Surfaces, Coques, Intégrales invariantes

C. Stolz

IMSIA

23/11/22

Introduction

- Géométrie d'une surface
  - plan tangent
  - normale
  - variations : courbure
- Courbure de l'espace et relations de Codazzi.
- Géométrie d'une coque
  - Métriques initiales et déformée
  - Déformation et variations de courbure
  - Choix de modélisation
- Introduire les intégrales invariantes et application

Géométrie d'une surface

Equation d'une surface (deux paramètres, α, β)

$$OM = \boldsymbol{X_o}(X^\alpha) \in S, \quad S(\boldsymbol{X_o}) = 0, \quad \boldsymbol{N} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{X_o}} / || \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{X_o}} ||$$

Plan tangent : $\mathrm{d}M = \mathrm{d}\,\boldsymbol{X_o} = \boldsymbol{A}_\alpha \mathrm{d}X^\alpha$

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \frac{\partial M}{\partial X^\alpha}, \quad \boldsymbol{N}.\boldsymbol{A}_\alpha = 0$$

Base réciproque ($\boldsymbol{A}^\alpha$)

$$\boldsymbol{A}^\alpha.\boldsymbol{A}_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

Métrique

Tenseur métrique

$$\mathrm{d}M^2 = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}X^\alpha\, \mathrm{d}X^\beta$$

$$\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{A}_\alpha . \boldsymbol{A}_\beta, \quad \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} = \boldsymbol{A}^\alpha . \boldsymbol{A}^\beta, \quad \overset{\circ}{G} = \det(\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta})$$

La métrique est l'identité du plan :

$$\mathbf{I} = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} \boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\beta = \boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}_\alpha = \boldsymbol{A}_\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\alpha$$

Surface

Le vecteur unitaire normal à la surface satisfait :

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{X_o}} / || \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{X_o}} || = \frac{\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2}{|| \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 ||}$$

Nous avons les propriétés suivantes

$$\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{A}_1 = \sqrt{\overset{\circ}{G}}\ \boldsymbol{A}^2, \quad \boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{A}_2 = -\sqrt{\overset{\circ}{G}}\ \boldsymbol{A}^1, \quad || \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 || = \sqrt{\overset{\circ}{G}}$$

Surface unitaire

$$\mathrm{d}\Sigma = \sqrt{\overset{\circ}{G}}\, \mathrm{d}X^1\ \mathrm{d}X^2.$$

Base locale :

$$\partial_\beta \boldsymbol{A}_\alpha = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{A}_\gamma + \mathrm{K}_{\alpha\beta}\boldsymbol{N}.$$

$$\partial_\gamma \boldsymbol{A}^\alpha = -\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma\beta}\boldsymbol{A}^\beta + \mathrm{K}^{\alpha}_{\gamma}\boldsymbol{N}.$$

$$\partial_\alpha \boldsymbol{N} = -\,\mathrm{K}_{\alpha\beta}\boldsymbol{A}^\beta = -\,\mathrm{K}^{\beta}_{\alpha}\boldsymbol{A}_\beta.$$

Dérivée covariante

$$\nabla_\gamma \boldsymbol{A}^\alpha = \mathrm{K}^{\alpha}_{\gamma}\boldsymbol{N}, \quad \nabla_\gamma \boldsymbol{A}_\alpha = \mathrm{K}_{\alpha\gamma}\boldsymbol{N}.$$

$$\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{A}_\alpha = u_\alpha \boldsymbol{A}^\alpha,$$

$$\nabla_\beta u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial X^\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} u^\gamma$$

$$\nabla_\beta u_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial X^\beta} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} u_\gamma$$

Les symboles de Christoffel satisfont:

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}{}^{\lambda\gamma} (\overset{\circ}{G}_{\alpha\gamma,\beta} + \overset{\circ}{G}_{\beta\gamma,\alpha} - \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta,\gamma})$$

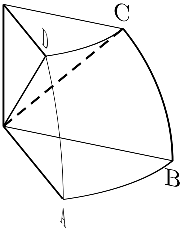
Le tenseur de Riemann-Christoffel :($\boldsymbol{u} = u^{\alpha} \boldsymbol{A}_{\alpha}$)

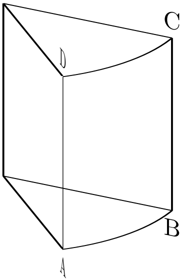
$$\begin{aligned} u^{\lambda} R^{\alpha}_{\lambda,\beta\gamma} &= \nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} u^{\alpha} - \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} u^{\alpha} \\ R^{\alpha}_{\lambda,\beta\gamma} &= \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\lambda\beta,\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\lambda\gamma,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\beta\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\gamma\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\mu} \\ R_{\alpha\beta} &= R^{\lambda}_{\alpha,\lambda\beta} \quad \text{(Ricci)} \end{aligned}$$

Propriétés

Dimension 2 : une seule composante non-nulle $R_{12,12}$
Dimension 3 : 6 composantes, mais 3 relations indépendantes

Cylindre-$R_{12,12} = 0$





Sphere-$R_{12,12} \neq 0$

Mouvement :

$$m = M + u^\alpha \boldsymbol{A}_\alpha + w\boldsymbol{N}.$$

Plan tangent transporté

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\alpha &= L_\alpha^\lambda \boldsymbol{A}_\lambda + (\nabla_\alpha w + u^\lambda \mathrm{K}_{\lambda\alpha})\boldsymbol{N}\\ L_\alpha^\lambda &= \delta_\alpha^\lambda + \nabla_\alpha u^\lambda - w\,\mathrm{K}_\alpha^\lambda\end{aligned}$$

La normale à la surface déformée

$$\boldsymbol{n}\,||\,\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2|| = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 = \ &\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2(1 + \nabla_1 u^1 + \nabla_2 u^2 - w\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{K})\\ &+ \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{N}(\partial_2 w + u^\lambda \mathrm{K}_{2\lambda})\\ &- \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{N}(\partial_1 w + u^\lambda \mathrm{K}_{1\lambda}) + \textit{ordre } 2\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}_\alpha = (\delta_\alpha^\lambda + \nabla_\alpha u^\lambda - w\,\mathrm{K}_\alpha^\lambda)\,\boldsymbol{A}_\lambda + (\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha})\boldsymbol{N}.$$

Donc la normale au premier ordre

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N} - (\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha})\boldsymbol{A}^\alpha.$$

Variations

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma \boldsymbol{a}_\alpha &= \mathring{\Gamma}^\mu_{\alpha\gamma}\,\boldsymbol{A}_\mu + \mathrm{K}_{\alpha\gamma}\boldsymbol{N} \\
&\quad + \partial_\gamma(\nabla_\alpha u^\lambda - w\,\mathrm{K}_\alpha^\lambda)\boldsymbol{A}_\lambda + (\nabla_\alpha u^\lambda - w\,\mathrm{K}_\alpha^\lambda)(\mathring{\Gamma}^\mu_{\lambda\gamma}\,\boldsymbol{A}_\mu + \mathrm{K}_{\lambda\alpha}\boldsymbol{N}) \\
&\quad + \partial_\gamma(\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha})\boldsymbol{N} - (\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha})\,\mathrm{K}_\gamma^\beta\boldsymbol{A}_\beta \\
\partial_\gamma \boldsymbol{n} &= -K_{\gamma\beta}\boldsymbol{A}^\beta - \partial_\gamma(\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha})\boldsymbol{A}^\alpha \\
&\quad - (\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha})(K_\gamma^\alpha\boldsymbol{N} - \mathring{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta}\boldsymbol{A}^\beta)
\end{aligned}$$

Symétries

$$\partial_\gamma \boldsymbol{a}_\alpha = \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\gamma}\, \boldsymbol{A}_\mu + \mathrm{K}_{\alpha\gamma} \boldsymbol{N}$$

$$+ \partial_\gamma(\nabla_\alpha u^\lambda - w\, \mathrm{K}^\lambda_\alpha) \boldsymbol{A}_\lambda + (\nabla_\alpha u^\lambda - w\, \mathrm{K}^\lambda_\alpha)(\mathring{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\gamma}\, \boldsymbol{A}_\mu + \mathrm{K}_{\lambda\alpha} \boldsymbol{N})$$

$$+ \partial_\gamma(\nabla_\alpha w + u^\lambda\, \mathrm{K}_{\lambda\alpha}) \boldsymbol{N} - (\nabla_\alpha w + u^\lambda\, \mathrm{K}_{\lambda\alpha})\, \mathrm{K}^\beta_\gamma \boldsymbol{A}_\beta$$

Deux relations pour tout (u^λ, w) (Codazzi)

$$\partial_\gamma \boldsymbol{a}_\alpha . \boldsymbol{N} \Rightarrow \mathring{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\mu}\, \mathrm{K}_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma\, \mathrm{K}_{\mu\alpha} = \mathring{\Gamma}^{\lambda}_{\gamma\mu}\, \mathrm{K}_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha\, \mathrm{K}_{\mu\gamma}$$

$$\partial_\gamma \boldsymbol{a}_\alpha . \boldsymbol{A}^\beta \Rightarrow \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\beta,\gamma} + \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\gamma\lambda} \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\mu} - \mathrm{K}_{\beta\lambda}\, \mathrm{K}^\alpha_\gamma = \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\gamma,\beta} + \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\beta\lambda} \mathring{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\mu} - \mathrm{K}_{\gamma\lambda}\, \mathrm{K}^\alpha_\beta$$

Interprétation

Première relation :

$$\partial_\gamma K_{\mu\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\gamma\mu} K_{\lambda\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\gamma\alpha} K_{\lambda\mu} = \partial_\alpha K_{\mu\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\mu} K_{\lambda\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda_{\gamma\alpha} K_{\lambda\mu}.$$

soit

$$\nabla_\gamma K_{\mu\alpha} = \nabla_\alpha K_{\mu\gamma}.$$

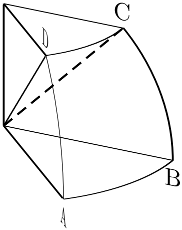
Deuxième relation

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\beta,\gamma} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu_{\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\mu} - \mathrm{K}_{\beta\lambda} \mathrm{K}^\alpha_\gamma = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\gamma,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu_{\beta\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\mu} - \mathrm{K}_{\gamma\lambda} \mathrm{K}^\alpha_\beta.$$

$$R^\alpha_{\lambda,\beta\gamma} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\beta,\gamma} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\gamma,\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu_{\beta\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\gamma\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu_{\gamma\lambda} \overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\mu}.$$

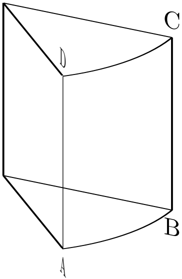
Soit $R_{12,12} = \overset{\circ}{G}$ det K

Plaque et cylindre circulaire avant déformation : espace plan



Sphere-$R_{12,12} = 1/R^2$

Cylindre-$R_{12,12} = 0$



Courbure

Le tenseur de courbure de l'état déformé est

$$k_{\alpha\gamma} = \boldsymbol{n}.\partial_\gamma \boldsymbol{a}_\alpha .$$

A l'ordre 1

$$k_{\alpha\gamma} = \mathrm{K}_{\alpha\gamma} + (\nabla_\alpha u^\lambda - w\,\mathrm{K}^\lambda_\alpha)\,\mathrm{K}_{\lambda\gamma} + \nabla_\gamma(\nabla_\alpha w + u^\lambda\,\mathrm{K}_{\lambda\alpha}).$$

symétrique car on retrouve la relation de Codazzi:

$$\nabla_\gamma K_{\mu\alpha} = \nabla_\alpha K_{\mu\gamma}.$$

Métrique d'une coque

Description géométrique et plan tangent

$$M = M_o + Z\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{E}_\alpha = \frac{\partial M}{\partial X^\alpha} = \mu_\alpha^\beta \boldsymbol{A}_\beta.$$

Transformation linéaire de la fibre moyenne à la cote Z

$$\mu_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - Z\,\mathrm{K}_\alpha^\beta, \quad 0 = \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{\mu} - Tr(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu} + \mathbf{I}_2 \det \boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{-1} \det \boldsymbol{\mu} = Tr\boldsymbol{\mu}\ \mathbf{I}_2 - \boldsymbol{\mu}$$

Base réciproque

$$\boldsymbol{E}^\alpha = (\boldsymbol{\mu}^{-1})_\beta^\alpha.\boldsymbol{A}^\beta.$$

Tenseur métrique et courbure

$$g_{\alpha\beta} = \mu_\alpha^\gamma \overset{\circ}{G}_{\gamma\delta}\mu_\beta^\delta, \quad k_{\alpha\beta} = \mu_\alpha^\gamma K_{\gamma\beta}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mu_\gamma^\delta = \mu_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\lambda}^\delta + \frac{\partial \mu_\alpha^\delta}{\partial X^\beta} = \mu_\beta^\lambda \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\alpha\lambda}^\delta + \frac{\partial \mu_\beta^\delta}{\partial X^\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mu_\gamma^\delta$$

Courbure de l'espace déformé

Le tenseur de Riemann -Christoffel devient

$$R_{12,12} = g\,\mathrm{det}(\mathrm{k}).$$

En HPP, dans le cas plan

$$R_{12,12} = \varepsilon^{o}_{11,22} + \varepsilon^{o}_{22,11} - 2\varepsilon^{o}_{12,12}.$$

- Si $R_{12,12} = 0$ les déformations du plan sont compatibles.
- Si incompatibilité : (thermique, plastique) ajouter des déformations élastiques ou bien la plaque ne reste pas plane.
- Piloter k en engendrant ε_o voir SU-Espci

Mouvement de la coque

Mouvement : $(M = M_o + Z\boldsymbol{N}, u = u_o + Z\ u_1 ..., w = w_o + Z\ w_1 ...$

$$m = M + u^\alpha(X^\beta, Z)\boldsymbol{A}_\alpha + w(X^\alpha, Z)\boldsymbol{N}.$$

$$\mathrm{d}M = \boldsymbol{E}_\alpha \mathrm{d}X^\alpha + \ \mathrm{d}Z\ \boldsymbol{N}, .$$

Plan tangent transporté

$$\boldsymbol{e}_\alpha = L_\alpha^\lambda \boldsymbol{A}_\lambda + (\nabla_\alpha w + u^\lambda \mathrm{K}_{\lambda\alpha})\boldsymbol{N} = \mathbf{F}.\boldsymbol{E}_\alpha$$
$$L_\alpha^\lambda = \mu_\alpha^\lambda + \nabla_\alpha u^\lambda - w\,\mathrm{K}_\alpha^\lambda$$

Normale

$$\boldsymbol{n}_z = (1 + \frac{\partial w}{\partial Z})\boldsymbol{N} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial Z}\boldsymbol{A}_\alpha = \mathbf{F}.\boldsymbol{N}.$$

Métrique initiale

$$g(z)_{\alpha\beta} = \mu^{\lambda}_{\alpha} \overset{\circ}{G}_{\lambda\delta} \mu^{\delta}_{\beta} = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} - Z K^{\lambda}_{\alpha} \overset{\circ}{G}_{\lambda\beta} - \overset{\circ}{G}_{\alpha\lambda} K^{\lambda}_{\beta} Z + Z^2 K^{\lambda}_{\alpha} \overset{\circ}{G}_{\lambda\delta} K^{\delta}_{\beta}.$$

Métrique déformée

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T.\mathbf{F}, \quad C_{\alpha Z} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}.$$

En effet à l'ordre un en déplacement

$$C_{Z\alpha} = \mu^{\gamma}_{\alpha} \overset{\circ}{G}_{\gamma\delta} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial Z} + \nabla_{\alpha} w + u^{\lambda} \mathrm{K}_{\lambda\alpha} = 0.$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N} - (\nabla_{\alpha} w + u^{\lambda} \mathrm{K}_{\lambda\alpha}) \boldsymbol{E}^{\alpha} = \boldsymbol{N} + \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial Z} \boldsymbol{A}_{\alpha}.$$

car

$$\boldsymbol{E}^{\alpha} = (\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta} \overset{\circ}{G}^{\beta\gamma} \boldsymbol{A}_{\gamma}.$$

i.e (Love-Kirchoff)

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_o - 2Z\mathrm{k} + ...$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{C} - g)_{\alpha\beta} = \mathbf{E}^m_{\alpha\beta} - Z(\mathrm{k}_{\alpha\beta} - \mathrm{K}_{\alpha\beta}) + Z^2....$$

Le tenseur des déformations s'écrit donc

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}^m_{\alpha\beta} - ZB_{\alpha\beta})\boldsymbol{E}^\alpha \otimes \boldsymbol{E}^\beta.$$

En utilisant la relation $\boldsymbol{E}^\alpha = (\mu^{-1})^\alpha_\beta \boldsymbol{A}^\beta$ on obtient

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}^m_{\alpha\beta} - zb_{\alpha\beta})\boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\beta.$$

alors

$$2b_{\alpha\beta} = 2B_{\alpha\beta} - K^\gamma_\alpha \mathbf{E}^m_{\gamma\beta} - \mathbf{E}^m_{\alpha\gamma} K^\gamma_\beta.$$

Ce choix de variations de courbure est utilisé par divers auteurs

D'autres choix sont possibles, à partir des composantes mixtes suivant les métriques choisies.

En gardant le même paramétrage, pour la métrique de la cote z les composantes mixtes du tenseur de courbure sont k_α^β et choisir in fine pour variation de courbure

$$k_\alpha^\beta - K_\alpha^\beta.$$

On obtient ainsi des modèles différents

Timoshenko, Novozilov, von Karman, Kirchoff-Love, Nagdhi, Reissner,...

Pour chaque choix, l'utilisation des composantes mixtes est préférable.

Les équations d'équilibre associées à ces choix de déformations et de variations de courbure seront différentes.

Intégrales Invariantes

Les déformations, et les courbures dépendent de champs de déplacement et de leur gradients
$(u, w, u_{,\alpha}, \theta_\alpha = w_{,\alpha}, w_{\alpha\beta} = \theta_{,\beta})$=$(q(u, w, \theta), \nabla q)$.
Soit une énergie $\Phi(q, \nabla q)$
Equations d'état

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial q}.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla q, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \nabla_\alpha q, \quad \sigma^\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha}.$$

Variations de l'énergie

$$\delta\Phi = \int_\Omega Q.\delta q + \boldsymbol{\sigma}^\alpha.\nabla_\alpha \delta q \, \mathrm{d}\omega$$

$$\int_\Omega \delta\Phi \, \mathrm{d}\omega = \int_\Omega (Q - \nabla_\alpha \boldsymbol{\sigma}^\alpha).\delta q \, \mathrm{d}\omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}.\delta q \, \mathrm{d}s$$

On en déduit donc

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - Q = 0, \quad T = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}$$

Intégrale invariante

Soit $\Phi(q, \nabla q, X)$

$$\nabla_\alpha \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q}.\nabla q + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_\beta}.\nabla_\alpha \varepsilon^\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial X^\alpha} = Q.\nabla_\alpha q + \boldsymbol{\sigma}^\beta.\nabla_\alpha \nabla_\beta q + \frac{\partial \Phi}{\partial X^\alpha}$$

$$= Q.\nabla q + \nabla_\beta(\boldsymbol{\sigma}^\beta.\nabla_\alpha q) - \nabla_\beta \boldsymbol{\sigma}^\beta.\nabla_\alpha q + \frac{\partial \Phi}{\partial X^\alpha}$$

$$= \nabla_\beta(\boldsymbol{\sigma}^\beta.\nabla_\alpha q) + \frac{\partial \Phi}{\partial X^\alpha}$$

$$\int_\Omega \nabla_\alpha \Phi = \int_{\partial\Omega} \Phi n_\alpha \, \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}.\nabla_\alpha q \, \mathrm{d}s + \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial X^\alpha} \, \mathrm{d}\Omega$$

soit

$$I = \int_C (\Phi \boldsymbol{n}_\alpha - \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}.\nabla_\alpha q) \, \mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial X^\alpha} \, \mathrm{d}\Omega = 0$$

(Eshelby, 1957)

Intégrale duale

Introduisons l'énergie complémentaire, (cas homogène)

$$\Phi + \Phi^* = \boldsymbol{\sigma}.\varepsilon + Qq = \boldsymbol{\sigma}.\nabla q + Q.q$$

Propriétés:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}.\varepsilon + Q.q) n_\alpha \,\mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega \nabla_\alpha \Big(\nabla_\beta (\boldsymbol{\sigma}^\beta.q) - \nabla_\beta \boldsymbol{\sigma}^\beta.q + Q.q \Big) \,\mathrm{d}S \\ &= \int_{\partial\Omega} n_\beta \Big(\nabla_\alpha (\boldsymbol{\sigma}^\beta q) \Big) \,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

Soit encore

$$I = \int_{\mathcal{C}} \Phi n_\alpha - n_\beta \boldsymbol{\sigma}^\beta.\nabla_\alpha q \,\mathrm{d}S = I^* = \int_{\mathcal{C}} -\Phi^* n_\alpha + n_\beta \nabla_\alpha \boldsymbol{\sigma}^\beta.q \,\mathrm{d}S.$$

Dans le cas 3D, en élasticité on obtient pour les fissures, les intégrales J de Rice-Eshelby, I^* de Bui.
Pour les milieux généralisés on retrouve l'intégrale proposé par Eshelby ($\approx$ 1957)
En élastoplasticité on obtient (plasticité à écrouissage positif, convexité de Φ)

$$\Phi(\varepsilon, \alpha), \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad A = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$$
$$\Phi^*(\boldsymbol{\sigma}, A)\Phi^* = -\Phi(\varepsilon, \alpha) + \boldsymbol{\sigma} : \varepsilon - A.\alpha$$

Intégrale invariante $C = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$

$$I_{\Gamma_1} = I_{\Gamma_2} = \int_\Gamma \Phi n_x - \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}.\nabla_x \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S + \int_{V_\Gamma} A \nabla_x.\alpha \, \mathrm{d}\Omega =$$
$$I_\Gamma^* \int_\Gamma \Phi^* n_x - \boldsymbol{n}.\nabla_x \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S - \int_{V_\Gamma} \nabla A_x.\alpha \, \mathrm{d}\Omega$$

Invariance des intégrales de contour si le corps est homogène !
Il existe d'autres intégrales invariantes, de même nature que celles obtenues en 3D.
Ces intégrales sont utiles pour décrire la présence de défaut dans les coques.

Remarque

Soit les tenseurs d'Eshelby primal et dual

$$
\begin{aligned}
p &= \Phi\,\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}.\nabla \boldsymbol{u}, \\
p^* &= \Phi^*\,\mathbf{I} - \nabla\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

alors

$$
\operatorname{div} p + \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0, \quad \operatorname{div} p^* + \frac{\partial \Phi^*}{\partial X} = 0.
$$

les intégrales de contour proviennent de la conservation des tenseurs d'Eshelby.

Les dérivées partielles par rapport à X montrent la part de l'inhomogénéité du comportement.

Conclusion

- Analyse des géométries des surfaces et des coques
- Lien entre les tenseurs de courbure et le tenseur de courbure de l'espace
- Déformations de membrane et tenseur de courbure sont liées
- Le tenseur de Riemann-Christoffel induit la compatibilité entre déformations et tenseur de courbure.
- Pour un milieu continu généralisé homogène, il existe des intégrales invariantes de contour comme en 3D

Merci pour votre attention

- Bui Hui Duong, (1973),Dualité entre les intégrales indépendantes du contoure dans la théorie ds solides fissurés, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 376: 1425–1428.
- Nguyen Quoc Son, (1985) Critère de propagation en rupture ductile, C. R. Acad. Sci. Paris 301:567–570.
- Nguyen Quoc Son, C. Stolz, (1985). Sur le problème d'évolution en vitesse de propagation de fissure et de déplacement en rupture fragile ou ductile, C. R. Acad. Sci. Paris 301: 661–664.
- C. Stolz, R.-M. Pradeilles-Duval, (1996). Approche énergétique de la propagation dynamique de discontinuités mécaniques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb 322:525–532.
- C. Stolz, (2008). Sur le problème de propagation de fissure en élastoplasticité : approches primale et duale, C. R. Mecanique 336:500–505
- Knowles, Sterberg, (1972).On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics, Arch. Rat. Mech. Anal. , 44(3):187-211.