

# Bicentenaire des équations de Navier

Aziz Hamdouni

LaSIE - Université de La Rochelle

Réunion thématique du GDR-GDM à l'ENS Paris Saclay 23-25 Novembre  
2022.

# L'article de Navier

- Il s'agit d'un article publié dans les mémoires de l'académie royale des sciences en 1823.
- Mais l'article a fait l'objet d'une lecture lors d'une séance de l'académie du 18 mars 1822.

## MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1823.

## MÉMOIRE

SUR LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES;

PAR M. NAVIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mars 1822.

### I. *Notions préliminaires.*

LES géomètres représentent, au moyen d'équations aux différences partielles, les conditions générales de l'équilibre et du mouvement des fluides. Ces équations ont été déduites de divers principes, qui supposent tous que les molécules du fluide sont susceptibles de prendre les unes par rapport aux autres des mouvements quelconques, sans opposer aucune

# Une vision moléculaire

## Navier :

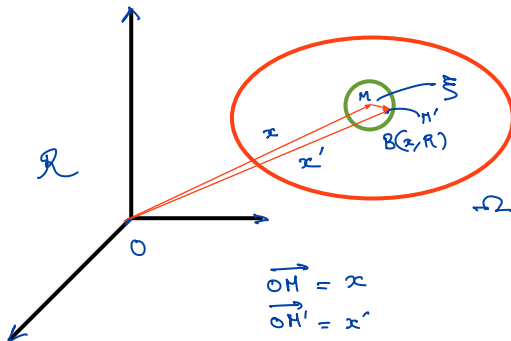
*Les géomètres représentent, au moyen d'équations aux différences partielles, les conditions générales de l'équilibre et du mouvement des fluides. Ces équations ont été déduites de divers principes qui supposent tous que les molécules du fluide sont susceptibles de prendre les unes par rapport aux autres des mouvements quelconques sans opposer aucune résistance, et de glisser sans effort sur les parois des vases dans lesquels le fluide est contenu. Mais les différences considérables, ou totales, que présentent dans certains cas les effets naturels avec les résultats des théories connues, indiquent la nécessité de recourir à des notions nouvelles, et d'avoir égard à certaines actions moléculaires qui se manifestent principalement dans les phénomènes du mouvement... Nous considérons ici un fluide incompressible, et nous représentons ce corps comme un assemblage de points matériels, ou molécules, placées à des distances très petites les unes des autres, et susceptibles de changer presque librement de position les unes par rapport aux autres. Une pression est exercée sur la surface du fluide, et pénètre dans l'intérieur du corps. Elle tend à rapprocher les parties, qui résistent à cette action par des forces répulsives qui s'établissent entre les molécules voisines... ; et nous prendrons pour principe, dans les recherches suivantes, que par l'effet du mouvement d'un fluide les actions répulsives des molécules sont augmentées ou diminuées d'une quantité proportionnelle à la vitesse avec laquelle les molécules s'approchent ou s'éloignent les uns des autres.*

# Comment a procédé Navier ?

- Dans un premier temps il étudie l'équilibre d'un fluide sous l'action des forces extérieures volumiques. Navier suppose que les forces internes exercées sur une particule située au point  $M$ , ne dépendent que de la position du point  $M$  et de la distance  $r$  entre ce point et les positions des différentes molécules voisines qui l'entourent. Ces forces décroissent vers 0 très rapidement quand  $r$  augmente.
- L'équation d'équilibre est obtenue en utilisant le principe des travaux virtuelles (ce n'est pas ce terme qui est utilisé par Navier)
- L'équation d'Euler, déjà connue, est obtenue en rajoutant la masse volumique multipliée par l'accélération (eulérienne) à l'équation précédente.
- Puis aux forces intérieures précédentes est rajouté un terme proportionnel à la vitesse relative entre molécules. Ce coefficient de proportionnalité dépend de  $r$  et décroît très vite vers zéro quand  $r$  augmente.
- Le principe des puissances virtuelles est utilisé pour obtenir les équations de la dynamique.

# Configuration

On considère un fluide dans un domaine  $\Omega$ . On se fixe un repère  $\mathcal{R}$ . Pour chaque point matériel du fluide situé en  $M$ , de position  $x$  dans le repère  $\mathcal{R}$ , on considère un "volume de contrôle"  $B(x, R)$ , qui est une boule de centre  $x$  et de rayon  $R$  très petit. C'est le siège des efforts intérieurs subis par la particule située en  $M$ .



# Description des différentes étapes avec des notations "modernes"

- Le fluide est soumis à une densité des efforts volumique  $\mathbf{f}$ . L'action d'un point voisin  $M'$  sur  $M$  est noté  $\mathbf{T} = h(x, r) \mathbf{e}_\xi$ , avec  $h(x, \cdot)$  décroît rapidement vers 0 avec  $r$  dans  $B(x, R)$ .
- Notons  $\mathbf{u}^*$  le champ des déplacements virtuels du fluide (ou  $\delta\mathbf{x}$ ). Alors

$$\mathbf{u}^*(x + \xi) = \mathbf{u}^*(x) + \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x} \xi + O(r^2)$$

- Alors le travail virtuel<sup>1</sup> élémentaire de l'inter-effort entre la molécule située en  $M$  et les molécules voisines est :

$$w^* = \int_{B(x,R)} \frac{h(x, r)}{r} \xi \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x} \xi \, d\mu$$

Que l'on peut encore écrire :

$$w^* = tr \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x} \int_{B(x,R)} \frac{h(x, r)}{r} \xi \otimes \xi \, d\mu \right)$$

## Suite ..

On obtient donc

$$w^* = \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x} \mathbb{P} \right)$$

avec

$$\mathbb{P} = \int_0^{+\infty} r^3 h(x, r) dr \int_{S(x,1)} \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi dS = 2p(x) I_d$$

or par invariance par rotation on a

$$\int_{S(x,1)} \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi dS = \frac{1}{3} \left( \int_{S(x,1)} \operatorname{tr}(\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi) dS \right) I_d$$

et comme  $\operatorname{tr}(\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi) = |\mathbf{e}_\xi|^2 = 1$  on obtient

$$\mathbb{P} = 2p(x) I_d \quad \text{où} \quad p(x) = \frac{2\pi}{3} \int_0^{+\infty} r^3 h(x, r) dr$$

Et donc

$$w^* = 2p(x) \operatorname{div} \mathbf{u}^*$$

# Équations de la statique et de la dynamique d'un fluide parfait

- Le principe des travaux virtuels s'écrit alors<sup>2</sup> :

$$0 = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* + p \operatorname{div} \mathbf{u}^* dx = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{grad} p) \cdot \mathbf{u}^* dx + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dS$$

En prenant<sup>3</sup>  $\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} = 0$ , on obtient les équations d'équilibre du fluide dans  $\Omega$  :

$$\mathbf{grad} p - \mathbf{f} = 0$$

- En tenant compte de l'accélération dans le principe des travaux virtuels et en écrivant la condition d'incompressibilité nous obtenons les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad} p + \mathbf{f} \end{cases} \quad (1)$$

---

2. où il faut diviser  $w^*$  par deux pour ne pas compter deux fois les mêmes efforts

3. Navier discute les différents cas, paroi immobile, surface libre,



# Les efforts intérieurs dus au champ des vitesses du fluide

- Si  $\mathbf{v}$  est le champ des vitesses du fluide à un instant donné  $t$ . La vitesse d'un point  $M'$  voisin est :

$$\mathbf{v}(x + \xi, t) = \mathbf{v}(x, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \xi$$

Les efforts d'attraction et de répulsion entre les molécules situées en  $M$  et  $M'$  (dirigés suivant le vecteur  $\mathbf{e}_\xi$ ) sont proportionnels à

$$V = \mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{v}(x + \xi, t) - \mathbf{v}(x, t)) = \frac{1}{r} \xi \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \xi$$

- En notant  $\tau(r)$  le coefficient de proportionnalité qui vérifie les mêmes hypothèses que  $h$  mais que l'on peut prendre indépendant de  $x$ , la puissance virtuelle des inter-efforts dus au champ des vitesses est alors :

$$w_\tau^* = \int_{B(x,R)} \tau(r) V \delta V \, d\mu$$

# Expression de la puissance virtuelle des inter-efforts

- On pose :

$$\mathbf{A} = \int_{S(x,1)} \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi dS \quad (2)$$

et

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \otimes \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x} \quad (3)$$

- En notant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit interne (contracté) entre deux tenseurs d'ordre 4, alors après quelques manipulations on trouve :

$$w_\tau^* = K \int_0^{+\infty} r^4 \tau(r) dr$$

avec

$$K = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$$

- Or le tenseur  $\mathbf{A}$  est invariant par le groupe  $SO(3)$ , il s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{A}_{ijkl} = \alpha_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha_2 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (4)$$

où  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes réelles.

## Expression de la puissance virtuelle des inter-efforts (suite)

- En prenant différentes contractions partielles de  $\mathbf{A}$  dans l'équation (4), on peut montrer en s'appuyant sur l'expression (2) de  $\mathbf{A}$  que :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{4\pi}{15}$$

- Alors  $K = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$  devient :

$$K = \frac{4\pi}{15} \left[ \text{div} \mathbf{v} \text{ div} \delta \mathbf{v} + 2 \text{tr} \left( \mathbb{D} \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (5)$$

où  $\mathbb{D}$  est la vitesse des déformations.

- Comme le fluide est incompressible on obtient :

$$w_\tau^* = \text{tr} \left( 2\varepsilon \mathbb{D} \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x} \right)$$

avec

$$\varepsilon = 2\mu = \frac{4\pi}{15} \int_0^{+\infty} r^4 \tau(r) dr \quad (6)$$

# Équation de la dynamique

- On écrit ensuite le principe des puissances virtuelles sur l'ensemble du domaine fluide  $\Omega$ . Il faut alors faire attention à ne pas tenir compte deux fois des mêmes efforts. Cela revient à écrire que la puissance virtuelle des efforts intérieurs de "frottement" sont :

$$\mathcal{P}^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_{\tau}^* dx = \int_{\Omega} tr \left( 2\mu \mathbb{D} \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x} \right) dx$$

Qui est l'expression que l'on connaît de la puissance virtuelle des forces intérieures visqueuses, si on interprète le coefficient  $\mu$  défini par (6) comme la viscosité dynamique.

- Le principe des puissances virtuelles nous permet d'écrire alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad} p + \mathbf{f} + \mu \Delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (7)$$

# Les écritures de Navier : l'intégrant de $w_v^*$

$$\frac{\delta \cdot f(\rho)}{\rho^2} \left( \begin{aligned} & \left( \frac{du}{dx} \frac{\delta du}{dx} \alpha^4 + \frac{du}{dy} \frac{\delta du}{dy} \alpha^2 \epsilon^2 + \frac{du}{dz} \frac{\delta du}{dz} \alpha^2 \gamma^2 \right) + \\ & \left( \frac{dv}{dy} \frac{\delta du}{dx} \alpha^2 \epsilon^2 + \frac{dv}{dx} \frac{\delta du}{dy} \alpha^2 \epsilon^2 \right) + \\ & \left( \frac{dw}{dz} \frac{\delta du}{dx} \alpha^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dx} \frac{\delta du}{dz} \alpha^2 \gamma^2 \right) + \\ & \left( \frac{du}{dx} \frac{\delta dv}{dy} \alpha^2 \epsilon^2 + \frac{du}{dy} \frac{\delta dv}{dx} \alpha^2 \epsilon^2 \right) + \\ & \left( \frac{dv}{dx} \frac{\delta dv}{dx} \alpha^2 \epsilon^2 + \frac{dv}{dy} \frac{\delta dv}{dy} \epsilon^4 + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dv}{dz} \epsilon^2 \gamma^2 \right) + \\ & \left( \frac{dw}{dy} \frac{\delta dv}{dz} \epsilon^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dz} \frac{\delta dv}{dy} \epsilon^2 \gamma^2 \right) + \\ & \left( \frac{du}{dx} \frac{\delta dw}{dz} \alpha^2 \gamma^2 + \frac{du}{dz} \frac{\delta dw}{dx} \alpha^2 \gamma^2 \right) + \\ & \left( \frac{dv}{dy} \frac{\delta dw}{dz} \epsilon^2 \gamma^2 + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dw}{dy} \epsilon^2 \gamma^2 \right) + \\ & \left( \frac{dw}{dx} \frac{\delta dw}{dx} \alpha^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dy} \frac{\delta dw}{dy} \epsilon^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dz} \frac{\delta dw}{dz} \gamma^4 \right) \end{aligned} \right)$$

Cette addition étant faite, il ne reste plus qu'à intégrer dans la huitième partie de la sphère dont le point M est le

# Les écritures de Navier

Multipliant chacune de ces quantités par  $d\psi d\varphi$ , et intégrant entre les limites indiquées, on trouve pour la valeur commune des trois premières intégrales  $\frac{\pi}{10}$ ; et pour la valeur commune des trois dernières  $\frac{\pi}{30}$ . Par conséquent si nous posons.

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{30} \int_0^{\infty} d\rho \cdot \rho^4 f(\rho) r$$

la somme des moments de toutes les actions exercées réciproquement entre la molécule M et celles qui l'avoisinent se trouvera exprimée par

$$\varepsilon \left\{ \begin{aligned} & 3 \frac{du}{dx} \frac{\delta du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{\delta du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{\delta du}{dz} + \frac{dv}{dy} \frac{\delta du}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{\delta du}{dy} + \frac{dw}{dz} \frac{\delta du}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{\delta du}{dz} \\ & \frac{du}{dx} \frac{\delta dv}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{\delta dv}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{\delta dv}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} \frac{\delta dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dz} \frac{\delta dv}{dy} \\ & \frac{du}{dx} \frac{\delta dw}{dz} + \frac{du}{dz} \frac{\delta dw}{dx} + \frac{dv}{dy} \frac{\delta dw}{dz} + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dw}{dy} + \frac{dw}{dx} \frac{\delta dw}{dx} + \frac{dw}{dy} \frac{\delta dw}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \frac{\delta dw}{dz} \end{aligned} \right.$$

# Les équations de Navier (page 34 du mémoire)

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$\text{P} \quad -\frac{dp}{dx} = \rho \left( \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) - \varepsilon \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right),$$

$$\text{Q} \quad -\frac{dp}{dy} = \rho \left( \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) - \varepsilon \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right),$$

$$\text{R} \quad -\frac{dp}{dz} = \rho \left( \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) - \varepsilon \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right).$$

## Quelques remarques

- Navier s'intéresse aussi aux conditions aux limites et il étudie d'une manière détaillée les actions exercées entre les molécules du fluide et celles des parois solides. Il introduit un coefficient  $E$  qui caractérise le glissement du fluide sur la paroi solide. Cette hypothèse de glissement, abandonnée depuis les travaux de Stokes et les expériences de Poiseuille (1846), semble revenir au devant de la scène ces dernières années.
- Formellement les équations de Navier de 1822 sont bien celles dénommées actuellement équations de Navier-Stokes. Un des problèmes que l'on peut soulever est que la viscosité dynamique  $\mu$  qui correspond à  $\varepsilon/2$  introduit par Navier :

$$\mu = \frac{2\pi}{15} \int_0^{+\infty} r^4 \tau(r) dr$$

Ne correspond pas à la définition physique de celle-ci.

- Ces équations vont être redécouvertes au moins 4 fois : Cauchy en 1823, Poisson en 1829, Saint-Venant en 1837 et Stokes en 1845.



## Lien avec les équations de Boltzmann

- Après adimensionalisation, en absence de force volumique, la densité de probabilité  $f(x, c, t)$  vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{grad} f = \frac{1}{Kn} Q(f, f) \quad (8)$$

où  $Q$  est l'opérateur de collision et  $Kn$  est le nombre de Knudsen (rapport du libre parcours moyen et d'une échelle de longueur macroscopique). Il vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f) \eta(c) dc = 0 \quad (9)$$

Pour  $\eta(c) = 1, \mathbf{c}$  ou  $\frac{1}{2}|\mathbf{c}|^2$

- Les grandeurs macroscopiques sont alors :
  - La masse volumique :

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, c, t) dc$$

- La vitesse :

$$\rho \mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, c, t) \mathbf{c} dc$$

# Les équations macroscopique

On pose  $\epsilon = \frac{1}{Kn}$ . En utilisant la propriété (9), et en cherchant un développement asymptotique formel des équations de Boltzmann sous la forme :

$$f_\epsilon(x, c, t) = f_0(x, c, t) + \epsilon f_1(x, c, t) + \epsilon^2 f_2(x, c, t) + \dots$$

A l'ordre deux on retrouve les équations de Navier-Stokes. La viscosité est alors :

$$\mu = nkT\tau_c$$

où  $\tau_c$  est le temps de collision,  $k$  constante de Boltzmann,  $T$  la température du fluide.

# Conclusion

- Il est assez étonnant de voir comment Navier a défini la puissance virtuelle des efforts "visqueux" qui correspond exactement au produit scalaire sur  $H^1(\Omega)$  (théorie du premier gradient). Il serait intéressant de voir si on peut trouver des théories d'ordre supérieur avec son approche !
- Les équations trouvées par Navier ont été contestées pendant très longtemps avant d'être considérées comme les bonnes équations pour décrire le mouvement des fluides.
- L'établissement de ces équations par d'autres méthodes clarifie le sens de la viscosité et des efforts visqueux. Mais a éliminé les conditions aux limites proposées par Navier.
- Ces derniers semblent pertinentes pour la micro-fluidique. Mais peut être aussi pour établir les théorèmes de régularités des solutions faibles !
- L'obtention rigoureuse des équations de NS à partir de Boltzmann est un sujet très vivant en mathématique.
- Un travail en 4D à partir de Boltzmann relativiste est une bonne piste.
- La formulation des équations de Navier-Stokes sur les variétés n'est pas une question complètement fermée.

# Quelques informations sur le GDR

- Le renouvellement sera demandé pour 2024.
- Vous serez sollicité pour confirmer la participation de votre laboratoire au GDR.
- En 2023 nous organiserons plusieurs manifestations
  - ▶ La réunion annuelle (fin juin ou début juillet 2023, probablement à La Rochelle).
  - ▶ Suite de l'atelier relativité générale et MMC, probablement à Troyes.
  - ▶ Des mini-cours (M. Petitot)
  - ▶ Rencontres Poisson à La Rochelle.
  - ▶ Réunion thématique du GDR en novembre 2023, probablement à Jussieu.