

Retour sur la formulation des lois de comportement viscoélastique en transformations finies

Samuel Forest, Michel Amestoy
Centre des Matériaux, Mines Paris, CNRS UMR 7633, PSL University
BP 87 91003 Evry, France
samuel.forest@minesparis.psl.eu



Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Plan

- ① **Structure des espaces physique et matériel**
- ② **Les arguments de la loi de comportement**
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ **Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen**
- ④ **Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides**
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ **Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!**

Référentiel galiléen

L'espace physique \mathcal{E}_t est un *espace affine euclidien orienté* de dimension 3, E_0 étant l'espace vectoriel associé. Il est attaché à un référentiel ou observateur \mathcal{R} . Dans le cadre de la mécanique classique, le groupe des observateurs habilités à formuler de façon autonome les lois de comportement thermomécanique est

- le groupe *galiléen*

$$\underline{\mathbf{x}} \longrightarrow \underline{\mathbf{x}}' = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}_0^{-1} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{v}}_0 t + \underline{\mathbf{c}}_0$$

où $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}_0 \in SO(E)$ le groupe spécial orthogonal (les *rotations*)¹.

- le groupe *galiléen étendu* (Einstein)

$$\underline{\mathbf{x}} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathbf{Q}}_0^{-1} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}(t)$$

¹Afin de préserver la description des milieux matériels *hémitropes* (l'éventualité se présente pour le vecteur flux de chaleur, et en mécanique pour certaines classes de symétrie et pour les milieux non matériellement simples) le groupe des observateurs éligibles sera réduit aux référentiels galiléens ayant choisi *la même orientation*.

Description de l'espace physique classique

La structure de l'espace physique classique est entièrement caractérisée par

- une base orthonormée $\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$
- le *pseudo-tenseur d'orientation*² d'ordre 3, dit de Levi-Civita

$$\underline{\underline{\mathcal{O}}} = \epsilon_{ijk} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}^k \quad \mathcal{O}^M = (\det M) \underline{\underline{\mathcal{O}}}$$

où ϵ_{ijk} est la signature de la permutation (i, j, k)

- le *tenseur métrique*, représenté par la 2-forme symétrique définie positive

$$\underline{\underline{g}} = g_{ij} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j$$

sur \mathcal{E}

Les tenseurs $\underline{\underline{g}}$, $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ sont appelés *tenseurs de structure* de l'espace physique³.

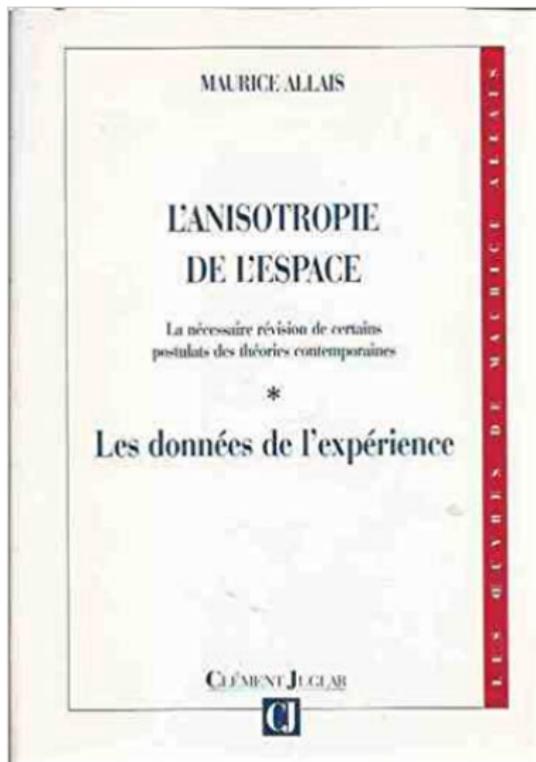
C'est un espace affine euclidien **isotrope**.

C'est le **principe d'isotropie de l'espace**.

²Le pseudo-tenseur d'orientation est également appelé forme volume canonique sur un espace euclidien

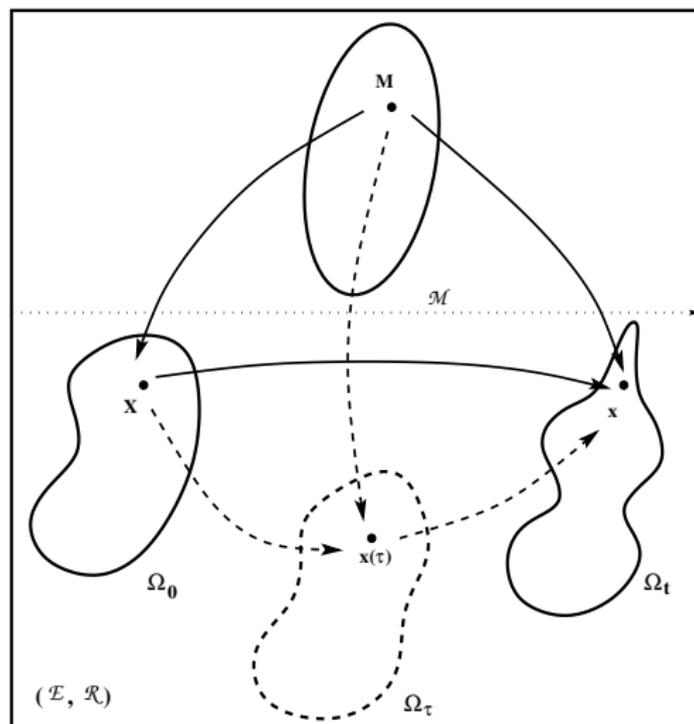
³Ce sont les seuls. Contrairement à l'espace matériel décrit ensuite, l'espace physique classique ne possède pas de trièdre directeur privilégié, hypothèse remise en question par [Allais, 1997, Allais, 2000].

Maurice Allais : prix Nobel d'économie (1988)



M. Allais avait prévu qu'il obtiendrait le prix Nobel de physique!

Corps matériel et son mouvement



Configurations de référence, intermédiaire et actuelle du corps matériel

Structure de l'espace matériel E_0

- Espace tangent E_0 au point matériel \underline{X} , (cas particulier pour l'exposé, configuration *naturelle*)
- Un **trièdre directeur** $\mathcal{B}_0 = (\underline{\mathbf{A}}_1, \underline{\mathbf{A}}_2, \underline{\mathbf{A}}_3)$ formant une base orthonormée de E_0 . Les directeurs du milieu matériel sont par exemple attachés au réseau cristallin ou aux fibres dans un matériau composite.
- Les **tenseurs de structure matériels** $\mathcal{T} \dots$, sont des formes d'ordres variés structurant les propriétés de la matière⁴. Ils sont construits à partir de produits tensoriels des co-directeurs $\{\underline{\mathbf{A}}^i\}$. A commencer par :

- le tenseur d'orientation $\overset{\circ}{\mathcal{O}}_0$

$$\overset{\circ}{\mathcal{O}}_0 \equiv \epsilon_{IJK} \underline{\mathbf{A}}^I \otimes \underline{\mathbf{A}}^J \otimes \underline{\mathbf{A}}^K$$

- le tenseur métrique matériel $\underline{\mathcal{G}}$.

$$\underline{\mathcal{G}} = \underline{\mathbf{A}}^1 \otimes \underline{\mathbf{A}}^1 + \underline{\mathbf{A}}^2 \otimes \underline{\mathbf{A}}^2 + \underline{\mathbf{A}}^3 \otimes \underline{\mathbf{A}}^3$$

⁴ Introduction de ce concept : [Boehler, 1979, Boehler, 1987, Zheng, 1994]

Invariance de configuration

- Groupe d'invariance de configuration $\mathcal{G}_0 \leq \mathcal{U}(E_0)$

$$\mathcal{G}_0 = \{\mathbf{H} \in \mathcal{U}(E), \quad \mathcal{T}^{\mathbf{H}} \equiv \mathcal{T}\}$$

Invariance de configuration

- Groupe d'invariance de configuration $\mathcal{G}_0 \leq \mathcal{U}(E_0)$

$$\mathcal{G}_0 = \{\mathbf{H} \in \mathcal{U}(E), \quad \mathcal{T}^H \equiv \mathcal{T}\}$$

- Cas où \mathcal{G}_0 est maximal, i.e. $\mathcal{G}_0 = \mathcal{U}(E_0)$, le seul tenseur de structure invariant par toute transformation unimodulaire est

Invariance de configuration

- Groupe d'invariance de configuration $\mathcal{G}_0 \leq \mathcal{U}(E_0)$

$$\mathcal{G}_0 = \{ \tilde{\mathbf{H}} \in \mathcal{U}(E), \quad \mathcal{T}^{\tilde{\mathbf{H}}} \equiv \mathcal{T} \}$$

- Cas où \mathcal{G}_0 est maximal, i.e. $\mathcal{G}_0 = \mathcal{U}(E_0)$, le seul tenseur de structure invariant par toute transformation unimodulaire est $\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\mathcal{O}}}}$ car

$$\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\mathcal{O}}}}^{\tilde{\mathbf{H}}} = (\det \tilde{\mathbf{H}}) \underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\mathcal{O}}}} = \underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\underset{\equiv}{\mathcal{O}}}} \iff \tilde{\mathbf{H}} \in \mathcal{U}(E_0)$$

Le pseudo-tenseur d'orientation est le tenseur de structure associé au groupe unimodulaire.

- Cas **isotrope** : $\mathcal{G}_0 = GO(E_0)$, le groupe orthogonal sur E_0 . Définition d'un tenseur orthogonal :

$$\tilde{\mathbf{H}} \in GO(E_0) \iff \tilde{\mathbf{H}}^* \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{G}}, \quad \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

Invariance de configuration

- Groupe d'invariance de configuration $\mathcal{G}_0 \leq \mathcal{U}(E_0)$

$$\mathcal{G}_0 = \{ \tilde{\mathbf{H}} \in \mathcal{U}(E), \quad \mathcal{T}^{\mathbf{H}} \equiv \mathcal{T} \}$$

- Cas où \mathcal{G}_0 est maximal, i.e. $\mathcal{G}_0 = \mathcal{U}(E_0)$, le seul tenseur de structure invariant par toute transformation unimodulaire est $\overset{\circ}{\underset{\equiv}{\mathbf{O}}}$ car

$$\overset{\circ}{\underset{\equiv}{\mathbf{O}}}^{\mathbf{H}} = (\det \tilde{\mathbf{H}}) \overset{\circ}{\underset{\equiv}{\mathbf{O}}} = \overset{\circ}{\underset{\equiv}{\mathbf{O}}} \iff \tilde{\mathbf{H}} \in \mathcal{U}(E_0)$$

Le pseudo-tenseur d'orientation est le tenseur de structure associé au groupe unimodulaire.

- Cas **isotrope** : $\mathcal{G}_0 = GO(E_0)$, le groupe orthogonal sur E_0 . Définition d'un tenseur orthogonal :

$$\tilde{\mathbf{H}} \in GO(E_0) \iff \tilde{\mathbf{H}}^* \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{G}}, \quad \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{1}$$

Il s'ensuit par définition que $\tilde{\mathbf{G}}^{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{G}} \implies \tilde{\mathbf{H}} \in GO(E_0)$. Le tenseur métrique est le tenseur de structure associé au groupe orthogonal.

- Cas **hémitrope** : $\mathcal{G}_0 = SO(E_0)$, le groupe spécial orthogonal sur E_0 . Le tenseur métrique et le tenseur d'orientation sont les tenseurs de structure associé au groupe spécial orthogonal.
- Cas minimal : le groupe d'invariance est réduit à l'identité $\mathcal{G}_0 = \{\mathbf{1}\}$
Les tenseurs de structures se réduisent au trièdre directeur \mathcal{B}_0 lui-même (cas *triclinique*).

Table 7. Three-dimensional compact point groups of all kinds and their structural tensors.

Systems ($l = \text{integer} > 1$)	No	Group symbols	Group order	Group generators	Simple structural tensors	Single structural tensor	
triclinic	1	C_1	1	I	i, j, k	$k^3 + (1 \otimes \epsilon + \epsilon)k^2$	
	2	$\bar{1}$	2	$-I$	ci, ej, ck	$(i \otimes \epsilon + \epsilon)k$	
monoclinic	3	2	2	$R(\pi k)$	P_{21}, k, ϵ	$k \otimes P_2 + (k \otimes \epsilon)k^2$	
	4	$\bar{2} = m$	2	$-R(\pi k)$	i, j	$(k \otimes \epsilon + \epsilon)k \otimes i$	
	5	$2/m$	4	$R(\pi k), -I$	$P_2, \epsilon k$	$P_2 + \epsilon k$	
orthorhombic	6	222	4	$R(\pi k), -R_i, -R_j$	P_{21}, ϵ	$\epsilon(P_2 + k^2)$	
	7	$mm2$	4	$R(\pi k), R_i, R_j$	P_{21}, k	$k \otimes (P_2 + k^2)$	
	8	mmm	8	$R(\pi k), R_i, R_j, -I$	P_2	P_2	
	9	n	n	$R(2\pi/nk)$	P_n, k, ϵ	$k \otimes P_n + (k \otimes \epsilon)k^n$	
tetragonal ($n = 4$), or ($4f$)-gonal ($n = 4f$)	10	$\bar{4}$	n	$-R(2\pi/nk)$	$k \otimes P_{n/2}, \epsilon k$	$(k \otimes \epsilon) P_{n/2}$	
	11	n/m	$2n$	$R(2\pi/nk), -I$	$P_n, \epsilon k$	$P_n + \epsilon k^{n-1}$	
	12	$n22$	$2n$	$R(2\pi/nk), -R_i, -R_j$	P_n, ϵ	$\epsilon(P_n + k^n)$	
	13	mmm	$2n$	$R(2\pi/nk), R_i, R_j$	P_n, k	$k \otimes (P_n + k^n)$	
	14	$\bar{4}m$	$2n$	$-R(2\pi/nk), R_i, R_j$	$k \otimes P_{n/2}$	$k \otimes P_{n/2}$	
	15	n/mmm	$4n$	$R(2\pi/nk), R_i, R_j, -I$	P_n	P_n	
trigonal ($n = 3$), or ($2l+1$)-gonal ($n = 2l+1$)	16	n	n	$R(2\pi/nk)$	P_n, k, ϵ	$P_n + (k \otimes \epsilon)k^{n-1}$	
	17	$\bar{3}$	$2n$	$R(2\pi/nk), -I$	$k \otimes P_n, \epsilon k$	$k \otimes P_n + \epsilon k^n$	
	18	$n2$	$2n$	$R(2\pi/nk), -R_i$	P_n, ϵ	$P_n + \epsilon k^{n-1}$	
	19	nm	$2n$	$R(2\pi/nk), R_j$	P_n, k	$P_n + k^n$	
	20	$\bar{6}m$	$4n$	$R(2\pi/nk), R_i, -I$	$k \otimes P_n$	$k \otimes P_n$	
hexagonal ($n = 6$), or ($4l+2$)-gonal ($n = 4l+2$)	21	n	n	$R(2\pi/nk)$	P_n, k, ϵ	$k \otimes P_n + (k \otimes \epsilon)k^n$	
	22	$\bar{6}$	n	$-R(2\pi/nk)$	$P_{n/2}, \epsilon k$	$(k \otimes \epsilon + \epsilon)k \otimes P_{n/2}$	
	23	n/m	$2n$	$R(2\pi/nk), -I$	$P_n, \epsilon k$	$P_n + \epsilon k^{n-1}$	
	24	$n22$	$2n$	$R(2\pi/nk), -R_i, -R_j$	P_n, ϵ	$\epsilon(P_n + k^n)$	
	25	mmm	$2n$	$R(2\pi/nk), R_i, R_j$	P_n, k	$k \otimes (P_n + k^n)$	
	26	$\bar{6}2m$	$2n$	$-R(2\pi/nk), -R_i, R_j$	$P_{n/2}$	$P_{n/2}$	
	27	n/mmm	$4n$	$R(2\pi/nk), R_i, R_j, -I$	P_n	P_n	
cubic	28	23	12	$R(2\pi/3\epsilon), -R_i$	T_{ϕ}, ϵ	$T_{\phi} + \epsilon$	
	29	$m\bar{3}$	24	$R(2\pi/3\epsilon), R_i, -I$	T_h	T_h	
	30	432	24	$R(2\pi/3\epsilon), R(\pi/2i), -R_j$	O_h, ϵ	ϵO_h	
	31	$\bar{4}32$	24	$R(2\pi/3\epsilon), -R(\pi/2i), -R_j$	T_d	T_d	
	32	$m\bar{3}m$	48	$R(2\pi/3\epsilon), R(\pi/2i), R_j, -I$	O_h	O_h	
	33	235	60	$R(2\pi/5k), R(2\pi/3i), R_j$	I_h, ϵ	ϵI_h	
icosahedral	34	$m\bar{3}\bar{5}$	120	$R(2\pi/5k), R(2\pi/3i), R_j, -I$	I_h	I_h	
	cylindrical ($0 \leq \phi < 2\pi$)	35	∞	∞	$R(\phi k)$	k, ϵ	$(k \otimes \epsilon + \epsilon)k^2$
		36	$\infty/m \equiv \infty\bar{2}$	∞	$R(\phi k), -I$	ϵk	ϵk
		37	$\infty 2$	∞	$R(\phi k), -R_i$	$k \otimes k, \epsilon$	$\epsilon k \otimes k$
		38	∞/m	∞	$R(\phi k), R_i$	k	k
		39	∞m	∞	$R(\phi k), R_i, -I$	$k \otimes k$	$k \otimes k$
spherical ($0 \leq \phi, \psi < 2\pi$)	40	2∞	∞	$R(\phi k), R(\psi i)$	ϵ	ϵ	
	41	$2m\bar{2}$	∞	$R(\phi k), R(\psi i), -I$	I	I	

[Zheng, 1994]

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② **Les arguments de la loi de comportement**
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Le gradient de la transformation et son adjoint

$$\begin{array}{ccc}
 E_0^* & \xleftarrow{\tilde{\mathbf{F}}^*} & E_t^* \\
 \tilde{\mathbf{G}} \uparrow & & \uparrow \tilde{\mathbf{g}} \\
 E_0 & \xrightleftharpoons[\tilde{\mathbf{F}}]{\tilde{\mathbf{F}}^T} & E_t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{\mathbf{F}} = F_j^i \mathbf{e}_i \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*j} & E_0 \longrightarrow E_t \\
 \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = F^{-1j}_i \underline{\mathbf{E}}_i \otimes \mathbf{e}^{*j} & E_t \longrightarrow E_0 \\
 \tilde{\mathbf{F}}^* = F^{*j}_i \underline{\mathbf{E}}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j & E_t^* \longrightarrow E_0^* \\
 \tilde{\mathbf{F}}^{-*} = F^{-*j}_i \mathbf{e}^{*i} \otimes \underline{\mathbf{E}}_j & E_0^* \longrightarrow E_t^*
 \end{array}$$

L'application transposée de $\tilde{\mathbf{F}}$ est définie par

$$\tilde{\mathbf{F}}^T = \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} = F^{Tj}_i \underline{\mathbf{E}}_i \otimes \mathbf{e}^{*j}$$

Les quatre jeux de composantes des tenseurs (généralement distincts) précédents

$$F_j^i \quad F^{-1j}_i \quad F^{*j}_i \quad F^{-*j}_i$$

permettront d'effectuer toutes les opérations de transport (*transmutation*) nécessaires.

Tenseurs de Cauchy–Green

Les mesures de déformations résultent du **transport/transmutation des tenseurs métriques spatial et matériel** :

- Métrique lagrangienne : transport du tenseur métrique de l'espace

$$g_{ij} \longrightarrow F^*{}^i{}_I g_{ij} F^j{}_J =: C_{IJ}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}^T \underset{\sim}{\mathbf{F}}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}^* \underset{\sim}{\mathbf{g}} \underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{G}} \underset{\sim}{\mathbf{F}}^T \underset{\sim}{\mathbf{F}}$$

Tenseurs de Cauchy–Green

Les mesures de déformations résultent du **transport/transmutation des tenseurs métriques spatial et matériel** :

- Métrique lagrangienne : transport du tenseur métrique de l'espace

$$g_{ij} \longrightarrow F^{*i} g_{ij} F_j^j =: C_{IJ}$$

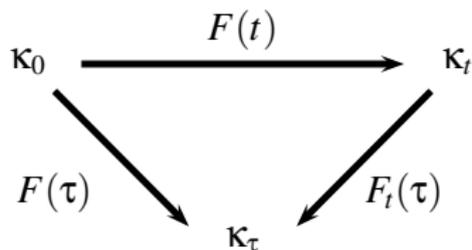
$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}, \quad {}^b \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^* \underline{\underline{g}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$$

- Métrique matérielle eulérienne : transport du tenseur métrique de la matière

$$G_{IJ} \longrightarrow F^{*i} G_{IJ} F_j^J =: B_{ij}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T, \quad \underline{\underline{B}}^\sharp = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{F}}^*(t) \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{g}}^{-1}$$

Histoire des déformations



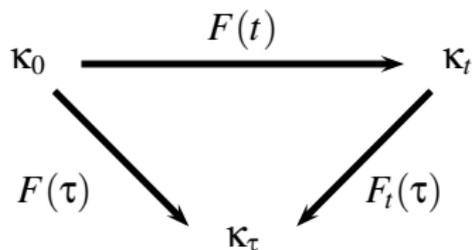
- Retour vers le passé : on prend la configuration actuelle comme configuration de référence :

$$\tilde{F}_t(\tau) = \tilde{F}(\tau)\tilde{F}^{-1}(t) \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

- L'espace tangent au point $\underline{x}(\tau)$ définit une configuration locale κ_τ caractérisée par sa métrique $\tilde{\mathbf{g}}_\tau$
- Transport de la métrique $\tilde{\mathbf{g}}_\tau$ sur la configuration eulérienne

$$\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta}^\tau \longrightarrow$$

Histoire des déformations



- Retour vers le passé : on prend la configuration actuelle comme configuration de référence :

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t) \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

- L'espace tangent au point $\underline{\mathbf{x}}(\tau)$ définit une configuration locale κ_τ caractérisée par sa métrique $\tilde{\mathbf{g}}_\tau$
- Transport de la métrique $\tilde{\mathbf{g}}_\tau$ sur la configuration eulérienne

$$\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta}^\tau \longrightarrow F^*_{i\alpha} \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta}^\tau F_j^\beta =: \mathbf{C}_{ij}^t(\tau)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_t^T(\tau) \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau), \quad {}^b \mathbf{C}_t = \tilde{\mathbf{g}}_t \mathbf{C}_t$$

Les jeux de variables de la loi de comportement

(viscoélasticité héréditaire⁵)

grandeur	eulérienne	lagrangienne
contraintes	$J\underset{\sim}{\sigma}$	
déformations	$\underset{\sim}{C}_t(\mathcal{T})$	
espace	$\underset{\sim}{g}$	
matière		$\underset{\sim}{G}$ \circlearrowleft $\equiv \underset{\sim}{O}_L$ \mathcal{T}

Remarque : $\underset{\sim}{F}(t)$ n'est pas un argument de la loi de comportement, c'est l'outil/agent de transport d'un espace à l'autre.

⁵Des comportements plus généraux exigent l'introduction explicite de variables internes spécifiques.

Les jeux de variables de la loi de comportement

grandeur	eulérienne	lagrangienne
contraintes	$J\underset{\sim}{\sigma}$	$\underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{F}^{-1} J \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{F}^{-T}$
déformations	$\underset{\sim}{C}_t(\mathcal{T})$	$\underset{\sim}{C}(\mathcal{T})$
espace	$\underset{\sim}{g}$	${}^b\underset{\sim}{C}(t)$
matière	$\underset{\sim}{B}^{\sharp-1}(t)$ $(\det \underset{\sim}{F}^{-1}(t)) \underset{\sim}{O}^{\circ}$ $\underset{\sim}{F}_{\triangleright}(\mathcal{T})$	$\underset{\sim}{G}$ $\underset{\sim}{O}_L^{\circ}$ \mathcal{T}

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② **Les arguments de la loi de comportement**
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Covariance de la loi de comportement

En vertu du principe d'isotropie de l'espace, la loi de comportement est covariante, c'est-à-dire que c'est une **fonctionnelle hémitrope** de ses arguments :

$$\underline{\sigma}^Q(t) = \mathcal{F}_{\kappa_0} \left(\underline{C}_t^Q(\tau); \det \underline{F}^Q(t), (\underline{B}^{-1}(t))^Q, (\underline{T}_t)^Q; \underline{G}^Q, \underline{\underline{Q}}^Q \right)$$

$\forall \underline{Q} \in SO(E)$ ($\det \underline{Q} = 1$) où \underline{Q} ne dépend pas du temps.

Covariance de la loi de comportement

En vertu du principe d'isotropie de l'espace, la loi de comportement est covariante, c'est-à-dire que c'est une **fonctionnelle hémitrope** de ses arguments :

$$\tilde{\sigma}^Q(t) = \mathcal{F}_{\kappa_0} \left(\tilde{\mathbf{C}}_t^Q(\tau); \det \tilde{\mathbf{F}}^Q(t), (\tilde{\mathbf{B}}^{-1}(t))^Q, (\mathcal{T}_t)^Q; \tilde{\mathbf{G}}^Q, \tilde{\mathbf{O}}^Q \right)$$

$\forall \tilde{\mathbf{Q}} \in SO(E)$ ($\det \tilde{\mathbf{Q}} = 1$) où $\tilde{\mathbf{Q}}$ ne dépend pas du temps. Autrement dit,

$$\mathcal{F}_{\kappa_0}^Q (\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau); \det \tilde{\mathbf{F}}(t), \tilde{\mathbf{B}}^{-1}(t), \mathcal{T}_t) = \mathcal{F}_{\kappa_0} (\tilde{\mathbf{C}}_t^Q(\tau); \det \tilde{\mathbf{F}}(t), (\tilde{\mathbf{B}}^{-1}(t))^Q, (\mathcal{T}_t)^Q)$$

où $\tilde{\mathbf{G}}$ et $\tilde{\mathbf{O}}$ sont tacites en raison de leur invariance dans $SO(E)$.

Cette exigence ne signifie nullement que le comportement du matériau est hémitrope! En effet les symétries matérielles sont codées dans les tenseurs de structure.

Propriété : on trouve que la loi de comportement est invariante par superposition d'un mouvement de corps rigide / par changement de référentiel euclidien, puisque ses arguments le sont. C'est la propriété dite *d'indifférence matérielle*. Ce n'est pas un principe et on n'a pas besoin de l'invoquer!

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Exploitation du second principe

- Densité **massique** d'énergie libre et ses représentations eulérienne et lagrangienne pour un corps élastique

$$\psi(\underline{\mathbf{B}}(t), \underline{\mathbf{g}}, \mathcal{T}_t) = \psi_0(\underline{\mathbf{G}}^{-1}, \underline{\mathbf{C}}(t), \mathcal{T})$$

- Inégalité de Clausius-Duhem dans le cas isotherme

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} - \rho \dot{\psi} \geq 0$$

- Dérivée convective de l'énergie libre :

$$\dot{\psi}(\underline{\mathbf{B}}(t), \underline{\mathbf{g}}, \mathcal{T}_t) = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{B}}} : \underline{\mathbf{B}}^{(conv)} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}} : \underline{\mathbf{g}}^{(conv)} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{T}_t} : (\mathcal{T}_t)^{(conv)}$$

Dérivées convectives des arguments

- Dérivée convective de la métrique spatiale

$$\underset{\sim}{\mathbf{g}}^{(conv)} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-*} \frac{d}{dt} \left(\underset{\sim}{\mathbf{F}}^* \underset{\sim}{\mathbf{g}} \underset{\sim}{\mathbf{F}} \right) \underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1} = \underset{\sim}{\dot{\mathbf{g}}} + \underset{\sim}{\mathbf{g}} \underset{\sim}{\mathbf{L}} + \underset{\sim}{\mathbf{L}}^* \underset{\sim}{\mathbf{g}} = \underset{\sim}{\mathbf{g}} (\underset{\sim}{\mathbf{L}} + \underset{\sim}{\mathbf{L}}^T) = \underset{\sim}{\dot{\mathbf{g}}} + 2\underset{\sim}{\mathbf{D}}$$

En l'absence d'évolution de la métrique spatiale, $\underset{\sim}{\mathbf{g}}^{(conv)} = 2\underset{\sim}{\mathbf{D}}$.

- Dérivée convective de $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$

$$\underset{\sim}{\mathbf{B}}^{\#(conv)} = \underset{\sim}{\mathbf{F}} \frac{d}{dt} \left(\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1} \underset{\sim}{\mathbf{B}}^{\#} \underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-*} \right) \underset{\sim}{\mathbf{F}}^* = \underset{\sim}{\dot{\mathbf{B}}}^{\#} - \underset{\sim}{\mathbf{L}} \underset{\sim}{\mathbf{B}}^{\#} - \underset{\sim}{\mathbf{B}}^{\#} \underset{\sim}{\mathbf{L}}^*$$

En l'absence d'évolution de la métrique matérielle, $\underset{\sim}{\mathbf{B}}^{(conv)} = 0$.

- Dérivée convective de $\underset{\sim}{\mathcal{T}}_t$ (exemple \mathcal{T}^{ij})

$$\left(\underset{\sim}{\mathcal{T}}^{\mathbf{F}^{-1}} \right)^{(conv)} = \underset{\sim}{\mathbf{F}} \dot{\underset{\sim}{\mathcal{T}}} \underset{\sim}{\mathbf{F}}^T = \frac{d}{dt} (\underset{\sim}{\mathcal{T}}_t) - \underset{\sim}{\mathcal{T}}_t \underset{\sim}{\mathbf{L}}^T - \underset{\sim}{\mathbf{L}} \underset{\sim}{\mathcal{T}}^{\mathbf{F}^{-1}}$$

En l'absence d'évolution des tenseurs de structure matériels, $\underset{\sim}{\mathcal{T}}^{(conv)} = 0$.

Loi d'état hyperélastique isotherme

- Variation d'énergie stockée en l'absence d'évolution de la structure matérielle

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(\underline{\mathbf{B}}(t), \underline{\mathbf{g}}, \mathcal{T}^{F^{-1}}) &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{B}}} : \underline{\mathbf{B}}^{(conv)} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{g}}} : \underline{\mathbf{g}}^{(conv)} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathcal{T}^{F^{-1}}} : \left(\mathcal{T}^{F^{-1}}\right)^{(conv)} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}} : \underline{\mathbf{g}}^{(conv)}\end{aligned}$$

- Taux de dissipation d'énergie

$$\begin{aligned}d &= \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} - \rho \dot{\psi} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{1}{2} \underline{\mathbf{g}}^{(conv)} - \rho \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{g}}} : \underline{\mathbf{g}}^{(conv)} \geq 0 \\ &= \left(\frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}} \right) : \underline{\mathbf{g}}^{(conv)} \geq 0\end{aligned}$$

[Stumpf and Hoppe, 1997]

Loi d'état hyperélastique eulérienne anisotrope

$$\underline{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}}$$

C'est une relation remarquable rarement mise en avant (les auteurs présentent en général l'hyperélasticité anisotrope seulement dans sa forme lagrangienne) due à [Doyle and Ericksen, 1956, Marsden and Hughes, 1994].

Remarque 1 : ce n'est pas une relation du type $\partial \psi / \partial \underline{\mathbf{B}}$.

Dans le cas **isotrope seulement**, on a aussi la relation

$$\underline{\sigma} = 2\underline{\mathbf{B}}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{B}}} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{B}}} \underline{\mathbf{B}}$$

Remarque 2 : Nous ne sommes pas condamnés à écrire des lois hyperélastiques lagrangiennes, bien au contraire!

Hyperélasticité isotrope transverse

Dans le cas de l'invariance de configuration de type isotrope transverse d'axe donné par le vecteur $\underline{\mathbf{a}}_0$ dans la configuration locale de référence et par $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}}_{\triangleright}(\underline{\mathbf{a}}_0) = \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{a}}_0$ dans la configuration courante, le tenseur de structure est donné par

$$\underline{\mathbf{A}}_0 = \underline{\mathbf{a}}_0 \otimes \underline{\mathbf{a}}_0, \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{A}}_0\underline{\mathbf{F}}^T = \underline{\mathbf{F}}_{\triangleright}(\underline{\mathbf{A}}_0)$$

d'après [Boehler, 1987, Lu and Papadopoulos, 2000].

$$\underline{\mathbf{\Pi}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \iff \underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}}$$

$$\underline{\mathbf{\Pi}} = 2\rho_0 \underline{\mathbf{C}}^{-1} \underline{\mathbf{G}}^{-1} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{G}}^{-1}} \underline{\mathbf{G}}^{-1} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{A}}_0} \underline{\mathbf{A}}_0 \right) \iff \underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho \underline{\mathbf{g}}^{-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{B}}^{\#}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{A}} \right)$$

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}} &= \beta_1 \underline{\mathbf{B}}^{\#} + \beta_2 \underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} + \beta_3 \underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} + \beta_4 (\underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#}) \\ &+ \beta_5 (\underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} + \underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{B}}^{\#}) \end{aligned}$$

Synthèse : hyperélasticité isotrope transverse

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ **Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides**
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Modèle rhéologique de Maxwell

Modèle unidimensionnel : ressort (module E MPa, raideur k), amortisseur (viscosité η MPa.s)



Equation différentielle associée

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \eta \dot{\varepsilon} = \tau_{\eta} \dot{\sigma} + \sigma, \quad \tau_{\eta} = \frac{\eta}{E}$$

avec le temps caractéristique, dit temps de relaxation τ_{η} .

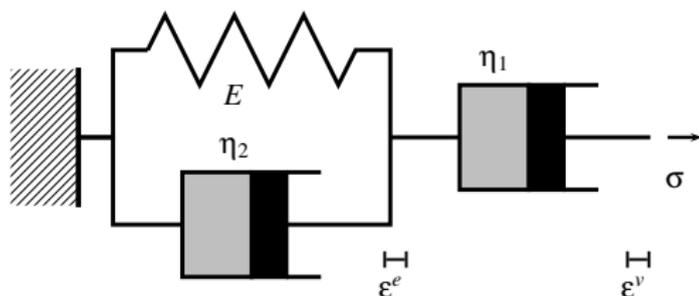
La résolution peut se faire grâce à la transformée de Laplace

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(t) \exp(-st) dt$$

En principe, l'histoire de déformation remonte à $-\infty$ mais, bien souvent, on se contente de conditions initiales et nous enregistrerons l'histoire de déformation à partir de cet instant choisi à 0

Modèle rhéologique de Burgers

Modèle unidimensionnel : un ressort (module E MPa, raideur k), deux amortisseurs (viscosité η_1, η_2 MPa.s)



$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \quad \sigma = E\varepsilon^e + \eta_2\dot{\varepsilon}^e = \eta_1\dot{\varepsilon}^v$$

Éliminer ε^e et ε^v pour obtenir la loi de comportement liant contrainte et déformation :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e + \eta_2\ddot{\varepsilon}^e = E\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\eta_1}\right) + \eta_2\left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\eta_1}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1}\sigma = \eta_2\ddot{\varepsilon} + E\dot{\varepsilon}$$

On voit que l'accélération de déformation intervient dans la loi de comportement, en plus de la vitesse de déformation.

Une définition (mécanique) des fluides viscoélastiques isotropes

Définition. *Un corps matériel est un **fluide** isotrope ssi*

- 1 *Il ne possède pas de tenseur de structure matérielle.*
- 2 *Son groupe de symétrie est le groupe unimodulaire*

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$

- 3 *Sa loi de comportement est exclusivement eulérienne et de la forme*

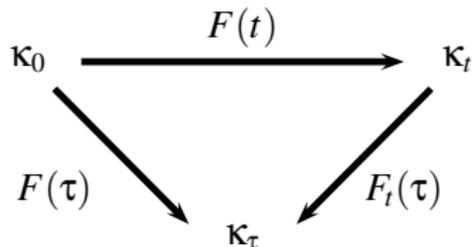
$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{\mathcal{C}}_t(\tau)_{\tau \leq t}; \underline{\mathbf{g}}, \rho(t))$$

C'est une fonctionnelle isotrope de ses arguments que sont l'histoire des déformations et la masse volumique actuelle

Contrairement aux solides, plus de trace de la métrique $\underline{\mathbf{G}}$, pas de configuration dénuée de contraintes...

Loi des fluides viscoélastiques

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}_t(\tau), \rho(t); \tau \leq t)$$



Histoire de la déformation

$$\boldsymbol{\zeta}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_t^T(\tau) \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t)$$

$${}^b \boldsymbol{\zeta}_t(\tau) = \mathbf{g} \boldsymbol{\zeta}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_t^*(\tau) \mathbf{g}_\tau \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau)$$

Noter que

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(t) = \mathbf{1}, \quad {}^b \boldsymbol{\zeta}_t(t) = \mathbf{g}$$

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ **Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides**
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Une classe plus réduite de fluides viscoélastiques est obtenue en supposant que la mémoire du fluide est ultra-courte et limitée aux instants immédiatement inférieurs à l'instant présent. La fonctionnelle héréditaire ne dépend alors de l'histoire des déformations qu'au travers de leurs dérivées temporelles d'ordre n à l'instant $\tau = t$:

$$\mathbf{A}_n(t) = \frac{\partial^n \mathbf{C}_t(\tau)}{\partial \tau^n} \Big|_{\tau=t}$$

Par convention, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{g}$.

$$\dot{\mathbf{F}}_t(\tau) = \dot{\mathbf{F}}(\tau) \mathbf{F}_t^{-1}(\tau) \implies \dot{\mathbf{F}}_t(\tau) \Big|_{\tau=t} = \dot{\mathbf{F}}(t) \mathbf{F}_t^{-1}(t) = \mathbf{L}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_t}{\partial \tau}(\tau) = \dot{\mathbf{F}}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) + \mathbf{F}_t^T(\tau) \dot{\mathbf{F}}_t(\tau) \implies \mathbf{A}_1 = \mathbf{L}^T + \mathbf{L} = 2\mathbf{D}$$

[Truesdell and Euvrard, 1974, Truesdell and Noll, 1965,
Rivlin and Ericksen, 1955]

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

On définit

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau)\tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t), \quad \tilde{\mathbf{F}}_t(t) =: \underline{\mathbf{L}}_n(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t)\tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t)$$

Remarquer que $\dot{\tilde{\mathbf{L}}}_n = \underline{\mathbf{L}}_{n+1} - \underline{\mathbf{L}}_n \underline{\mathbf{L}}$

En dérivant n fois $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}_t^T(\tau)\tilde{\mathbf{F}}_t(t)$ par rapport à τ , on trouve

$$\dot{\tilde{\mathbf{C}}}_t(\tau) = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_t^T(\tau)\tilde{\mathbf{F}}_t(t) + \tilde{\mathbf{F}}_t^T(\tau)\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_t(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \tilde{\mathbf{F}}_t^T(\tau) \tilde{\mathbf{F}}_t^{n-k}(t)$$

Alors

$$\mathbf{A}_n(t) := \dot{\tilde{\mathbf{C}}}_t(t) = \underline{\mathbf{L}}_n^T(t) + \underline{\mathbf{L}}_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \underline{\mathbf{L}}_k^T(t)\underline{\mathbf{L}}_{n-k}(t)$$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Calculons

$$\underline{\underline{A}}_2 = \underline{\underline{L}}_2 + \underline{\underline{L}}_2^T + 2\underline{\underline{L}}_2^T \underline{\underline{L}}_2$$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Calculons

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_2 &= \tilde{\mathbf{L}}_2 + \tilde{\mathbf{L}}_2^T + 2\tilde{\mathbf{L}}^T\tilde{\mathbf{L}} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{L}}} + \dot{\tilde{\mathbf{L}}}^T + \tilde{\mathbf{L}}^2 + \tilde{\mathbf{L}}^{T2} + 2\tilde{\mathbf{L}}^T\tilde{\mathbf{L}}\end{aligned}$$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Calculons

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_2 &= \underline{\underline{L}}_2 + \underline{\underline{L}}_2^T + 2\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \\ &= \underline{\underline{\dot{L}}} + \underline{\underline{\dot{L}}}^T + \underline{\underline{L}}^2 + \underline{\underline{L}}^{T2} + 2\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \\ &= \underline{\underline{\dot{L}}} + \underline{\underline{\dot{L}}}^T + (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) \\ &\quad - \underline{\underline{L}}\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \end{aligned}$$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Calculons

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_2 &= \underline{\underline{L}}_2 + \underline{\underline{L}}_2^T + 2\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \\ &= \underline{\underline{\dot{L}}} + \underline{\underline{\dot{L}}}^T + \underline{\underline{L}}^2 + \underline{\underline{L}}^{T2} + 2\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \\ &= \underline{\underline{\dot{L}}} + \underline{\underline{\dot{L}}}^T + (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) \\ &\quad - \underline{\underline{L}}\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \end{aligned}$$

Or $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$ et $\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T = 2\underline{\underline{D}}$

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Calculons

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_2 &= \tilde{\mathbf{L}}_2 + \tilde{\mathbf{L}}_2^T + 2\tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{L}}} + \dot{\tilde{\mathbf{L}}}^T + \tilde{\mathbf{L}}^2 + \tilde{\mathbf{L}}^{T2} + 2\tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{L}}} + \dot{\tilde{\mathbf{L}}}^T + (\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T)(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^T + \tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}}\end{aligned}$$

Or $\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}}$ et $\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T = 2\tilde{\mathbf{D}}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_2 &= 2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 4\tilde{\mathbf{D}}^2 - (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}})(\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}}) + (\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}})(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}}) \\ &= 2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 4\tilde{\mathbf{D}}^2 + 2\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{W}} - 2\tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

Remarquer la présence de l'accélération de déformation $\dot{\tilde{\mathbf{D}}}$.

Tenseurs de Rivlin-Ericksen

Calculons

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_2 &= \tilde{\mathbf{L}}_2 + \tilde{\mathbf{L}}_2^T + 2\tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{L}}} + \dot{\tilde{\mathbf{L}}}^T + \tilde{\mathbf{L}}^2 + \tilde{\mathbf{L}}^{T2} + 2\tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{L}}} + \dot{\tilde{\mathbf{L}}}^T + (\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T)(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^T + \tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}}\end{aligned}$$

Or $\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}}$ et $\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T = 2\tilde{\mathbf{D}}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_2 &= 2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 4\tilde{\mathbf{D}}^2 - (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}})(\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}}) + (\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}})(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}}) \\ &= 2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 4\tilde{\mathbf{D}}^2 + 2\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{W}} - 2\tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{D}}\end{aligned}$$

Remarquer la présence de l'accélération de déformation $\dot{\tilde{\mathbf{D}}}$. On dispose en outre d'une formule de récurrence pour calculer les dérivées temporelles d'ordre supérieur :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} = \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_n + \tilde{\mathbf{A}}_n \cdot \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}_n$$

On la vérifie pour $n = 2$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = 2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 2\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}} + 2\tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{D}} = 2\dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 2\tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}}) + 2(\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{W}})\tilde{\mathbf{D}}$$

Fluides de Rivlin-Ericksen

La loi de comportement des fluides viscoélastiques de complexité n , dits de Rivlin-Ericksen est de la forme générale

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{A}}_1(t), \underline{\mathbf{A}}_2(t), \dots, \underline{\mathbf{A}}_n(t); \rho(t))$$

où \mathcal{F} est une fonction (non plus une fonctionnelle) isotrope par rapport à ses arguments, en vertu de l'exigence de tensorialité de la relation.

[Truesdell and Euvrard, 1974]

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ **Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides**
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta \dot{\epsilon} = \tau_{\eta} \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \longrightarrow$$

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta \dot{\epsilon} = \tau_{\eta} \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\dot{\epsilon} \longrightarrow$$

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta \dot{\epsilon} = \tau_{\eta} \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\dot{\epsilon} \longrightarrow \underline{\underline{D}}$$

$$\dot{\sigma} \longrightarrow$$

Modèle rhéologique de Maxwell

Un exemple : la **viscoélasticité** (modèle de Maxwell)



$$\eta \dot{\epsilon} = \tau_{\eta} \dot{\sigma} + \sigma$$

On généralise en grandes déformations :

$$\sigma \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\dot{\epsilon} \longrightarrow \underline{\underline{D}}$$

$$\dot{\sigma} \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{conv} = \frac{D \underline{\underline{\sigma}}}{Dt}$$

Fluides à taux

La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes dépend de la variance des contraintes considérée, ici σ^{ij} .

Fluides à taux

La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes dépend de la variance des contraintes considérée, ici σ^{ij} .

Elle est obtenue par dérivation temporelle des contraintes transportées dans la configuration de référence :

$$\frac{D\tilde{\sigma}}{Dt} = \tilde{\mathbf{F}} \frac{d}{dt} \left(\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \tilde{\sigma} \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \right) \tilde{\mathbf{F}}^T = \dot{\tilde{\sigma}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{L}}^T$$

dite dérivée convective d'Oldroyd ou de Lie.

Fluides à taux

La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes dépend de la variance des contraintes considérée, ici σ^{ij} .

Elle est obtenue par dérivation temporelle des contraintes transportées dans la configuration de référence :

$$\frac{D\underset{\sim}{\sigma}}{Dt} = \underset{\sim}{\mathbf{F}} \frac{d}{dt} \left(\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1} \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-T} \right) \underset{\sim}{\mathbf{F}}^T = \underset{\sim}{\dot{\sigma}} - \underset{\sim}{\mathbf{L}} \underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{\mathbf{L}}^T$$

dite dérivée convective d'Oldroyd ou de Lie.

Les lois de comportement de type taux mettent en jeu simultanément les taux de déformation et de contraintes sous la forme :

$$\mathcal{F}(\underset{\sim}{\sigma}(t), \frac{D\underset{\sim}{\sigma}}{Dt}(t), \dots, \frac{D^p \underset{\sim}{\sigma}}{Dt^p}(t), \underset{\sim}{\mathbf{A}}_1(t), \dots, \underset{\sim}{\mathbf{A}}_n(t); \rho(t)) = 0$$

Un modèle de Maxwell en transformations finies

En guise d'exemple, on considère la loi de comportement particulière avec $p = n = 1$ de la forme

$$\tau_\eta \frac{D\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta \tilde{\mathbf{g}}^{-1} D\tilde{\mathbf{g}}^{-1}$$

où τ_η (s, temps de relaxation) et η (Pa.s, viscosité) sont des propriétés du matériau.

Cette loi représente une généralisation tridimensionnelle en grandes déformations du modèle de Maxwell.

Un modèle de Maxwell en transformations finies

En guise d'exemple, on considère la loi de comportement particulière avec $\rho = n = 1$ de la forme

$$\tau_\eta \frac{D\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{Dt} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta \tilde{\mathbf{g}}^{-1} D\tilde{\mathbf{g}}^{-1}$$

où τ_η (s, temps de relaxation) et η (Pa.s, viscosité) sont des propriétés du matériau.

Cette loi représente une généralisation tridimensionnelle en grandes déformations du modèle de Maxwell.

La solution de l'équation différentielle est

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \frac{\eta}{\tau_\eta^2} \int_{-\infty}^t (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_t^{-1}(\tau) - \tilde{\mathbf{g}}^{-1}) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta}\right) d\tau$$

cf. [Mandel, 1974] p. 190 et [Agassant et al., 2014].

C'est la forme héréditaire explicite de la loi de comportement.

Ce calcul illustre une équivalence possible entre les formes intégrale et différentielle de la loi de comportement.

Un modèle de Maxwell en transformations finies

Preuve du résultat précédent :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \frac{\eta}{\tau_\eta^2} \underline{\underline{J}} - \frac{\eta}{\tau_\eta} \underline{\underline{g}}^{-1} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{J}} = \int_{-\infty}^t \underline{\underline{C}}_t^{-1}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta}\right) d\tau$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t) &= \frac{\eta}{\tau_\eta^2} \left(\underline{\underline{g}}^{-1} + \int_{-\infty}^t \dot{\underline{\underline{F}}}(t) \underline{\underline{F}}^{-1}(\tau) \underline{\underline{g}}_\tau^{-1} \underline{\underline{F}}^{-T}(\tau) \underline{\underline{F}}^T(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta}\right) d\tau \right. \\ &+ \int_{-\infty}^t \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{F}}^{-1}(\tau) \underline{\underline{g}}_\tau^{-1} \underline{\underline{F}}^{-T}(\tau) \dot{\underline{\underline{F}}}^T(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta}\right) d\tau \\ &- \left. \frac{1}{\tau_\eta} \int_{-\infty}^t \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{F}}^{-1}(\tau) \underline{\underline{g}}_\tau^{-1} \underline{\underline{F}}^{-T}(\tau) \underline{\underline{F}}^T(t) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_\eta}\right) d\tau \right) \\ &= \frac{\eta}{\tau_\eta^2} \left(\underline{\underline{g}}^{-1} + \underline{\underline{L}} \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{J}} \underline{\underline{L}}^T - \frac{1}{\tau_\eta} \underline{\underline{J}} \right) \\ &= \frac{\eta}{\tau_\eta^2} \underline{\underline{g}}^{-1} + \underline{\underline{L}} \left(\underline{\underline{\sigma}} + \frac{2\eta}{\tau_\eta} \underline{\underline{g}}^{-1} \right) + \left(\underline{\underline{\sigma}} + \frac{2\eta}{\tau_\eta} \underline{\underline{g}}^{-1} \right) \underline{\underline{L}}^T - \frac{1}{\tau_\eta} \left(\underline{\underline{\sigma}} + \frac{2\eta}{\tau_\eta} \underline{\underline{g}}^{-1} \right) \\ &= \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{L}}^T + \frac{2\eta}{\tau_\eta} \underline{\underline{g}}^{-1} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{g}}^{-1} - \frac{1}{\tau_\eta} \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ **Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides**
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

Fluides de Navier–Stokes

- Fluides différentiels d'ordre 1, dits de Reiner-Rivlin

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha_0 \underline{\underline{1}} + \alpha_1 \underline{\underline{D}} + \alpha_2 \underline{\underline{D}}^2$$

où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underline{\underline{D}}$ et de ρ .

Fluides de Navier–Stokes

- Fluides différentiels d'ordre 1, dits de Reiner-Rivlin

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha_0 \underline{\underline{1}} + \alpha_1 \underline{\underline{D}} + \alpha_2 \underline{\underline{D}}^2$$

où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underline{\underline{D}}$ et de ρ .

- Linéarisation par rapport à $\underline{\underline{D}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p(\rho) \underline{\underline{1}} + \lambda(\text{trace } \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

C'est la loi des **fluides de Navier–Stokes**, dits aussi **fluides newtoniens** compressibles. Les paramètres λ et μ caractérisent la viscosité du fluide et la fonction $p(\rho)$ son élasticité.

Fluides de Navier–Stokes

- Fluides différentiels d'ordre 1, dits de Reiner-Rivlin

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha_0 \underline{\underline{1}} + \alpha_1 \underline{\underline{D}} + \alpha_2 \underline{\underline{D}}^2$$

où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underline{\underline{D}}$ et de ρ .

- Linéarisation par rapport à $\underline{\underline{D}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p(\rho) \underline{\underline{1}} + \lambda(\text{trace } \underline{\underline{D}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

C'est la loi des **fluides de Navier–Stokes**, dits aussi **fluides newtoniens** compressibles. Les paramètres λ et μ caractérisent la viscosité du fluide et la fonction $p(\rho)$ son élasticité.

Dans le cas incompressible, la pression p est une réaction.

Lorsque la compressibilité de viscosité $\lambda + 2\mu/3$ est négligée, on parle d'un **fluide de Stokes** :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{D}}^{\text{dev}}$$

Plan

- ① Structure des espaces physique et matériel
- ② Les arguments de la loi de comportement
 - *Material frame indifference*, une propriété colatérale
- ③ Hyperélasticité anisotrope : loi de Doyle-Ericksen
- ④ Viscoélasticité héréditaire : cas des fluides
 - Fluides différentiels d'ordre n
 - Modèle de Maxwell en grandes déformations
 - Fluides de Reiner–Rivlin
- ⑤ Elastoplasticité : venez impérativement à Mecamat Aussois 2023!

-  Agassant, J. F., Avenas, P., Sergent, J. P., Vergnes, B., and Vincent, M. (2014).
Mise en forme des polymères.
Lavoisier, France.
-  Allais, M. (1997).
L'anisotropie de l'espace.
Clement–Juglar, France.
-  Allais, M. (2000).
L'origine des régularités constatées dans les observations interférométriques de Dayton C. Miller 1925-1926 : variations de température ou anisotropie de l'espace.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics, 1:1205 – 1210.
-  Boehler, J. P. (1979).
A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy.
ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 59:157–167.
-  Boehler, J. P. (1987).
Applications of tensor functions in solid mechanics.
CISM Courses and Lectures No. 292, Udine, Springer Verlag, Wien.
-  Doyle, T. and Ericksen, J. (1956).
Nonlinear elasticity.
Advances in Applied Mechanics, 4:53 – 115.



Lu, J. and Papadopoulos, P. (2000).

A covariant constitutive description of anisotropic non-linear elasticity.
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 51:204–217.



Mandel, J. (1974).

Introduction à la mécanique des milieux continus déformables.
Académie Polonaise des Sciences, Warszawa.



Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R. (1994).

Mathematical Foundations of Elasticity.
Dover Publications, Inc., New York.



Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973).

Gravitation.

W. H. Freeman.



Rivlin, R. S. and Ericksen, J. L. (1955).

Stress-deformation relations for isotropic materials.
Arch. Rational Mech. and Anal., 4:323–425.



Stumpf, H. and Hoppe, U. (1997).

The application of tensor algebra on manifolds to nonlinear continuum mechanics.

ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 77:327–339.



Truesdell, C. and Euvrard, D. (1974).

Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus.

Masson, Paris.



Truesdell, C. and Noll, W. (1965).

The non-linear field theories of mechanics.

Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, reedition Springer Verlag 2004.



Weinberg, S. (1972).

Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity.

John Wiley.



Zheng, Q. (1994).

Theory of representations for tensor functions—A unified invariant approach to constitutive equations.

Applied Mechanics Review, 47:545–587.