

## Bilan de puissance et espace-temps

*Emmanuelle Rouhaud, IRCAM & UTT*

*Anis Bousclet UTT*

Benoît Panicaud, UTT

Jacky Cresson, U. Pau

Richard Kerner, SU

**Réunion du GDR GDM**

ENS Paris Saclay, jeudi 24 novembre 2022



## Centre Paul-Langevin

Le village de vacances situé à Aussois, petit village savoyard exposé plein sud aux portes du Parc National de la Vanoise à 1500 m d'altitude, est composé du centre Paul-Langevin. Un site idéal pour vivre des vacances familiales entre détente, loisirs, sports, mais aussi découverte, gastronomie, patrimoine...

# Mecamat Aussois janvier 2023

## Les grandes transformations : aujourd'hui et ... demain ?

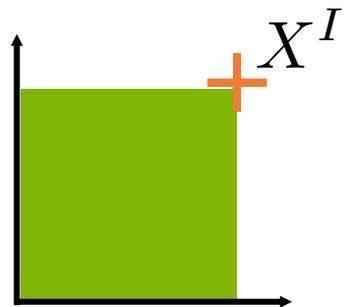
### Venez nombreux !

- Modélisation des effets élastiques dans la matière :
  - Energie potentielle élastique qui dépend de la déformation



- Comment prendre en compte ces phénomènes avec une approche espace-temps ?

(Souriau, Synge, Eringen, Cattaneo, Carter, Choquet-Bruhat, Lamoureux-Brousse)



Configuration matérielle

$\rho_0$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Tenseur des déformations de Lagrange

$\mathbf{S}$

Second tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff (PK2)

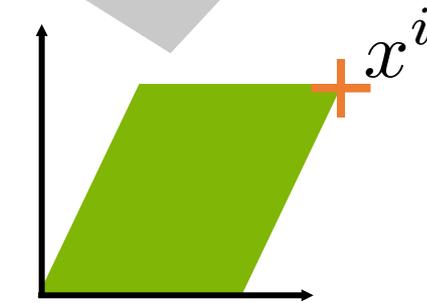
Transformation :

$$x^i(X^J, t)$$

Application tangente  $F$  :

$$F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}$$

Masse volumique



Configuration actuelle

$\rho$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})$$

Tenseur des déformations d'Euler

$\boldsymbol{\sigma}$

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Modélisation des effets élastiques dans la matière
- Bilan de puissance pour les transformations réversibles adiabatiques:

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \rho \dot{\psi} = 0$$

$\boldsymbol{\sigma}$  : tenseur des contraintes de Cauchy,

$\boldsymbol{d}$  : taux de déformations,

$\rho$  : masse volumique,

$\psi(E)$  : énergie potentielle élastique dépend de la déformation.

- Est-il possible de généraliser ces notions pour la relativité ?
  - Définition d'un tenseur des déformations espace-temps
  - Construction d'un bilan de puissance espace-temps

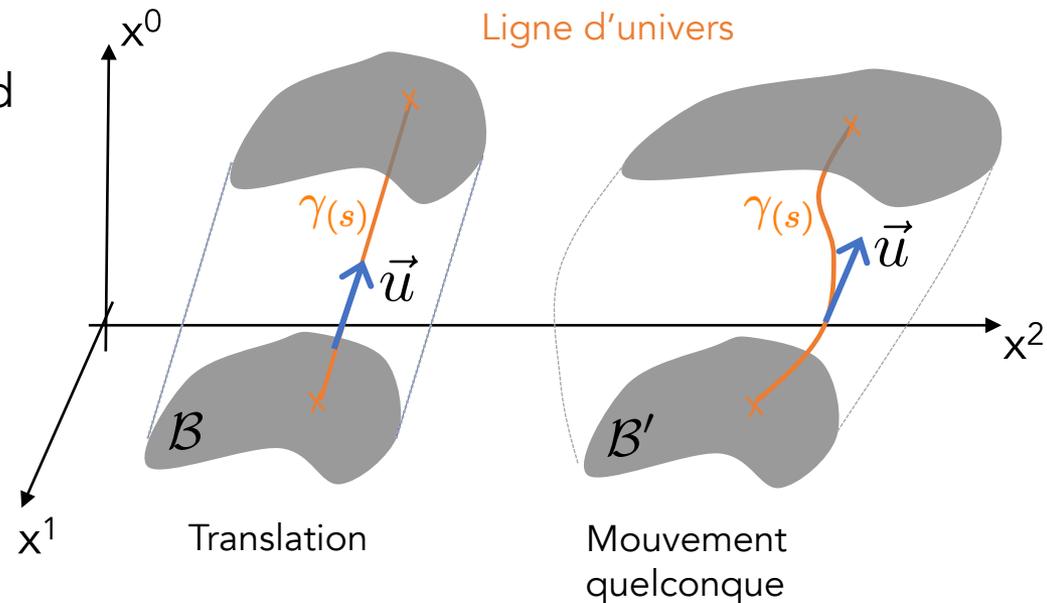
- **Aspects géométriques**
- Tenseur des déformations
- Construction d'un bilan de puissance :  
définition du tenseur moment-énergie
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

- Variété différentiable 4D riemannienne  $\mathcal{M}$   
tenseur métrique  $\mathbf{g}$  de signature  $(1,-1,-1,-1)$
  - Un événement  $P$  : un point de  $\mathcal{M}$
  - Un système de coordonnées défini pour un voisinage autour de  $P$  :  
 $\{x^\mu\}, \mu = 0, 1, 2, 3$
  - **Observateur** : vecteurs de base dans l'espace tangent en  $P$  :  $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
  - **Changement d'observateurs** = transformation :  $e_\mu = \left( \frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\kappa}$
- où la matrice  $\left( \frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu} \right)$  appartient au groupe  $GL(4, \mathbb{R})$
- $\mathcal{M} \times GL(4, \mathbb{R})$  fibré principal sur  $\mathcal{M}$

**Covariance = invariance par changement d'observateurs  
= invariance par changement de coordonnées 4D**

- Ligne d'univers  $\gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$
- Quadri-vitesse  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  vecteur unitaire sans dimension
- Un corps  $\mathcal{B}$  est un volume, sous espace 3D, de  $\mathcal{M}$

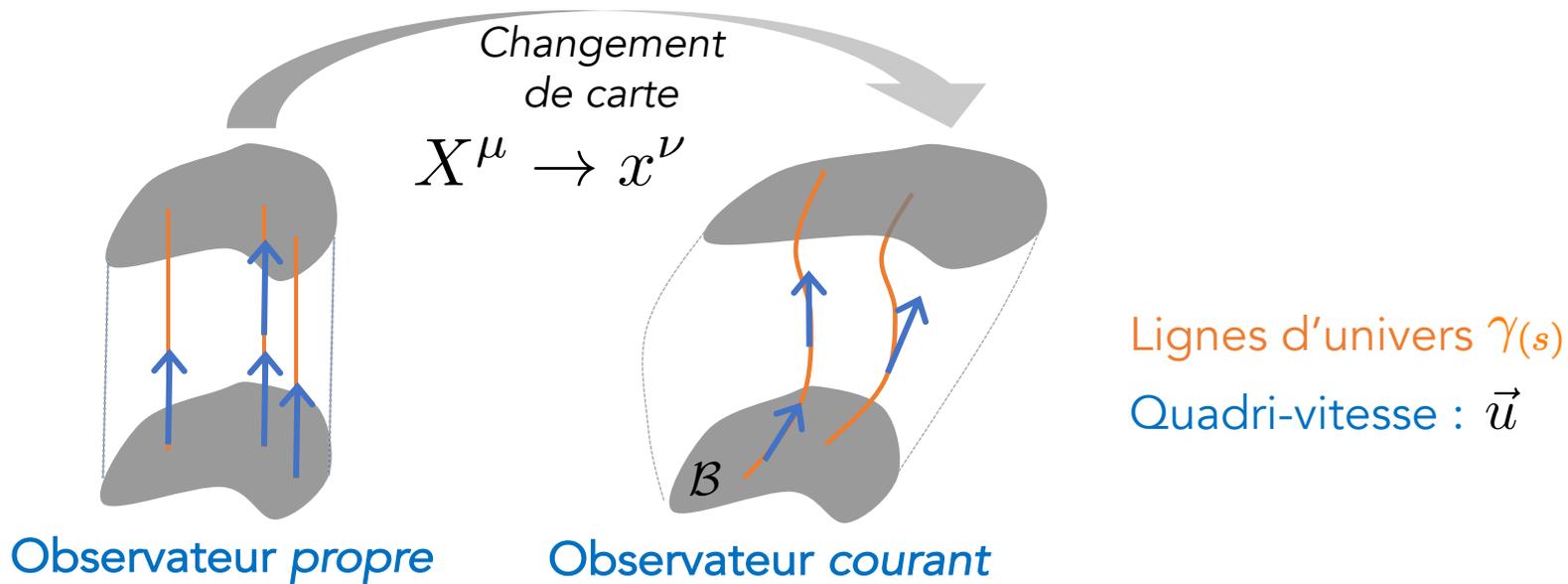
- Le *mouvement* de  $\mathcal{B}$  correspond à l'ensemble des lignes d'univers qui intersectent  $\mathcal{B}$
- Un mouvement est donc un tube d'univers = congruence des lignes d'univers qui passent par  $\mathcal{B}$



- Observateur *propre*  $X^\mu$  tel que

$$\hat{u}^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en tout point}$$

- Cet observateur existe :  
Théorème du redressement d'un champ de vecteurs



- La quadri-vitesse est un vecteur unitaire en direction du temps

- Changement de cartes entre l'observateur propre et l'observateur courant :

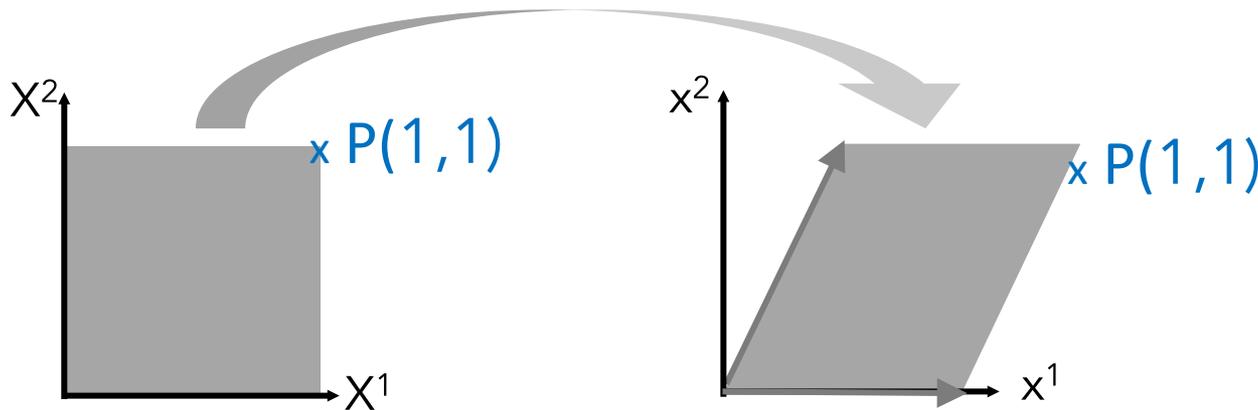
$$X^\mu \rightarrow x^\nu$$

Matrice de passage :  $F^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}$

et son inverse  $F'$

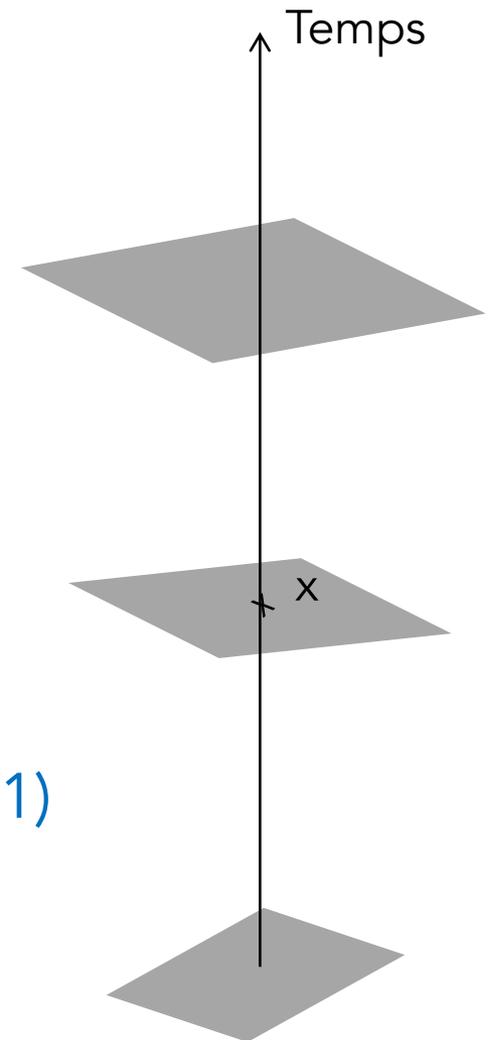
- Exemple avec un glissement :

$$X^\mu \rightarrow x^\nu$$



Observateur propre

Observateur courant



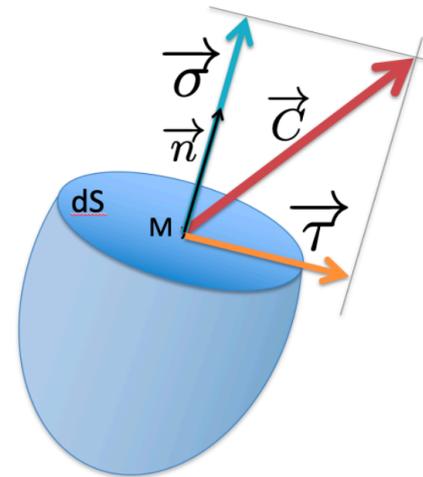
**Rappel** : Décomposition du vecteur contrainte  $\vec{C}$  en mécanique des milieux continus classique :

$$\vec{C} = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

avec la contrainte normale :  $\sigma = \vec{C} \cdot \vec{n}$   
 et tangentielle :  $\vec{\tau} = \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{n}) \vec{n}$

On a aussi :  $\vec{C} = \mathbb{I} \vec{C}$  et :

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \mathbb{I} \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ &= \vec{C} (\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \end{aligned}$$



On définit les projecteurs :  $\vec{n}$  et  $(\mathbb{I} - \vec{n} \otimes \vec{n})$

**Objectif** : Décomposer les différents phénomènes sur le temps et l'espace

- Projection sur le temps :  $\vec{u}$
- Projection sur l'espace :  $(\mathbf{g}^{-1} - \vec{u} \otimes \vec{u})$
- Application à un vecteur :

composante temporelle  $C_t$ , composante spatiale  $\vec{C}$

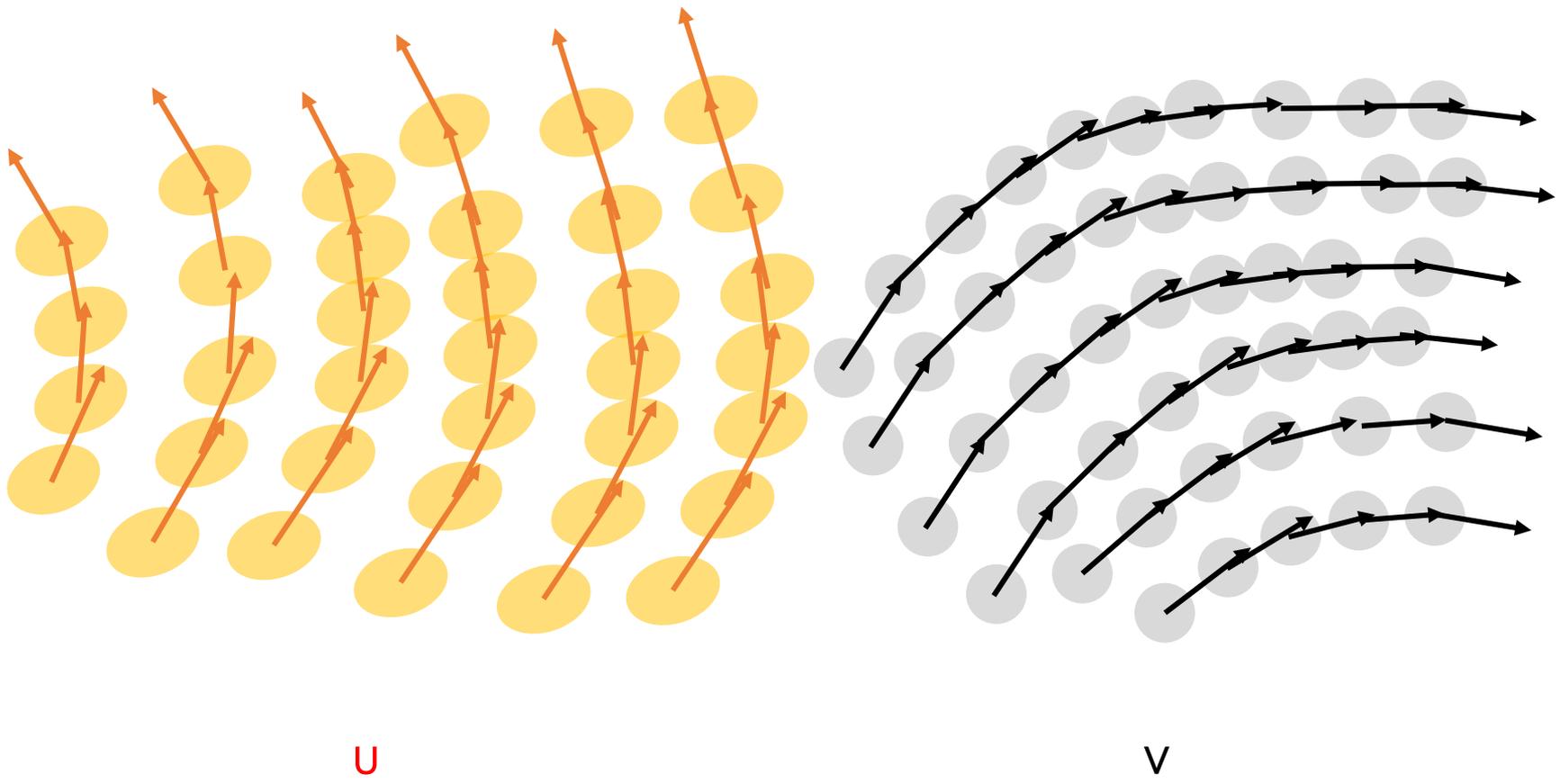
$$\vec{C} = C_t \vec{u} + \underline{\vec{C}} \quad \text{avec} \quad C_t = \vec{C} \cdot \vec{u}$$

$$\underline{\vec{C}} = C^b (\mathbf{g}^{-1} - \vec{u} \otimes \vec{u}) \quad \text{ou} \quad \underline{C}^\mu = C_\nu (\mathbf{g}^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)$$

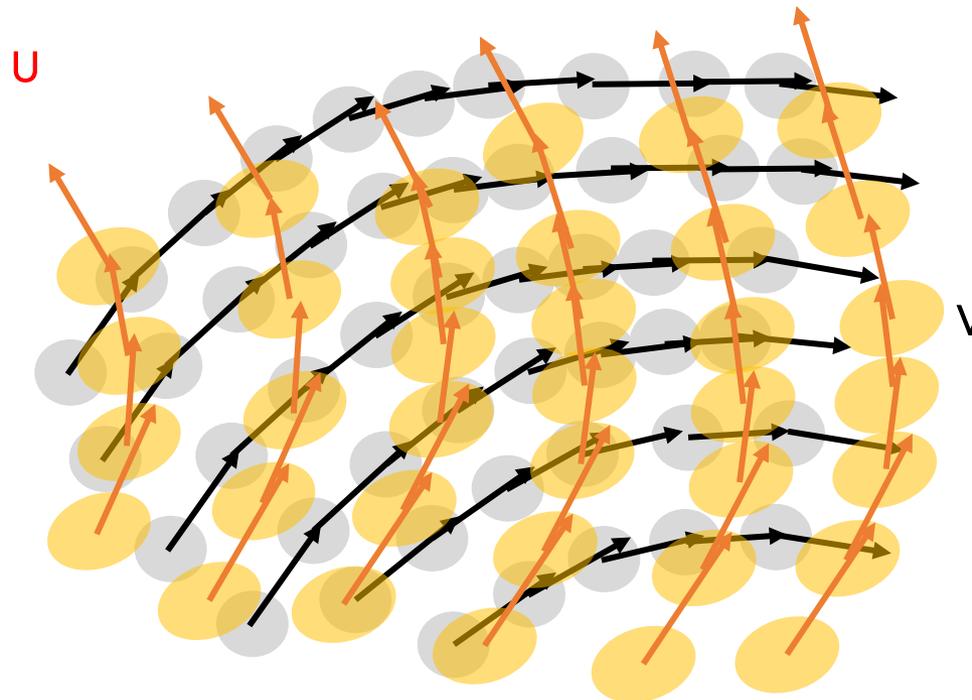
- Application à un tenseur  $T$  d'ordre deux :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \underline{\vec{T}} + \underline{\vec{T}} \otimes \vec{u} + \underline{\underline{T}}$$

Deux champs de vecteurs



Deux champs de vecteurs définis sur le même volume :



La dérivée de Lie de  $\mathbf{V}$  dans le champ  $\mathbf{U}$  :  $\mathcal{L}_U(\mathbf{V})$  = Dérivée convective

Exprime la variation de  $\mathbf{V}$  vue par  $\mathbf{U}$  et  $\mathcal{L}_U(V)^i = U^k \partial_k V^i - V^k \partial_k U^i$

On peut définir la dérivée de Lie d'autres quantités.

Soit la dérivée de Lie dans le champ de quadri-vitesse  $u$ .  
On a alors :

$$\mathcal{L}_u(f) = u^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \quad \text{Fonction}$$

$$\mathcal{L}_u(a) = u^\lambda \frac{\partial a}{\partial x^\lambda} + a \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\lambda} \quad \text{Densité scalaire}$$

$$\mathcal{L}_u(V)^\mu = u^\lambda \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} - V^\lambda \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} \quad \text{Vecteur}$$

$$\mathcal{L}_u(b)_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial b_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + b_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + b_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu} \quad \text{Tenseur covariant}$$

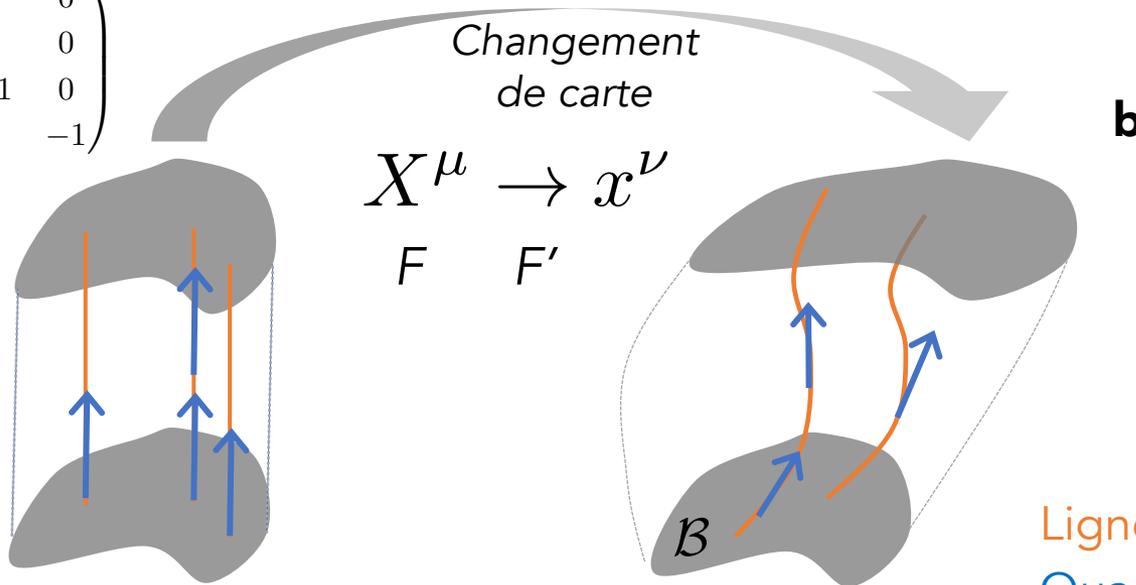
- Taux de déformations  $d$  :

$$\mathcal{L}_u g_{\mu\nu} = \nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu = 2d_{\mu\nu} \quad d = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u(g)$$

- Aspects géométriques
- **Tenseur des déformations**
- Construction d'un bilan de puissance :  
définition du tenseur moment-énergie
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

- Tenseur des déformations covariant

$$\hat{\delta}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Observateur *propre*

Observateur *courant*

Lignes d'univers  $\gamma(s)$   
 Quadri-vitesse :  $\vec{u}$

- Tenseur des déformations covariant

- Tenseur dont les composantes dans le système de coordonnées propre sont :

$$\hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Tenseur des dilatations  $\mathbf{b}$  tel que :  $b_{\mu\nu} = F'^{\lambda}_{\mu} F'^{\kappa}_{\nu} \hat{b}_{\lambda\kappa}$

Changement de carte du système propre au courant

- Tenseur des déformations  $\mathbf{e}$  tel que :  $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b})$

- Tenseur dont les composantes dans le système de coordonnées propre sont :

$$\hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- On a :  $\mathcal{L}_u \mathbf{b} = 0$  car  $\mathcal{L}_{\hat{u}}(\hat{b})^{\mu\nu} = 0$

- Et donc :  $\mathcal{L}_u \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_u \mathbf{g} - \mathcal{L}_u \mathbf{b}) = \mathbf{d}$

- Les tenseurs sont  $4 \times 4$
- Les tenseurs sont définis localement
- Définitions utilisables en relativité générale
- Lien avec le taux de déformation *via* la dérivé de Lie

- Aspects géométriques
- Tenseur des déformations
- **Construction d'un bilan de puissance :  
définition du tenseur moment-énergie**
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

- Densité d'énergie

$$E(\mathcal{A}) = \int_{\Omega} \mathcal{A}(x) d\Omega$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{g} A$$

$$g = -|\mathbf{g}|$$

avec  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathcal{G}} + \mathcal{A}^{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R(\mathbf{g})) + \mathcal{A}^{\mathcal{M}}(\mathbf{g}, \mathbf{a}_i)$$

$$R = \mathbf{R} : \mathbf{g}^{-1}$$

R : courbure scalaire  
**R** : tenseur de courbure de Ricci

Géom.

$$\mathcal{L}_u \mathbf{a}_i = 0$$

Matériau

- Densité d'énergie  $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R(\mathbf{g})) + \mathcal{A}^M(\mathbf{g}, \mathbf{a}_i)$
- Calcul de :  $\mathcal{L}_u(\mathcal{A})$

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = \frac{\partial(\mathcal{A}^g + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} + \frac{\partial \mathcal{A}^g}{\partial \mathbf{R}} : \mathcal{L}_u \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = \frac{\partial(\mathcal{A}^g + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : 2\mathbf{d} + \frac{\partial \mathcal{A}^g}{\partial \mathbf{R}} : \mathcal{L}_u \mathbf{R}$$

Puissance

- On a :  $\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = \frac{\partial(\mathcal{A}^G + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} + \frac{\partial \mathcal{A}^G}{\partial \mathbf{R}} : \mathcal{L}_u \mathbf{R}$

- On peut montrer que :

$$\frac{\partial \mathcal{A}^G}{\partial \mathbf{R}} : \mathcal{L}_u \mathbf{R} = \text{Div} V$$

Avec l'identité de Palatini

et à conditions que  $\nabla \mathbf{g} = 0$

- Nous proposons d'écrire le bilan de puissance :

$$\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = \text{Div} V$$

- Ce qui revient à :

$$\frac{\partial(\mathcal{A}^G + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} = 0$$

$$\frac{\partial(\mathcal{A}^G + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{A}^G}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$$

- On définit le tenseur énergie-impulsion (généralisation 4D du tenseur des contraintes):

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \mathbf{g}}$$

- Pourquoi le 2 ? :  $\mathcal{A}^g = \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R)$   

$$-\frac{\sqrt{g}}{\kappa} R^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R) g^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$$

- On a les équations :

$$T = 2 \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial g} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \nabla T = 0 \\ \nabla g = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}^M = (g, a_i) \\ \mathcal{L}_u a_i = 0 \end{array}$$

$$\sqrt{g} \left( R - \frac{1}{2} Rg + \Lambda g \right) = \kappa T$$

- Le bilan de puissance :

$$\mathcal{L}_u (\mathcal{A}) = \text{Div} V$$

- Aspects géométriques
- Tenseur des déformations
- Construction d'un bilan de puissance :  
définition du tenseur moment-énergie
- **Hyper-élasticité anisotrope covariante**
- Conclusion

- Composante matière de la densité d'énergie :

$$\mathcal{A}^M = (\mathbf{g}, \mathbf{a}_i) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_u \mathbf{a}_i = 0$$

- On choisit pour un matériau hyper-élastique :

$$\mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b}) = \tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g} W(\mathbf{g}, \mathbf{b})$$

$\tilde{\rho}_c$  densité de masse

$W$  énergie potentielle élastique

on a bien :  $\mathcal{L}_u \mathbf{b} = 0 \quad \mathcal{L}_u(\tilde{\rho}_c) = 0$

- Tenseur énergie moment :  $\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \mathbf{g}}$

- Projection sur le temps et l'espace du tenseur énergie moment :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$$

Dans le système propre de coordonnées avec  $\hat{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , on a

$$\hat{T}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \hat{q}^2 & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \hat{q}^3 & \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet d'interpréter physiquement chaque composante :

- $\mathcal{U}$  densité d'énergie totale :  $\mathcal{U} = \rho_c c^2 = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{e_{int}}{c^2}\right)$   
où  $\rho_c$  masse volumique et  $\tilde{\rho}_c$  masse volumique au repos.
- $\vec{\hat{q}}$  flux d'énergie  $\approx$  flux de chaleur
- $\overline{\hat{\mathbf{T}}} = \boldsymbol{\sigma}$  tenseur des contraintes
- Chaque colonne du tenseur peut être considérée comme un flux d'énergie au travers d'un des éléments de volume 3D, "surfaces" de l'hypervolume.

- Projection sur le temps et l'espace du tenseur énergie moment :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{q} + \vec{q} \otimes \vec{u} + \overline{\mathbf{T}}$$

Dans le système propre de coordonnées avec  $\hat{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , on a

$$\hat{T}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \hat{q}^2 & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \hat{q}^3 & \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

Ce qui permet d'interpréter physiquement chaque composante :

- $\mathcal{U}$  densité d'énergie totale :  $\mathcal{U} = \rho_c c^2 = \tilde{\rho}_c c^2 \left(1 + \frac{e_{int}}{c^2}\right)$   
où  $\rho_c$  masse volumique et  $\tilde{\rho}_c$  masse volumique au repos.

- $\vec{\hat{q}}$  flux d'énergie  $\approx$  flux de chaleur 

- $\overline{\hat{\mathbf{T}}} = \boldsymbol{\sigma}$  tenseur des contraintes

- Chaque colonne du tenseur peut être considérée comme un flux d'énergie au travers d'un des éléments de volume 3D, "surfaces" de l'hypervolume.

- Composante matière de la densité d'énergie :

$$\mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b}) = \tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g} W(\mathbf{g}, \mathbf{b})$$

- Tenseur énergie-moment :  $\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \mathbf{g}}$

- Projection du tenseur énergie moment :

$$T^{\mu\nu} u_\mu = 2\sqrt{g} \frac{\partial W}{\partial g_{\mu\nu}} u_\mu + (\tilde{\rho}_c c^2 + W) u^\nu$$

$$T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 2\sqrt{g} \frac{\partial W}{\partial g_{\mu\nu}} u_\mu u_\nu + (\tilde{\rho}_c c^2 + W)$$

- On impose (non dissipation) :  $\frac{\partial W}{\partial g_{\mu\nu}} u_\mu = 0$

- Densité d'énergie :  $\mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b}) = \tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g}W(\mathbf{g}, \mathbf{b})$

tel que, pour un mouvement inertiel :  $W(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = 0$



$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial g_{\mu\nu}} = 2\sqrt{g} \frac{\partial W}{\partial g_{\mu\nu}} + (\tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g}W)g^{\mu\nu}$$

$$T_0^{\mu\nu} = \tilde{\rho}_c c^2 g^{\mu\nu}$$

- Choix spécifique pour l'énergie W:  $W(\mathbf{g}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{C}}{2} : (\mathbf{g} - \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{g} - \mathbf{b})$

$$T^{\mu\nu} = (\tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g}W) g^{\mu\nu} + 2\mathbf{C}^{\alpha\beta\mu\nu} (g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$$

Une relation covariante, le matériaux peut être anisotrope

- Tenseur des déformations
- Construction d'un bilan de puissance :  
définition du tenseur moment-énergie
- Hyper-élasticité anisotrope covariante



## Centre Paul-Langevin

Le village de vacances situé à Aussois, petit village savoyard exposé plein sud aux portes du Parc National de la Vanoise à 1500 m d'altitude, est composé du centre Paul-Langevin. Un site idéal pour vivre des vacances familiales entre détente, loisirs, sports, mais aussi découverte, gastronomie, patrimoine...

# Mecamat Aussois janvier 2023

## Les grandes transformations : aujourd'hui et ... demain ?

### Venez nombreux !

- Modélisation des effets élastiques dans la matière
- Bilan de puissance pour les transformations réversibles adiabatiques:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} = 0$$

$\boldsymbol{\sigma}$  : tenseur des contraintes de Cauchy,

$\mathbf{d}$  : taux de déformations,

$\rho$  : masse volumique,

$\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$  : énergie potentielle élastique dépend de la déformation.

- Si HPP avec  $\rho \approx cte$  et  $\mathbf{d} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\sigma : d - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0 \quad \psi(e)$$

Définition de la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_u(T)_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + T_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + T_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu} \quad \mathcal{L}_u(a) = \frac{da}{dt}$$

Dérivée de Lie de e  $\mathcal{L}_v(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$

$$\sigma : d - \rho \mathcal{L}(\psi) = 0 \quad \sigma : d - \rho \frac{\partial \psi}{\partial e} : d = 0$$

## Espace-temps

Tenseur énergie-moment symétrique  $\mathbf{T}$  et :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \mathbf{T}_\sigma$$

(sans thermique). avec  $\mathcal{U} = \rho c^2 + \rho \psi$

Exemple 2D + temps :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{U}u^1 & \mathcal{U}u^2 \\ \mathcal{U}u^1 & \mathcal{U}(u^1)^2 & \mathcal{U}u^1u^2 \\ \mathcal{U}u^2 & \mathcal{U}u^1u^2 & \mathcal{U}(u^2)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^{11} & -\sigma^{12} \\ 0 & -\sigma^{12} & -\sigma^{22} \end{pmatrix}$$

avec  $\vec{u} \begin{pmatrix} u^0 = 1 \\ u^i = \frac{v^i}{c} \end{pmatrix}$

Conservation :  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$

Projection sur le temps :

$$\sigma : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} = 0 \quad \leftarrow \quad \vec{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

PFD :

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \vec{a} \quad \leftarrow \quad \partial_{x^0} (\mathcal{U}u^i) + \partial_{x^j} (\mathcal{U}u^i u^j) - \partial_{x^j} \sigma^{ij} = 0$$

## Classique

Masse volumique :  $\rho$

Densité spécifique  
d'énergie :  $\psi$

Taux de déformation :  $\mathbf{d}$

Accélération :  $\vec{a}$

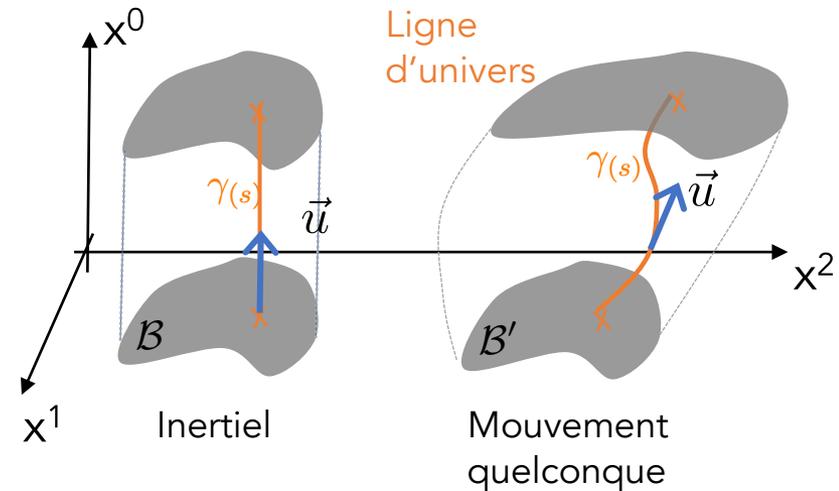
Tenseur des contraintes  
de Cauchy :  $\sigma$

Conservation énergie  
(sans thermique) :

- Pour un mouvement inertiel

L'observateur *propre* est inertiel

$$u_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en tout point du mouvement}$$

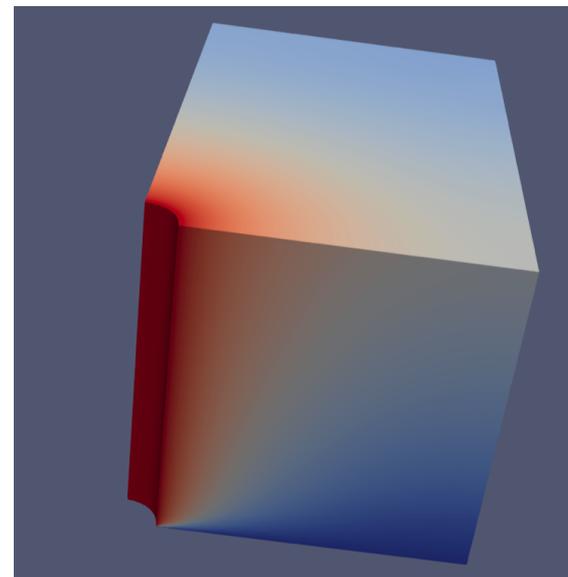
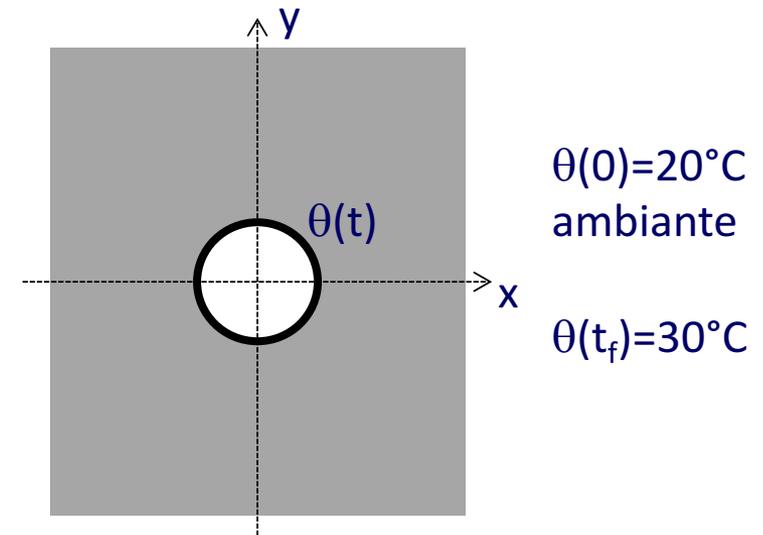
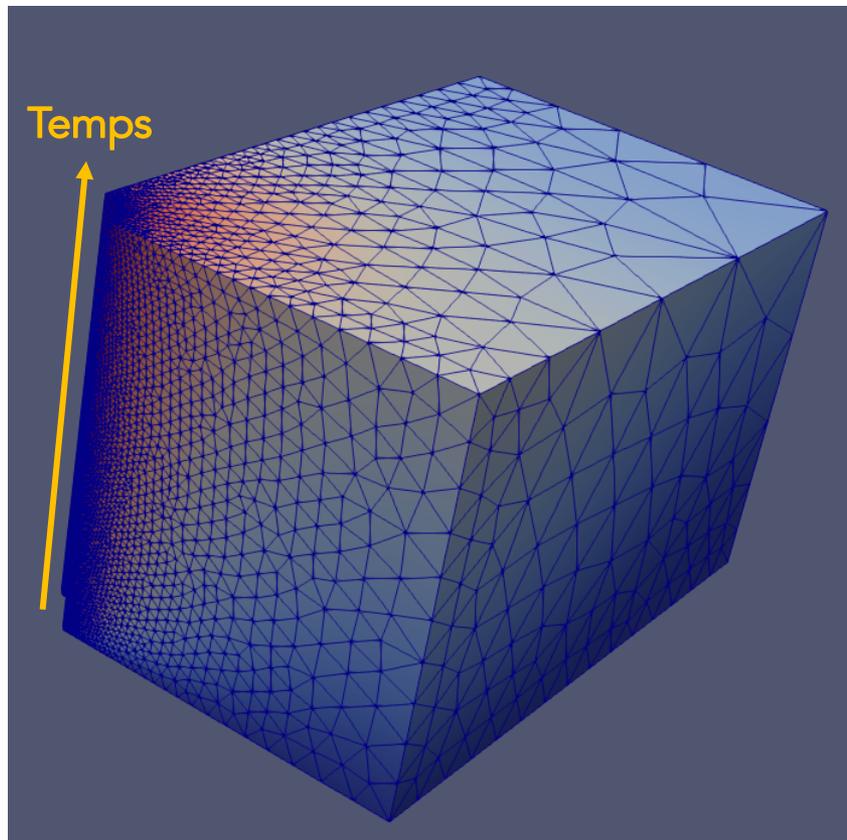


- Taux de déformation définir observateur inertiel:

- Tenseur des déformations :  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{g}$

$$b_{\mu\nu} = F'^{\lambda}_{\mu} F'^{\kappa}_{\nu} \hat{b}_{\lambda\kappa} \quad \hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Plaque trouée soumise à une variation de température



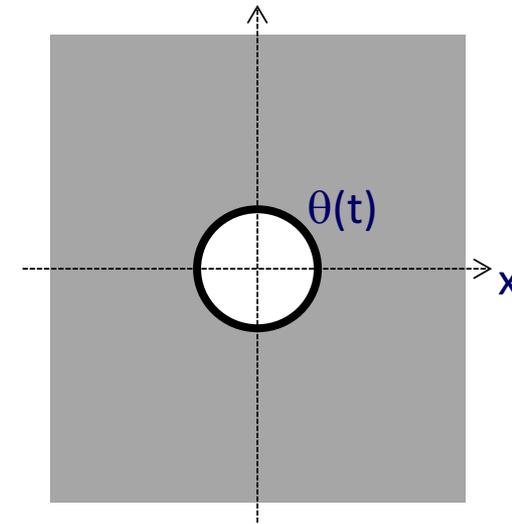
Conservation du tenseur  
moment énergie 4D  $T$   $\nabla \cdot T = 0$

Forme variationnelle et Fenics

$$\int_{\Omega} T : \nabla v \, d\Omega = \int_V T n v \, dV$$

- $\Omega$ : the 4D volume
- $V$ : the 3D boundary of  $\Omega$
- $n$ : the outer normal on  $V$
- $v$ : trial function

$$\tilde{T} \begin{pmatrix} E & q_x & q_y & q_z \\ q_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ q_y & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ q_z & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



$\theta(0) = 20^\circ\text{C}$   
ambiante

$\theta(t_f) = 30^\circ\text{C}$

