

framato~~me~~

26^{ème} Congrès Français de Mécanique

Contact de Nitsche et modèles de
poutre associés

28 août 2025

Matthieu SCHORSCH

Directeur de thèse : Pr. Yves RENARD

Co-directeurs de thèse : Pr. David DUREISSEIX & Pr. Thomas ELGUEDJ

Encadrants : Cédric POZZOLINI & Nadim MOUSSALLAM

CFM
2025

INSA

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON

LaMCoS
Laboratoire de Mécanique
des Contacts et des Structures
UMR 5259

Confidentialité



**Ce document contient du Savoir-Faire
Framatome**

EXPORT CONTROL

AL =	ECCN =
<p>Les biens marqués « AL » différent de « N » sont soumis aux autorisations d'exportation des Etats de l'Union Européenne lors d'une exportation à l'intérieur ou hors de l'Union Européenne.</p> <p>Les biens marqués « ECCN » différent de « N » ou « EAR99 » sont soumis aux autorisations de réexportation américaine. Avec ou sans marquage « AL :N », « ECCN :N » ou « ECCN:EAR99 », une autorisation d'exportation peut néanmoins être nécessaire en fonction de la destination et de l'utilisation de ces biens.</p>	

REGLES DE PROTECTION DE L'INFORMATION



C1 - Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document sont à **diffusion limitée**



C2 : Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document sont **Framatome confidentiels** ; leur divulgation, altération ou disparition sont préjudiciables, avec un impact significatif à fort, pour Framatome. **Les supports, lorsque communiqués, et les informations qu'ils contiennent, sont destinés aux seuls participants à la réunion ou au périmètre désigné dans le pied-de-page. Chacun s'engage à ne les communiquer et à n'en relater les échanges qu'avec discernement et en mentionnant explicitement « à ne pas rediffuser / à ne pas divulguer ».**



C3 – Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document relèvent du **secret Framatome**. **Chacun s'engage à tenir secrètes les informations tant écrites qu'orales qui y sont exposées. Chaque dépositaire de ce document s'interdit de le communiquer à toute personne morale ou physique, y compris au sein de Framatome, sans l'accord du président de séance**

Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document sont confidentiels, protégés par les dispositions applicables en matière de propriété intellectuelle et comportent des éléments soumis à la réglementation sur le secret des affaires. Toute reproduction, modification, transmission à tout tiers ou publication totale ou partielle du document et/ou de son contenu est interdite sans l'accord préalable et écrit de Framatome. Ce document et toute information qu'il contient ne doivent en aucun cas être utilisés à d'autres fins que celles pour lesquelles ils ont été communiqués. Tout acte de contrefaçon ou tout manquement aux obligations ci-dessus est passible de sanctions disciplinaires et de poursuites judiciaires.

- © Framatome – Tous droits réservés

Sommaire

1. Contexte

1.1 Mécanique du contact

1.2 Méthodes pour simuler numériquement le contact

1.3 La méthode de Nitsche

2. Objectifs de la thèse

2.1 Modèles classiques de poutre avec Nitsche

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

2.3 Conclusion et perspectives

1.1 La mécanique du contact

- Nécessité de prendre en compte le contact entre des solides déformables ou rigides
- Conditions de contact formulées par des inégalités et des équations non-linéaires

$$\underbrace{\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{l} & \text{on } \Gamma_l, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_N. \end{cases}}_{\text{Problème statique d'élasticité linéaire}}$$

+

$$\underbrace{\begin{cases} u_n \leq g & (i) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0 & (ii) \\ \sigma_n(\mathbf{u})(u_n - g) = 0 & (iii) \\ \sigma_t(\mathbf{u}) = 0 & (iv) \end{cases}}_{\text{Conditions de contact (sans frottement)}}$$

Problème statique d'élasticité linéaire

Conditions de contact (sans frottement)

- Le problème de contact peut s'écrire sous forme faible et il faut utiliser le cadre mathématique des **inéquations variationnelles**

1.1 La mécanique du contact

❑ Problèmes ouverts (sauf cas particuliers) :

- Existence
- Unicité
- Stabilité et convergence des schémas numériques

S'assurer de la convergence du **problème discrétisé** vers le problème continu

❑ Méthodes de simulation numérique du contact :

- La méthode de pénalité
- Les méthodes Lagrangiennes
- Les méthodes de Nitsche

1.2 Les méthodes pour simuler numériquement le contact

- **Méthode de pénalité :**

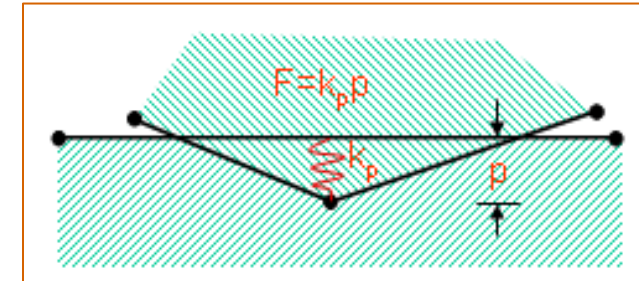
$$\begin{aligned} u_n &\leq g \quad (i) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) &\leq 0 \quad (ii) \\ \sigma_n(\mathbf{u})(u_n - g) &= 0 \quad (iii) \\ \sigma_t(\mathbf{u}) &= 0 \quad (iv) \end{aligned}$$

remplacées par

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = -K_N[g - u_n]_+$$

Autorise l'inter-pénétration :

Introduction d'un « ressort » de rappel de raideur K_N



- **Méthodes Lagrangiennes :**

N'autorise pas d'inter-pénétration :

Introduction d'un multiplicateur de Lagrange qui représente la réaction de contact

- **Lagrangien pur :** une inconnue supplémentaire
- **Lagrangien augmenté :** algorithme itératif sur le multiplicateur de Lagrange pour faire respecter la contrainte de non-pénétration

1.2 Les méthodes pour simuler numériquement le contact

Inconvénients de ces méthodes :

Pénalité :

- Méthode non consistante
- Paramètre K_N trop faible \Rightarrow trop grande pénétration
- Paramètre K_N trop élevé \Rightarrow matrice mal-conditionnée, algorithme de résolution qui ne converge pas
- Paramètre K_N dépend de la taille de maille h et du pas de temps Δt

Lagrangien pur :

- Inconnue supplémentaire
- Problème d'optimisation sous contrainte dur à résoudre (condition inf-sup)

Lagrangien augmenté :

- Ajout d'un algorithme itératif qui peut être coûteux

$[a]_+ := (|a| + a)/2$

1.3 La méthode de Nitsche

Autre méthode : **La méthode de Nitsche**

$u_n \leq g \text{ (i)}$ $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0 \text{ (ii)}$ $\sigma_n(\mathbf{u})(u_n - g) = 0 \text{ (iii)}$ $\sigma_t(\mathbf{u}) = 0 \text{ (iv)}$

$\forall r > 0$, les conditions de contact (i) – (iii) sont équivalentes à

$\sigma_n(\mathbf{u}) = -\frac{1}{r}[u_n - r\sigma_n(\mathbf{u})]_+$

←

Théorème Chouly-Hild [1] Chouly, Hild, 2013

→

Cette méthode comporte plusieurs avantages : Consistance, indépendance au paramètre r et convergences optimales :
Quand $h \rightarrow 0$, h la taille de maille :

	Pénalité	Nitsche
Contact élastique/rigide	convergence au mieux en $O(h)$ avec $h = 1/K_N$! [2] Chouly, Hild, 2012	convergence en $O(h)$ [1] Chouly, Hild, 2013
Contact élastique/élastique	convergence au mieux $O(\sqrt{h})$ [3] Stenberg, 2024	convergence en $O(h)$ [3] Stenberg, 2024

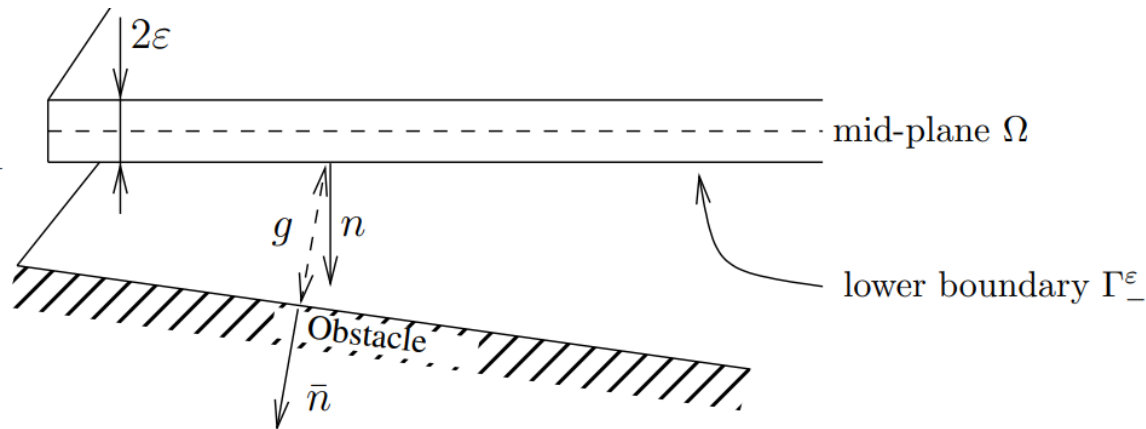
1.3 La méthode de Nitsche

Pourquoi n'est-elle pas plus utilisée dans les modèles numériques de calculs industriels ?

- Besoin de précision → dilemmes liés aux temps de calculs prohibitifs
- Recours à des modèles de **structures élancées** (poutres, plaques, coques)

Problème : les grandeurs d'intérêt (déplacements, contraintes) que la méthode de Nitsche délivre proviennent de l'utilisation d'un tenseur de contraintes 3D

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = -\frac{1}{r}[u_n - r\sigma_n(\mathbf{u})]_+ \quad \text{avec } \sigma_n(u) = (\sigma(u)n) \cdot n \text{ la composante normale des densités de forces}$$



En structures élancées :
pas de notion d'épaisseur !

2. Objectifs de la thèse

Objectif : Réaliser l'extension des méthodes de Nitsche aux structures élancées

Travaux préliminaires sur les plaques [4] Fabre et al, 2021

Travail à réaliser pour les poutres et pour les coques

Méthodologie :

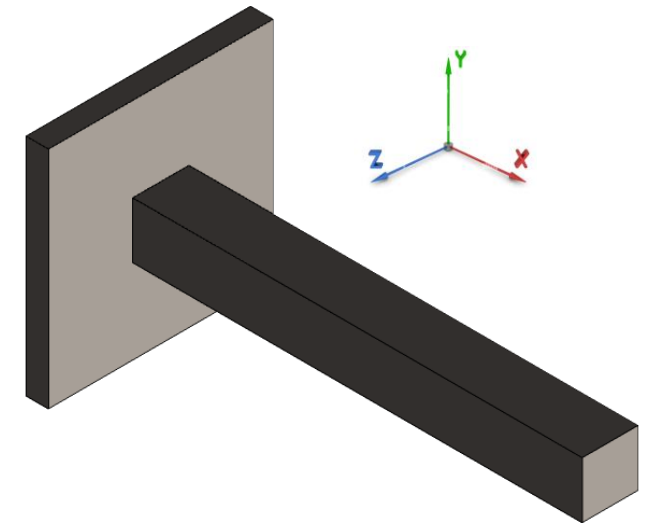
- Partir de la formulation variationnelle d'un problème de contact 3D
- Appliquer les hypothèses cinématiques de différents modèles de structures élancées et étudier si la richesse du contact de Nitsche 3D est conservée

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Formulation variationnelle pour une structure 3D avec le contact de Nitsche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega - r \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}) \, d\Gamma_C \\ + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [(g - u_n) - r \sigma_n(\mathbf{u})]_+ (v_n - r \sigma_n(\mathbf{v})) \, d\Gamma_C \\ = \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_l} \mathbf{l} \mathbf{v} \, d\Gamma_l \end{array} \right.$$

Modèles de structures élancées → hypothèses cinématiques sur les déplacements \mathbf{u} qui vont impacter les termes de contact de Nitsche



2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Théorie des poutres

Equations d'équilibre 3D :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$



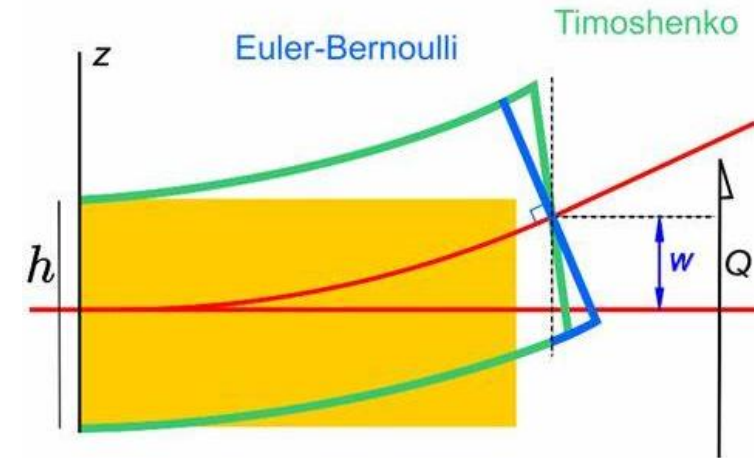
Type	Momentum balance	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$N = \int_A \sigma_{xx} \, dA$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$M_x = \int_A (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}) \, dA$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$Q_y = \int_A \sigma_{xy} \, dA$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$M_z = \int_A -y\sigma_{xx} \, dA$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$Q_z = \int_A \sigma_{xz} \, dA$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$M_y = \int_A z\sigma_{xx} \, dA$

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Cinématique (petites déformations)

Timoshenko :

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= w_x(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x), \\u_y(x, y, z) &= w_y(x) - z\theta_x(x), \\u_z(x, y, z) &= w_z(x) + y\theta_x(x).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon(x) + z\chi_y(x) - y\chi_z(x), \\2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \gamma_y(x) - z\chi_x(x), \\2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \gamma_z(x) + y\chi_x(x),\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx}, \quad \chi_y = \frac{d\theta_y}{dx}, \quad \chi_z = \frac{d\theta_z}{dx}, \quad \chi_x = \frac{d\theta_x}{dx}, \quad \gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z, \quad \gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y.$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0 !$$

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Lois constitutives élastiques

Hypothèse en théorie des poutres → tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ anti-plan ($\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$)

Contraintes globales

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

Contraintes généralisées
(section circulaire)

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon, \\ Q_y &= GA_y\gamma_y, \\ Q_z &= GA_z\gamma_z, \\ M_y &= EI_y\chi_y, \\ M_z &= EI_z\chi_z, \\ M_x &= G(I_z + I_y)\chi_x. \end{aligned}$$

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Modèle de Timoshenko

Table 1: Equations for Timoshenko beam theory

Type	Momentum balance	Strain-displacement	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx};$	$N = EA\varepsilon$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$\chi_x = \frac{d\theta_x}{dx};$	$M_x = G(I_y + I_z)\chi_x$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$\gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z;$	$Q_y = GA_y\gamma_y$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$\chi_z = \frac{d\theta_z}{dx};$	$M_z = EI_z\chi_z$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$\gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y;$	$Q_z = G_zA_z\gamma_z$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$\chi_y = \frac{d\theta_y}{dx};$	$M_y = EI_y\chi_y$

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Formulation variationnelle pour une structure 3D avec le contact de Nitsche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega - r \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}) \, d\Gamma_C \\ + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [(g - u_n) - r \sigma_n(\mathbf{u})]_+ (v_n - r \sigma_n(\mathbf{v})) \, d\Gamma_C \\ = \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_C} \mathbf{l} \mathbf{v} \, d\Gamma_l \end{array} \right.$$

Avec les hypothèses cinématiques du modèle de Timoshenko :

Energie de déformation :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_0^L \left[N \frac{d\delta w_x}{dx} + M_z \frac{d\delta \theta_z}{dx} + M_y \frac{d\delta \theta_y}{dx} + M_x \frac{d\delta \theta_x}{dx} + Q_y \left(\frac{d\delta w_y}{dx} - \delta \theta_z \right) + Q_z \left(\frac{d\delta w_z}{dx} + \delta \theta_y \right) \right] dx$$

Efforts extérieurs :

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_C} \mathbf{l} \mathbf{v} \, d\Gamma_l = \int_0^L [q_x \delta w_x + q_y \delta w_y + q_z \delta w_z + m_x \delta \theta_x + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z] dx$$

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Terme de contact de Nitsche

$$- \int_{\Gamma_C} r \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}) \, d\Gamma_C + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [(g - u_n) - r \sigma_n(\mathbf{u})]_+ (v_n - r \sigma_n(\mathbf{v})) \, d\Gamma_C$$

$$= \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [g - u_n]_+ v_n \, d\Gamma_C$$

Contact pénalisé

Pas de contraintes dans l'épaisseur $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \sigma_n(u) = 0$

Formulation d'un contact pénalisé de raideur $r \Rightarrow$ Modèle pas suffisamment riche

Comment retrouver la richesse du terme de contact de Nitsche ?

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Proposition d'un nouveau modèle « Timoshenko enrichi » avec une notion de variation de l'épaisseur :

- Ajout de déplacements dans la section

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= w_x(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x), \\u_y(x, y, z) &= w_y(x) - z\theta_x(x) - y\alpha(x), \\u_z(x, y, z) &= w_z(x) + y\theta_x(x) - z\beta(x)\end{aligned}$$

- → Déformations ε_{yy} et ε_{zz} non nulles (dans l'épaisseur)
- Hypothèse supplémentaire : le tenseur des contraintes n'est plus anti-plan

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}^0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz}^0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma_{yy}^0, \sigma_{zz}^0 \\ \text{Constantes dans} \\ \text{la section} \end{matrix}$$

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Pour obtenir les équations d'équilibre et les lois constitutives du nouveau modèle
→ Principe des variations à la **fonctionnelle d'Hellinger-Reissner**

$$\text{HR1}(\sigma_{ij}, u_i) = \int_{\Omega} \left[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} - b_i u_i \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} l_i u_i d\partial\Omega$$

Avec les hypothèses cinématiques sur u_i et sur le tenseur de contraintes dans le terme $C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$

Deux nouvelles équations d'équilibre :

$$\frac{dM_{pz}}{dx} + P_y + m_{pz} = 0$$

$$\frac{dM_{py}}{dx} - P_z - m_{py} = 0$$

Avec les nouvelles contraintes et forces généralisées

$$\begin{aligned} M_{pz} &= - \int_A y \sigma_{xy} dA; & m_{pz} &= - \int_A y b_y dA - \oint_S y \sigma_{yy} n_y dS \\ M_{py} &= \int_A z \sigma_{xz} dA; & m_{py} &= \int_A z b_z dA + \oint_S z \sigma_{zz} n_z dS \end{aligned}$$

Contraintes dans l'épaisseur

$$\begin{aligned} P_y &= \int_A \sigma_{yy} dA \\ P_z &= \int_A \sigma_{zz} dA \end{aligned}$$

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Tableau récapitulatif du nouveau modèle :

Type	Momentum balance	Strain-displacement	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx};$	$N = (\lambda + 2\mu)A\varepsilon - \lambda A(\alpha + \beta)$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$\chi_x = \frac{d\theta_x}{dx};$	$M_x = G(I_y + I_z)\chi_x$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$\gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z;$	$Q_y = GA_y\gamma_y$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$\chi_z = \frac{d\theta_z}{dx};$	$M_z = EI_z\chi_z$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$\gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y;$	$Q_z = GA_z\gamma_z$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$\chi_y = \frac{d\theta_y}{dx};$	$M_y = EI_y\chi_y$
4. Pinching:	$\frac{\partial M_{py}}{\partial x} - P_z + m_{py} = 0;$	$\chi_\beta = \frac{d\beta}{dx};$	$M_{py} = -GI_y\chi_\beta$
			$A\sigma_{zz}^0 = -(\lambda + 2\mu)A\beta + \lambda A(\varepsilon - \alpha)$
	$\frac{\partial M_{pz}}{\partial x} - P_y + m_{pz} = 0;$	$\chi_\alpha = \frac{d\alpha}{dx};$	$M_{pz} = -GI_z\chi_\alpha$
			$A\sigma_{yy}^0 = -(\lambda + 2\mu)A\alpha + \lambda A(\varepsilon - \beta)$

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Modèle de Timoshenko-enrichi :

- Equations d'équilibre liées au pincement avec de nouveaux efforts généralisés de pincement
- Description d'une variation d'épaisseur et de contraintes dans l'épaisseur

Mais :

- **Couplage d'équations** qui n'est pas présent en Timoshenko (avec une section circulaire)

Constitution

$$N = A((\lambda + 2\mu)\varepsilon - \lambda(\alpha + \beta)) \quad *$$

$$M_x = G(I_y + I_z)\chi_x$$

$$Q_y = GA_y\gamma_y$$

$$M_z = (\lambda + 2\mu)I_z\chi_z$$

$$Q_z = G_z A_z \gamma_z$$

$$M_y = (\lambda + 2\mu)I_y\chi_y$$

$$M_{py} = -GI_y\chi_\beta$$

$$P_z = A(-\beta(\lambda + 2\mu) + \lambda(\varepsilon - \alpha)) \quad *$$

$$M_{pz} = GI_z\chi_\alpha$$

$$P_y = A(-\alpha(\lambda + 2\mu) + \lambda(\varepsilon - \beta)) \quad *$$

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Formulation variationnelle du modèle de Timoshenko-enrichi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\theta}, p) \in \mathbf{K}_T \text{ tel que pour tout } (\delta \boldsymbol{w}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta p) \in \mathbf{K}_T \\ a((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\theta}, p), (\delta \boldsymbol{w}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta p)) \\ - r \int_{\Gamma_C} \boxed{\sigma_{yy}((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\theta}, p)) \sigma_{yy}((\delta \boldsymbol{w}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta p))} \\ + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} \left[(g - (w_y + \frac{b}{2}\alpha)) \boxed{- r \sigma_{yy}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\theta}, p)} \right]_+ \sigma_{yy}(\delta \boldsymbol{w}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta p) \\ = L((\delta \boldsymbol{w}, \delta \boldsymbol{\theta}, \delta p)) \end{array} \right.$$

Le terme de contact de Nitsche est plus riche qu'un contact pénalisé (car $\sigma_n(u)$ n'est plus nul)

2.3 Résultats numériques

Modèle implémenté dans Getfem :

<https://getfem.org/>

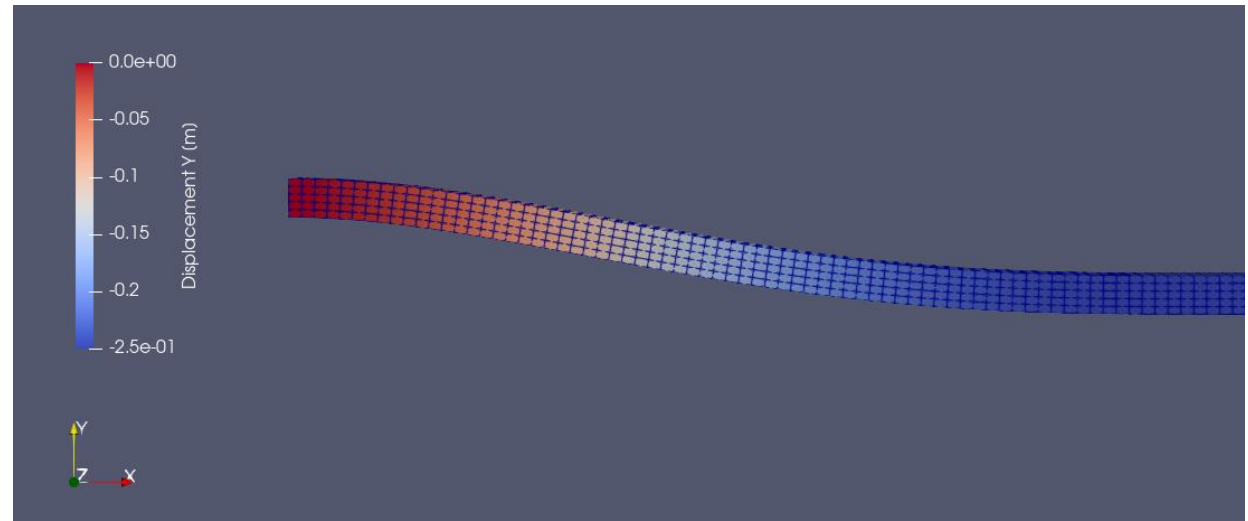
[6] Renard et Poullos, 2020

**Poutre encastrée avec effort surfacique
avec contact sur plan**

Solution de référence 3D :

**Corps 3D calculé par Lagrangien
augmenté**

[4] Fabre et al, 2021



2.3 Résultats numériques

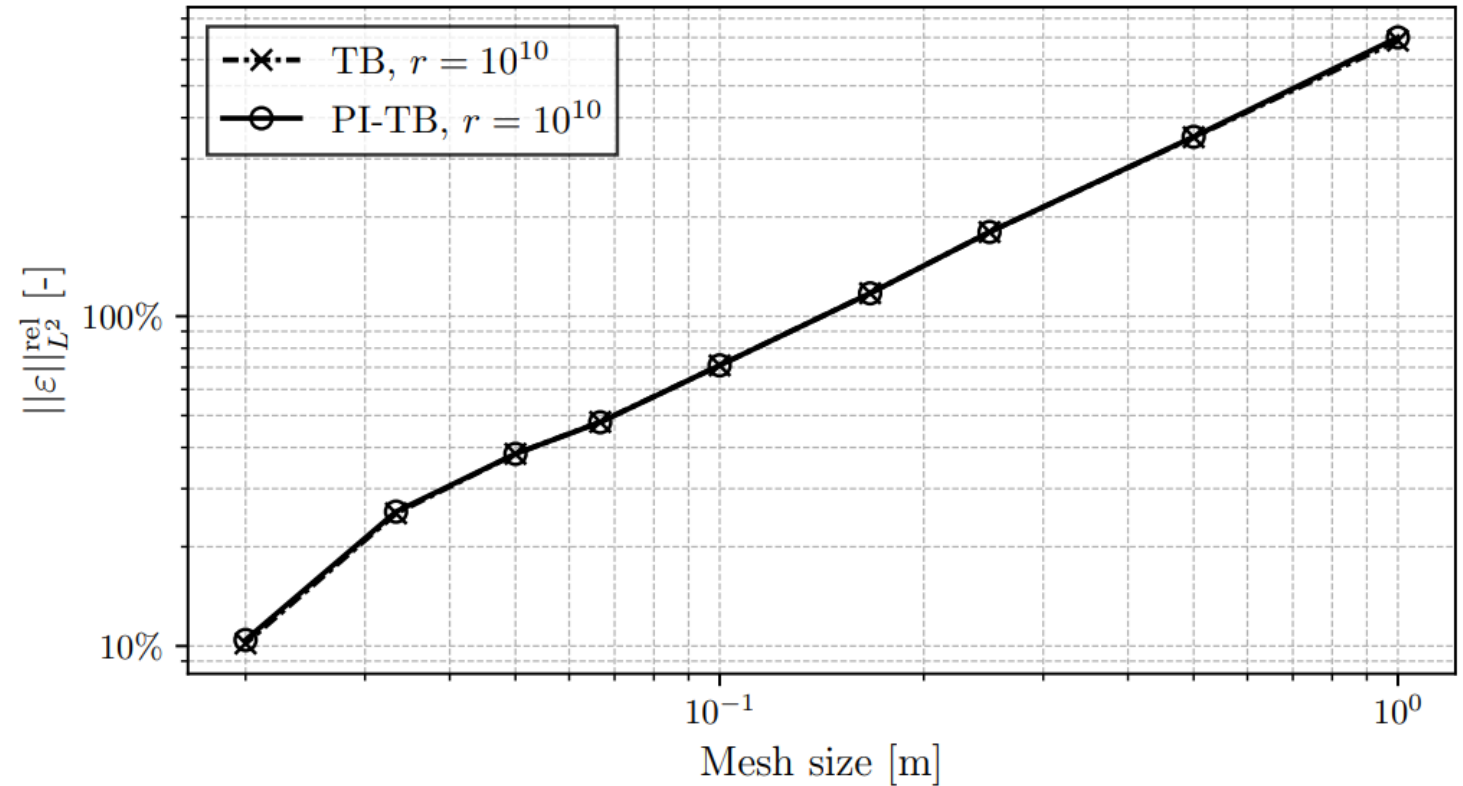
Variante méthode de Nitsche :

- $\Theta = -1$ Version antisymétrique, converge $\forall r > 0$

$r \gg 0$, les deux méthodes convergent

[4] Fabre et al, 2021

[5] Chouly et al, 2017



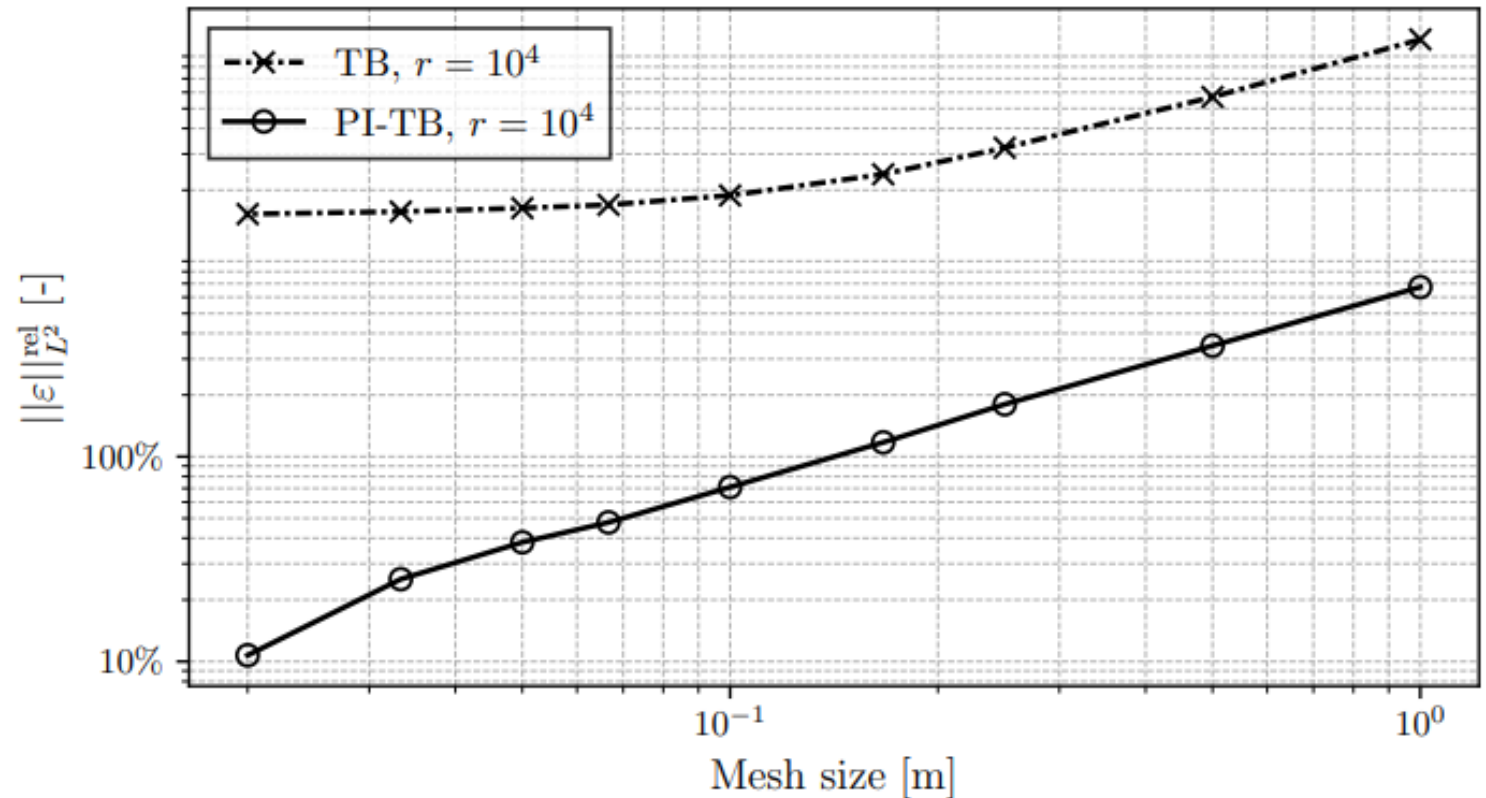
Evolution of the relative error on strain tensor ε as a function of the mesh size.
P1-elements and $\theta = -1$

2.3 Résultats numériques

r plus faible :

La méthode de pénalité ne respecte plus les conditions de Signorini

La convergence persiste avec la méthode de Nitsche



Evolution of the relative error on strain tensor ε as a function of the mesh size.
P1-elements and $\theta = -1$

2.3 Résultats théoriques

En parallèle:

Travail pour adapter les résultats théoriques de la méthode de Nitsche [1] Chouly, Hild, 2013

- Aspect bien posé : Existence, unicité, qui dépend de façon continue des données
- Consistance de la méthode de Nitsche
- Estimateurs d'erreurs a priori

Objectif : Proposer un modèle numérique robuste, fiable, validé par la théorie

2.3 Conclusion et perspectives

Conclusions :

- Les modèles classiques de poutre ne sont pas suffisamment riches pour le contact de Nitsche
- Enrichir la cinématique permet d'hériter des avantages théoriques de Nitsche

Perspectives :

- Prendre en compte les phénomènes d'ovalisation pour des tubes
- Même travail pour les plaques et les coques
- Loi de comportement élasto-plastique
- Aspects dynamiques (coefficient de restitution, viscosité, schémas adaptés)

framato

Merci

Bibliographie

- [1] Chouly F, Hild P. “A Nitsche-Based Method for Unilateral Contact Problems: Numerical Analysis”. *SIAM J Numer Anal.* janv 2013;51(2):1295-307.
<https://doi.org/10.1137/12088344X>
- [2] Chouly, Franz, et Hild, Patrick. « On Convergence of the Penalty Method for Unilateral Contact Problems ». *Applied Numerical Mathematics* 65 (mars 2013): 27-40.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.10.003>.
- [3] Rolf Stenberg, “The 11th Contact Mechanics International Symposium Lyon, May 22-24, 2024”, The 11th Contact Mechanics International Symposium Lyon, May 22-24, 2024
- [4] Fabre, Mathieu, Pozzolini, Cédric et Renard, Yves. « Nitsche-based models for the unilateral contact of plates ». *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 55 (2021): S941-67. <https://doi.org/10.1051/m2an/2020063>.
- [5] Chouly, Franz, Fabre, Mathieu, Hild, Patrick, Mlika, Rabii, Pousin, Jérôme, et Renard, Yves. « An overview of recent results on Nitsche’s method for contact problems». *in: Geometrically unfitted finite element methods and applications, volume 121 of Lect. Notes Comput. Sci. Eng., Springer, Cham, 2017, pp. 93–141.* http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-71431-8_4
- [6] Renard, Yves et Poulios, Konstantinos. « GetFEM: Automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language » (2020).
<http://dx.doi.org/10.1145/3412849>.

Toute reproduction, modification, transmission à tout tiers ou publication totale ou partielle du document et/ou de son contenu est interdite sans l'accord préalable et écrit de Framatome.

Ce document et toute information qu'il contient ne doivent en aucun cas être utilisés à d'autres fins que celles pour lesquelles ils ont été communiqués.

Tout acte de contrefaçon ou tout manquement aux obligations ci-dessus est passible de sanctions disciplinaires et de poursuites judiciaires.