$ de telle sorte que (équilibre)

$$F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma)) = \mathbf{f}_{def}(\sigma)$$

Une perturbation $\delta\sigma$ est alors donnée au système et décrite par un vecteur donné $\dot{\xi}_c(\sigma, m_e(\sigma)) = \dot{\xi}_c(\sigma) \in V(F_c(\sigma)(m_e(\sigma))$ (la perturbation est $\dot{\xi}_c(\sigma)\delta\sigma$). Le système répond par une variation $\delta m(\sigma) = \mathbf{u}(\sigma)\delta\sigma \in T_{m_e(\sigma)}\mathbb{M}$ correspondant à une variation des efforts de déformations décrite pour les formes par un vecteur $\delta\mathbf{f}_\epsilon(\sigma) \in \mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon(\sigma)) \subset T_{\mathbf{f}_\epsilon}(\sigma)T^*\mathbb{B}$ et pour les configurations par un vecteur $\delta\mathbf{f}_{def}(\sigma) \in {\varpi^*}^T(\mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon(\sigma))) \subset T_{\mathbf{f}_{def}}(\sigma)T^*\mathbb{M}$
La question est de trouver l'équation reliant $\dot{\xi}_c(\sigma)$ à $\mathbf{u}(\sigma)$ c'est à dire les variations incrémentales de position sur la variété des équilibres.

Ecriture de la loi d'évolution incrémentale : une figure

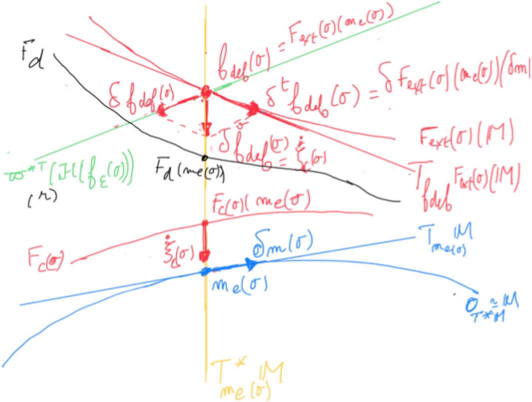


Figure: Evolution fortement incrémentale

Ecriture de la loi d'évolution incrémentale : commentaires de la figure

Etapes successives de calcul

- vecteur générique de $\delta m \in T_{m_e(\sigma)}(\mathbb{M})$
- $\delta \mathbf{f}_\epsilon(\sigma) \in \mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon(\sigma))$
- $\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma) \in \varpi^{*T}\mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon(\sigma))$ comme fonction (linéaire) de δm : $\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma) = \phi_{def}(\sigma)(\delta m)$
- $T_{F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))} F_{ext}(\sigma)(\mathbb{M}) = d(F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))(T_{m_e(\sigma)}\mathbb{M})$
- $\delta F_{ext}(\sigma) = d(F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))(\delta m)$
- On s'appuie sur la section $F_{ext}(\sigma)(\mathbb{M})$ qui passe par $\mathbf{f}_{def}(\sigma)$ en $m_e(\sigma)$ d'après la loi de l'équilibre et donc

  $$T_{\mathbf{f}_{def}(\sigma)} T^*\mathbb{M} = V_{\mathbf{f}_{def}(\sigma)} T^*\mathbb{M} \oplus T_{F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))} F_{ext}(\sigma)(\mathbb{M})$$

  et on calcule $p(\sigma) \in \mathcal{L}(T_{\mathbf{f}_{def}(\sigma)} T^*\mathbb{M})$ le projecteur associé.
- $\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma) = \delta^v \mathbf{f}_{def}(\sigma) + \delta^t \mathbf{f}_{def}(\sigma)$ avec $\delta^v \mathbf{f}_{def}(\sigma) = p(\sigma)(\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma)) \in V(\mathbf{f}_{def}(\sigma))$ et $\delta^t \mathbf{f}_{def}(\sigma) = \delta \mathbf{f}_{def}(\sigma) - p(\sigma)(\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma))$

Ecriture de la loi d'évolution incrémentale : commentaires de la figure suite et fin

- L'équilibre incrémental s'écrit $\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma) = \dot{\xi}_c(\sigma) + \delta F_{ext}(\sigma)$: c'est une décomposition de $\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma)$ selon la projection $p(\sigma)$
- $\rightarrow$ sur le vertical $\delta^v \mathbf{f}_{def}(\sigma) = p(\sigma)(\delta \mathbf{f}_{def}(\sigma)) = \dot{\xi}_c(\sigma)$
- $\rightarrow$ dans la direction tangente $\delta^t \mathbf{f}_{def}(\sigma) = \delta F_{ext}(\sigma)$ soit en combinant les deux relations $d(F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))(\delta m) + \dot{\xi}_c(\sigma) = \phi_{def}(\sigma)(\delta m)$ ou encore si $\psi(\sigma) = \phi_{def}(\sigma) - d(F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))) \in \mathcal{L}(T_{m_e(\sigma)}\mathbb{M}, T_{\mathbf{f}_{def}(\sigma)}T^*\mathbb{M})$

$$\psi(\sigma)(\delta m) = \dot{\xi}_c(\sigma)$$

- si ce système linéaire a une et une seule solution, on récupère alors la variation $\delta m(\sigma)$ sur la variété des équilibres
- Attention : il y a donc deux conditions géométriques à la mise en oeuvre de cet algorithme qui correspondent à la transversalité de la section $F_t(\sigma)$ dans le cas faiblement incrémental :
  1. si $\dot{\xi}_c(\sigma) \notin \mathrm{Im}\psi(\sigma)$ il n'existe pas de déplacement infinitésimal $\delta m \in T_{m_e(\sigma)}\mathbb{M}$ solution du problème : on va quitter la configuration d'équilibre
  2. si $\psi(\sigma)$ non injective, perte d'unicité

Evolution fortement incrémentale : colonne de Ziegler

- $m_e = (\theta^1, \theta^2)$, $\delta m = ((\theta^1, \theta^2), (\dot\theta^1, \dot\theta^2)) \in T_{m_e}\mathbb{M}$
- $b = (\alpha)$, $\mathbf{f}_\epsilon(\sigma) = (\alpha, k\alpha) \in T_b^*\mathbb{B}$, $\mathcal{H}(\mathbf{f}_\epsilon(\sigma)) = \{(\alpha, k\alpha), (\dot\alpha, \dot\varphi) \mid \dot\varphi - k\dot\alpha = 0\}$
- $\delta\mathbf{f}_\epsilon(\sigma) = ((\alpha, k\alpha), (\dot\alpha, k\dot\alpha))$
- $\delta\mathbf{f}_{def}(\sigma) = ((((\theta^1, \theta^2), (k(\theta^1 - \theta^2), k(\theta^2 - \theta^1))), ((\dot\theta^1, \dot\theta^2), (k(\dot\theta^1 - \dot\theta^2), k(\dot\theta^2 - \dot\theta^1))))$ comme fonction (linéaire) de δm : $\delta\mathbf{f}_{def}(\sigma) = \phi_{def}(\sigma)(\delta m)$
- $\dot\xi_c(\sigma) = (((\theta^1, \theta^2), (\ell\sigma\sin(\theta^1 - \theta^2), 0)), ((0, 0), (\ell\sin(\theta^1 - \theta^2), 0)))$
- $\delta F_{ext}(\sigma) = (((\theta^1, \theta^2), (-k\theta^1 + \ell\sigma\sin(\theta^1 - \theta^2), 0)), ((\dot\theta^1, \dot\theta^2), (-k\dot\theta^1 + \ell\sigma(\dot\theta^1 - \dot\theta^2)\cos(\theta^1 - \theta^2), 0))$ comme fonction (linéaire) de δm :

$$\delta F_{ext}(\sigma) = d(F_{ext}(\sigma)(m_e(\sigma))(\delta m)$$

- $((\theta^1, \theta^2), (-k\theta^1 + \ell\sigma\sin(\theta^1 - \theta^2), 0) = ((\theta^1, \theta^2), (k(\theta^1 - \theta^2), k(\theta^2 - \theta^1))$ (même origine des vecteurs) car équilibre (la seule solution est $m_e = (0, 0)$)
- $\psi(\sigma)((\theta^1, \theta^2), (\dot\theta^1, \dot\theta^2)) = (((\theta^1, \theta^2), (k(\theta^1 - \theta^2), k(\theta^2 - \theta^1)), ((\dot\theta^1, \dot\theta^2), (k(\dot\theta^1 - \dot\theta^2) + k\dot\theta^1 - \ell\sigma(\dot\theta^1 - \dot\theta^2)\cos(\theta^1 - \theta^2), k(\dot\theta^2 - \dot\theta^1))$ ce qui fait apparaître la matrice de rigidité tangente, celle de la dérivée verticale de la section totale.
- la seule solution de $\psi(\sigma)((\theta^1, \theta^2), (\dot\theta^1, \dot\theta^2)) = \dot\xi_c(\sigma)$ est $(\dot\theta^1, \dot\theta^2) = (0, 0)$

Conclusion.

Bilan

1. Evolutions faiblement incrémentales (EFaI) lorsque tous les efforts sont définis par des sections de fibrés de section totale $F_t(\sigma)$. Descriptions géometrique et analytique des EFaI comme intersection de la section $F_t(\sigma)$ avec la section nulle. Description intrinsèque de la matrice de rigidité comme derivation verticale $d^{ver}F_t(\sigma)$ ("par rapport à la section nulle") de la section F_t.
2. Descriptions géometrique et analytique de la stabilité lors d'EFaI comme transversalité de l'intersection de la section $F_t(\sigma)$ et/ou comme inversibilité de la dérivée verticale $d^{ver}F_t(\sigma)$.
3. Evolutions fortement incrémentales (EFoI) lorsque les efforts de déformations ne sont pas descriptibles en termes de sections. Hypoélasticité forte comme donnée d'une connexion $\mathcal{H}$ sur $T^*\mathbb{B}$, espace des covecteurs sur l'espace des formes du système.
4. Ecriture explicite géométrique et analytique des lois des EFoI en s'appuyant sur la section des efforts extérieurs et sur la connexion $\mathcal{H}$.

MERCI DE VOTRE ATTENTION