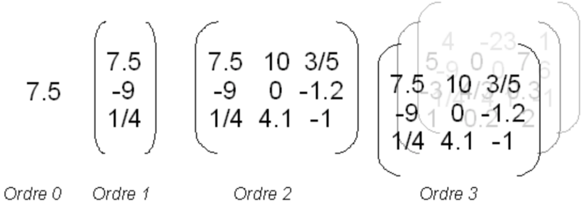
Torseurs et co-torseurs

Géry de Saxcé

LaMcube UMR CNRS 9013 Université Lille

GDR-GDM 2022 ENS Paris-Saclay

Qu'est-ce qu'un tenseur ?



Définition des tenseurs

- **Vu comme un objet indépendant des coordonnées :** une application multilinéaire

$$\boldsymbol{T} : \overbrace{V \times V \times \cdots V}^{p \ times} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \cdots V^*}^{q \ times} \rightarrow \mathbb{R}$$

- **Approche par la théorie des groupes :** application qui assigne à chaque base le tableau multidimensionnel de ses composantes $T = (T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p})$.
  Les changements de repères définissent une **action** du groupe linéaire sur l'ensemble de ces tableaux. Un tenseur peut être vu comme une **orbite**

- **Calcul tensoriel généralisé (Élie Cartan)**
  ≪ *Un être géométrique, mécanique ou physique défini analytiquement par r composantes lorqu'on se donne un système de référence (affine, projectif, conforme,...). Nous dirons que l'être considéré est un* **tenseur** *si par tout changement de coordonnées (affine, projectif, conforme,...), ses composantes subissent une substitution linéaire qui ne dépend que du changement de coordonnées* ≫

- **Tenseurs affines :** orbites du groupe affine
  ou d'un de ses sous-groupes

Les groupes de symétrie de la Mécanique

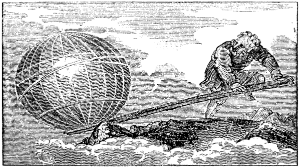
Groupe de symétrie $G = SYM(Invariant_1, \cdots, Invariant_m)$

MRU = Mouvement Rectiligne Uniforme
(mouvement inertiel, 1$^{\text{ère}}$ loi de Newton)

- Groupe de Galilée = SYM(MRU, temps absolu, espace absolu)
- Groupe de Lorentz-Poincaré = SYM(MRU, vitesse de la lumière)
- Groupe de Bargmann = SYM(MRU, temps absolu, espace absolu, métrique 5D)

Les **symétries** qui conservent le **MRU** sont **affines**,
donc les groupes de symétrie de la Mécanique sont des sous-groupes du groupe affine,
raison pour s'intéresser aux tenseurs affines (galiléens, Poincaréens, bargmanniens, ...)

Qu'est-ce qu'un torseur ?



Le torseur comme tenseur

- Si on applique une translation k de l'origine, la force et le moment sont transportés suivant $F' = F, \quad M' = M + F \times k$
- En France, le torseur est défini comme un objet structuré (F, M) qui se transforme suivant la loi précédente [Pérès 1953]
- Un autre point de vue [Souriau CFM 1997 Futuroscope] consiste à construire la matrice antisymétrique

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & F^T \\ -F & -j(M) \end{pmatrix}$$

où $j(M)$ est la matrice antisymétrique telle que $j(M)k = M \times k$

- La matrice $\tilde{\tau}$ peut être vue comme représentant un **tenseur de rang** 2 **antisymétrique**
- **Covariant ou contravariant ?**

Le torseur comme tenseur

- **Covariant ou contravariant ?**

  Heuristique : La 2ème loi de Newton s'écrit : $m \dfrac{d^2 x^i}{d\, t^2} = F^i$
  donc la force est contravariante et le torseur aussi

- La translation $x' = x - k$ peut s'écrire

$$\tilde{X}' = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1_{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \tilde{P}^{-1} \tilde{X}$$

  soit $\tilde{X}^{\alpha'} = (\tilde{P}^{-1})^{\alpha'}_{\beta} \tilde{X}^{\beta}$

- La règle tensorielle des tenseurs 2 fois contravariants

$$\tilde{\tau}^{\mu' \nu'} = (\tilde{P}^{-1})^{\mu'}_{\alpha} (\tilde{P}^{-1})^{\nu'}_{\beta} \, \tilde{\tau}^{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad \tilde{\tau}' = \tilde{P}^{-1} \tilde{\tau} \, \tilde{P}^{-T}$$

  restitue la formule de transport $F' = F, \quad M' = M + F \times k$

Le torseur comme tenseur

Interprétation géométrique : du local au global

Qu'avons nous fait ?

- $\mathcal{M}$ est une variété différentielle
- $AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ est l'espace affine associé à l'espace vectoriel tangent $T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ (ses éléments sont appelées points tangents)
- $A^*T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ est l'espace vectoriel des fonctions affines $\boldsymbol{\Psi}$ sur $AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M}$ (appelées formes affines)
- Le **torseur** est une fonction bilinéaire et antisymétrique sur cet espace $\boldsymbol{\tau} : A^*T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \times A^*T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

  t.q. $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\Psi}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}) = -\boldsymbol{\tau}(\hat{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{\Psi})$

Le torseur comme tenseur

du global au local

- Dans un **repère affine** $(\boldsymbol{X}_0, (\vec{\boldsymbol{e}}_\alpha))$ de $AT_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ où
  - l'origine $\boldsymbol{X}_0$ représente **l'observateur**
  - la base $(\vec{\boldsymbol{e}}_\alpha)$ représente le **laboratoire** (référence pour les mesures)

  un point tangent $\boldsymbol{X}$ est représenté par ces composantes affine V^α telles que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha$

- Dans une base $(1, (\boldsymbol{e}^\alpha))$ de $A^* T_{\boldsymbol{X}}\mathcal{M}$ où
  - 1 est la fonction constante égale à un
  - $(\boldsymbol{e}^\alpha)$ est la base duale

  une forme affine $\boldsymbol{\Psi}$ est représentée par ces composantes $(\chi, (\Phi_\alpha))$ telles que $\boldsymbol{\Psi} = \chi 1 + \Phi_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha$

- Dans un repère affine, le torseur $\boldsymbol{\tau}$ se décompose comme suit :

$$\boldsymbol{\tau} = T^\alpha \left(\boldsymbol{X}_0 \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha - \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha \otimes \boldsymbol{X}_0\right) + J^{\alpha\beta}\, \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_\beta \ .$$

- En adoptant le point de vue de la théorie des groupes, on peut le voir comme une orbite de l'action du groupe affine (ou d'un de ses sous-groupes) sur l'espace de ces tableaux de composantes $(T, J) = ((T^\alpha), (J^{\alpha\beta}))$

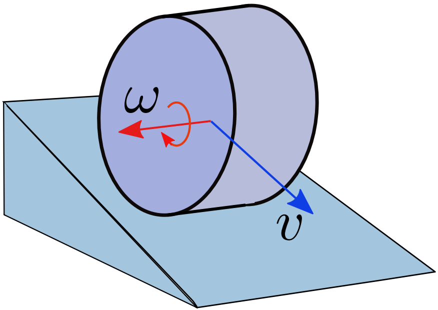
Le torseur comme tenseur

Et la dynamique ? Simple ajout d'une dimension, le temps ...

- $\mathcal{M}$ est l'espace-temps
- Pour un objet au repos $\tilde{\tau}' = \begin{pmatrix} 0 & T^T \\ -T & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j(l_0) \end{pmatrix}$
- Appliquons un boost Galiléen $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & v & 1_{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix}$
- La règle tensorielle des torseurs donne $\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & m & p^T \\ -m & 0 & -q^T \\ -p & q & -j(l) \end{pmatrix}$

  avec m invariant (la masse) et
  - la quantité de mouvement $p = m\,v$,
  - la quantité de position (ou passage) $q = m\,x$
  - le moment cinétique $l = l_0 + x \times m\,v$

Qu'est-ce qu'un co-torseur ?



Le co-torseur

- Le **co-torseur** est une fonction bi-affine et antisymétrique sur l'espace tangent affine $\boldsymbol{\gamma} : AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \times AT_{\boldsymbol{x}}\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ t.q. $\gamma(\boldsymbol{P}, \hat{\boldsymbol{P}}) = -\gamma(\hat{\boldsymbol{P}}, \boldsymbol{P})$

- Il est représenté dans un repère affine par $\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & v^T \\ -v & -j(\omega) \end{pmatrix}$

- C'est un tenseur 2 fois covariant dont la règle tensorielle $\tilde{\gamma}' = \tilde{P}^T\tilde{\gamma}, \tilde{P}$ pour une translation k donne

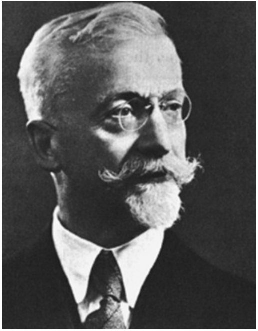
$$v' = v + \omega \times k, \quad \omega' = \omega$$

  Il peut donc décrire le **mouvement d'un corps rigide**

- Co-torseur et torseurs sont mis en dualité par le produit doublement contracté $\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\tau} = \gamma_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} = Tr(\tilde{\gamma}^T\tilde{\tau})$

- La **puissance** développée par des efforts de torseur $\boldsymbol{\tau}$ sur un corps rigide de co-torseur $\boldsymbol{\gamma}$ est alors $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\tau} = v \cdot F + \omega \cdot M$

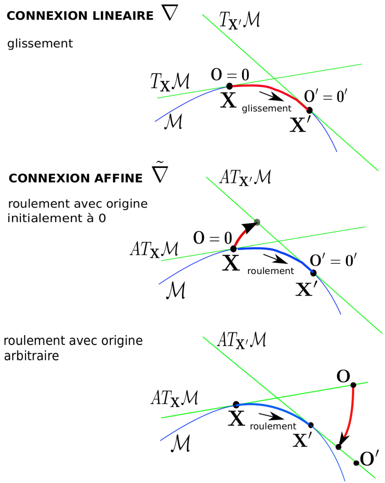
Qu'est-ce qu'une connexion affine ?



[Élie Cartan 1923 Sur les variétés à connexion affine...]

≪ *Un moyen de* **raccorder** *en un seul espace affine*
deux petits morceaux qui entourent deux points infiniments voisins ≫

Différentielle covariante affine



Différentielle covariante affine

- Une **différentielle covariante affine** est une application $\tilde{\nabla}$ telle que :
  - si $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X})$ est un champ de points tangents et $\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}$ est un vecteur tangent, $\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{a}$ est un vecteur tangent,
  - $\tilde{\nabla}$ s'identifie à ∇ lorsqu'elle est appliquée à un tenseur classique et

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{a} = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{a}' + \nabla_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}}$$

- On a donc : $\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{a} = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, (\boldsymbol{a}_0 + V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha) = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{a}_0 + \nabla_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, (V^\alpha \vec{\boldsymbol{e}}_\alpha)$
  Ce vecteur tangent est donc représenté dans une carte locale par la colonne de ses composantes

$$\tilde{\nabla}_{dX} V = \nabla_{dX} V + \Gamma_A(dX)$$

  où $\Gamma_A(dX) \in \mathbb{R}^n$ est linéaire en dX et représente le **mouvement de l'origine**

- La généralisation aux tenseurs d'ordres plus élevés résulte de la règle :

$$\tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, (\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}') = \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{T} \otimes \tilde{\nabla}_{\overrightarrow{d\boldsymbol{X}}}\, \boldsymbol{T}'$$

Différentielle covariante affine

Calcul de l'expression générique de Γ_A

- Lors d'un changement de repère affine $a = (C, P)$,
  en exprimant le fait que les composantes $\tilde{\nabla}_{dX}\, V$ de la dérivé covariante affine se transforment comme celles d'un vecteur, on obtient

$$\Gamma'_A(dX') = P^{-1}(\Gamma_A(P\, dX') + \nabla_{P\, dX'}\, C)$$

- Pour des transformations linéaires $a = (0, P)$, on a :

$$\Gamma'_A = P^{-1}\Gamma_A P$$

  Il existe donc un tenseur 1 fois covariant et 1 fois contravariant
  représenté par la matrice $A = \Gamma_A$

- On en déduit l'expression générique de Γ_A en considérant une translation $a = (C, 0)$:

$$\Gamma_A(dX) = A\, dX - \nabla_{dX}\, C$$

Dynamique des corps rigides

Différentielle covariante affine galiléenne

Rappel :

$$\Gamma_A(dX) = A\, dX - \nabla_{dX} C$$

Théorème

Si la matrice A est invariante par toute transformation galiléenne linéaire P

$$A = P^{-1} A\, P$$

elle est isotrope

$$A = \alpha 1_{\mathbb{R}^4}$$

Pour les applications à la mécanique, on peut choisir $\alpha = 1$

$$\Gamma_A(dX) = dX - \nabla_{dX} C$$

En notation tensorielle : $\Gamma^{\alpha}_{A\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \nabla_{\beta} C^{\alpha}$

Dynamique des corps rigides

- La matrice de connexion affine se décompose en

$$\tilde{\Gamma}(dX) = d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dC & dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Gamma_A(dX) & \Gamma(dX) \end{pmatrix}$$

  où Γ est la **gravitation** et Γ_A représente le **mouvement de l'observateur**

- En appliquant les règles de définition des tenseurs affines,
  on obtient des dérivées covariantes des composantes du torseur
  $\nabla_{dX}\, T = dT + \Gamma\, T$
  $\tilde{\nabla}_{dX}\, J = dJ + \Gamma\, J + J\, \Gamma^T + \Gamma_A T^T - T\, \Gamma_A^T$

Loi du mouvement des corps rigides

La loi covariante du mouvement est :

$$\tilde{\nabla}_{\vec{U}}\, \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\star\ .$$

où le torseur des autres forces (que la gravitation) est représenté par :

$$\tilde{\tau}^\star = \begin{pmatrix} 0 & H^T \\ -H & G \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j(M) \end{pmatrix}$$

Dynamique des corps rigides

La **loi covariante du mouvement** $\tilde{\nabla}_U \tilde{\tau} = \tilde{\tau}^\star$ s'écrit :

- conservation de la **masse**

$$\dot{m} = 0$$

- conservation de la **quantité de mouvement** (avec accélération de Coriolis)

$$\dot{p} = m\,(g - 2\,\Omega \times \dot{x}) + F$$

- dérivée de la quantité de position

$$\dot{q} = p$$

- conservation du **moment cinétique**

$$\dot{l} + \Omega \times l_0 = x \times m\,(g - 2\,\Omega \times \dot{x}) + M$$

On peut ainsi expliquer le mouvement d'un satellite, d'une toupie ou d'un gyroscope

Perspectives

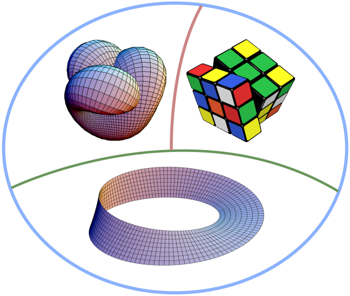
Pour étendre à la **mécanique des milieux continus**, on considère des tenseurs affines à valeur vectorielle (cfr. [mon exposé au GDR-GDM à l'ENS de Cachan en 2019])

En résumé, les **types utiles de tenseurs affines** sont

ordre	type	primal	dual
1	contravariant ou covariant	point	forme affine
2	contravariant ou covariant	torseur	co-torseur
2	mixte	moment	déformation généralisée

$\mathfrak{g}^* \longleftarrow$ tableau des composantes dans $\longrightarrow \mathfrak{g}$

SAPERE AVDE



GRATIAS AGO TIBI QUIA ATTENDERE