

Fondement et lien des méthodes de Lagrangien augmenté, penalité et Nitsche pour l'approximation des conditions de contact et frottement

Yves Renard, Université de Lyon, Institut Camille Jordan,
LAMCOS

26ème Congrès Français de Mécanique, Metz

25-29 août 2025

Plan

- ① Le problème de contact statique en petites déformations
- ② Le lagrangien augmenté
- ③ Les autres fonctions de complémentarité
- ④ Méthode de Nitsche pour le contact en petites déformations
- ⑤ Méthode de Nitsche pour le contact en grandes déformations
- ⑥ Méthode de Nitsche pour les structures minces
- ⑦ Le problème élastodynamique avec contact

1. Le problème de contact statique en petites déformations

Le problème de contact

Pour $i = 1, 2$

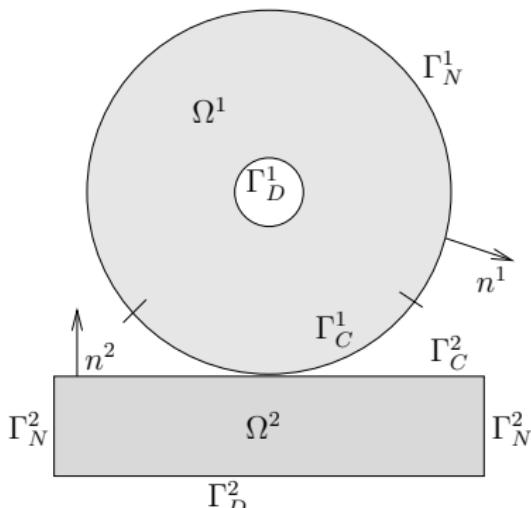
$$-div(\sigma(u^i)) = f^i, \text{ dans } \Omega_i,$$

$$\sigma(u^i) = \lambda div(u^i)I + 2\mu\varepsilon(u^i),$$

$$\varepsilon(u^i) = (\nabla u^i + (\nabla u^i)^T)/2,$$

$$\sigma(u^i)n^i = F^i \text{ sur } \Gamma_N^i,$$

$$u^i = 0 \text{ sur } \Gamma_D^i.$$



Soit Π projection orthogonale de Γ_C^1 sur Γ_C^2 , on pose

$$[\![u]\!] = u^2(\Pi(x)) - u^1(x), \quad [\![u]\!]_N = [\![u]\!] \cdot n_2,$$

$$\sigma_N = -(\sigma(u_1)(x)n^1) \cdot n_2 = (\sigma(u_2)(\Pi(x))n^2) \cdot n_2 \text{Jac}(\Pi)(x),$$

$$\sigma_T = \sigma(u_1)(x)n^1 + \sigma_N n_2 = -\sigma(u_2)(\Pi(x))n^2 \text{Jac}(\Pi)(x) + \sigma_N n_2,$$

Condition de contact sans frottement (petites déformations) avec Γ_C^1 surface esclave, Γ_C^2 surface maître, avec $g(x)$ gap initial :

$$[\![u]\!]_N \leq g(x); \quad \sigma_N \leq 0; \quad [\![u]\!]_N \sigma_N = 0, \quad \sigma_T = 0 \text{ sur } \Gamma_C^1.$$

Le problème d'optimisation correspondant

On pose :

$$a^i(u^i, v^i) = \int_{\Omega^i} \sigma(u^i) : \varepsilon(v^i) dx,$$

$$\ell^i(v^i) = \int_{\Omega^i} f^i \cdot v^i dx + \int_{\Gamma_N^i} F^i \cdot v^i d\Gamma,$$

Alors l'énergie potentielle du système s'écrit

$$J(u^1, u^2) = \frac{1}{2} a^1(u^1, u^1) - \ell^1(u^1) + \frac{1}{2} a^2(u^2, u^2) - \ell^2(u^2).$$

En posant

$$\begin{aligned} U_{adm} = & \left\{ (u^1, u^2) \in H^1(\Omega^1, \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega^2, \mathbb{R}^d) : \llbracket u \rrbracket \leq g \text{ sur } \Gamma_C^1, \right. \\ & \left. u^i = 0 \text{ sur } \Gamma_D^i \right\}, \end{aligned}$$

Le problème de contact se récrit simplement

Trouver (u^1, u^2) qui minimise $J(u^1, u^2)$ sur U_{adm} .

C'est un problème d'optimisation convexe sous contraintes convexes.

Le concept d'inéquation variationnelle

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour un problème d'optimisation convexe sans contraintes :

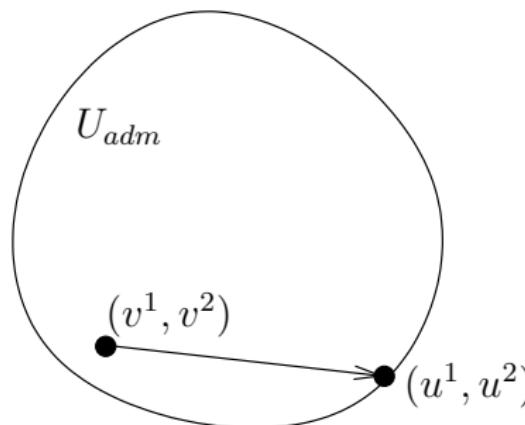
$$D_{u^1} J(u^1, u^2)[v^1] = D_{u^2} J(u^1, u^2)[v^2] = 0, \quad \forall v^1, v^2 \text{ avec } v^i = 0 \text{ sur } \Gamma_D^i,$$

où $D_{u^i} J(u^1, u^2)[v^i]$ est la dérivée directionnelle de $J(u^1, u^2)$ par rapport à u^i dans la direction v^i . On pourra noter aussi

$$D_{u^1, u^2} J(u^1, u^2)[v^1, v^2] = 0, \quad \forall v^1, v^2 \text{ avec } v^i = 0 \text{ sur } \Gamma_D^i.$$

La condition nécessaire et suffisante pour le problème d'optimisation avec la contrainte $(u^1, u^2) \in U_{adm}$ s'écrit:

$$D_{u^1, u^2} J(u^1, u^2)[u^1 - v^1, u^2 - v^2] \leq 0, \quad \forall (v^1, v^2) \in U_{adm}.$$



Or $D_{u^1, u^2} J(u^1, u^2)[v^1, v^2] = a(u^1, v^1) - \ell^1(v^1) + a(u^2, v^2) - \ell^2(v^2)$.
On arrive donc à l'inéquation variationnelle suivante:

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (u^1, u^2) \in U_{adm} \text{ tels que} \\ &a(u^1, u^1 - v^1) + a(u^2, u^2 - v^2) \\ &\leq \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2) \quad \forall (v^1, v^2) \in U_{adm}. \end{aligned}$$

[Fichera 1963], [Stampacchia 1964] [Lions & Stampacchia 1967] ...

Généralisation au frottement de Coulomb

Frottement de Coulomb : pas de potentiel.

Inéquation faible :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u^1, u^2) \in U_{adm} \text{ tels que} \\ & a(u^1, u^1 - v^1) + a(u^2, u^2 - v^2) + j(\sigma_N, [u]_T) - j(\sigma_N, [v]_T) \\ & \leq \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2), \quad \forall (v^1, v^2) \in U_{adm}, \end{aligned}$$

Avec

$$j(\sigma_N, v_T) = - \int_{\Gamma_C^1} \mathcal{F} \sigma_N |v_T| d\Gamma,$$

\mathcal{F} étant le coefficient de frottement.

Approximation par éléments finis

Principe de Galerkin, avec U_{adm}^h une approximation de dimension finie de U_{adm}

Trouver $(u^{1h}, u^{2h}) \in U_{adm}^h$ tels que
$$a(u^{1h}, u^{1h} - v^{1h}) + a(u^{2h}, u^{2h} - v^{2h}) \leq \ell^1(u^{1h} - v^{1h}) + \ell^2(u^{2h} - v^{2h}) \quad \forall (v^{1h}, v^{2h}) \in U_{adm}^h.$$

Des preuves de convergence ont été prouvées pour certains choix de U_{adm}^h [Haslinger .1983] [Ben Belgacem 2000] [Hild, Renard 2012] [Drouet Hild 2015] ...

Question : comment résoudre numériquement l'inéquation variationnelle discrète ?

Pénalisation

On peut approcher l'inéquation variationnelle en remplaçant la condition de contact unilatérale par la condition :

$$\sigma_N = -\frac{1}{\epsilon}(\llbracket u \rrbracket_N - g)_+,$$

ce qui correspond à une réponse élastique de raideur $\frac{1}{\epsilon}$ de l'interpénétration des deux solides. Le problème approché par pénalisation s'écrit

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\epsilon}(\llbracket u \rrbracket_N - g)_+ \llbracket v \rrbracket_N \\ = \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2) \quad \forall (v^1, v^2). \end{aligned}$$

On peut alors résoudre le problème discret grâce à un algorithme de Newton-Raphson par exemple.

La plupart des logiciels de calcul de structures ont commencé par proposer une approximation par pénalisation.

Il faut ϵ petit pour que le contact soit bien représenté, mais cela donne un problème non-linéaire mal conditionné.

Le lagrangien
simple

Algorithmme
d'Uzawa

Le lagrangien
augmenté
proximal

Comment
obtient-on un
lagrangien
proximal ?

Algorithmme
d'Uzawa sur le
lagrangien
augmenté

2. Le lagrangien augmenté proximal

Le lagrangien simple

On considère le lagrangien

$$\mathcal{L}(u^1, u^2, \lambda_N) = J(u^1, u^2) - \int_{\Gamma_C^1} \lambda_N (\llbracket u \rrbracket_N - g),$$

sous la contrainte

$$\lambda_N \leq 0.$$

Le multiplicateur représentant la pression de contact σ_N . Le système d'optimalité de ce lagrangien s'écrit :

Trouver u^1, u^2 et $\lambda_N \leq 0$ tels que

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) - \int_{\Gamma_C^1} \lambda_N \llbracket v \rrbracket_N \\ = \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2) \quad \forall (v^1, v^2). \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_C^1} (\lambda_N - \mu_N) (\llbracket u \rrbracket_N - g) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \mu_N \leq 0.$$

Apparemment, on n'a pas gagné grand chose puisque le problème est toujours sous contraintes, mais on peut utiliser l'**algorithmme d'Uzawa**.

Algorithme d'Uzawa

On peut montrer que pour le problème discréétisé, l'algorithme suivant converge pour ρ petit.

- ① On part de λ_N^0 donné
- ② Pour λ_N^n donné, on résout

$$a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) - \int_{\Gamma_C^1} \lambda_N^n \llbracket v \rrbracket_N = \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2),$$

$\forall (v^1, v^2)$, qui est ici un problème linéaire.

- ③ On met à jour le multiplicateur par

$$\lambda_N^{n+1} = (\lambda_N^n - \rho(\llbracket u \rrbracket_N - g))_-$$

- ④ On boucle à l'étape 2 jusqu'à convergence.

Il s'agit d'un algorithme de gradient projeté par rapport au multiplicateur.

Malheureusement la convergence est **très lente**.

Le lagrangien augmenté proximal

[J.J. Moreau 1965], [Rockafellar 1976], [Alart Curnier 1988]

On peut montrer que pour $r > 0$ (paramètre d'augmentation) le lagrangien augmenté suivant :

$$\mathcal{L}_r(u^1, u^2, \lambda_N) = J(u^1, u^2) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_N - r(\llbracket u \rrbracket_N - g))_-^2 - (\lambda_N)^2 d\Gamma,$$

au problèmes de régularité près, admet le même points selle que le lagrangien simple.

Le système d'optimalité de ce lagrangien s'écrit:

Trouver u^1, u^2 et λ_N tels que

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) - \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_N - r(\llbracket u \rrbracket_N - g))_- \llbracket v \rrbracket_N \\ = \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2) \quad \forall (v^1, v^2). \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_C^1} (\lambda_N + (\lambda_N - r(\llbracket u \rrbracket_N - g))_-) \mu_N d\Gamma = 0, \quad \forall \mu_N.$$

Ce Lagrangien est **sans contraintes**.

Comment obtient-on un lagrangien proximal ?

On peut remarquer que le problème de contact revient à minimiser

$$\bar{J}(u^1, u^2) = J(u^1, u^2) + I_{\mathbb{R}_-}([\![u]\!]_N - g),$$

où $I_{\mathbb{R}_-}$ est la fonction indicatrice de \mathbb{R}_- définie par

$$I_{\mathbb{R}_-}(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u(x) \in \mathbb{R}_- \forall x \in \Gamma_C^1 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors, le lagrangien simple est obtenu en considérant

$$\psi(u^1, u^2, \mu) = J(u^1, u^2) + I_{\mathbb{R}_-}([\![u]\!]_N - g + \mu),$$

par la formule

$$\mathcal{L}(u^1, u^2, \lambda_N) = -\psi^*(u^1, u^2, \lambda_N) = -\sup_{\mu} \left(\int_{\Gamma_C^1} \lambda \mu d\Gamma - \psi(u^1, u^2, \mu) \right),$$

où ψ^* désigne la conjuguée convexe (ou conjuguée de Fenchel-Legendre) de ψ par rapport à μ .

Pour le lagrangien proximal, on remplace $\psi(u^1, u^2, \mu)$ par

$$\psi_r(u^1, u^2, \mu) = J(u^1, u^2) + I_{\mathbb{R}_-}([\![u]\!]_N - g + \mu) + \frac{r}{2} \int_{\Gamma_C^1} \mu^2 d\Gamma,$$

On obtient le Lagrangien augmenté par dualisation

$$\mathcal{L}_r(u^1, u^2, \lambda_N) = -\psi_r^*(u^1, u^2, \lambda_N).$$

De plus la condition sur le multiplicateur donnée par le lagrangien simple

$$\int_{\Gamma_C^1} (\lambda_N - \mu_N)([\![u]\!]_N - g) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \mu_N \leq 0.$$

peut se récrire

$$-([\![u]\!]_N - g) \in N_{\Lambda_N}(\lambda_N),$$

Avec Λ_N l'ensemble des pressions de contact admissibles (négatives) et $N_{\Lambda_N}(\lambda_N)$ le cône normal à Λ_N en λ_N . On peut récrire facilement cela

$$\lambda_N = (I + rN_{\Lambda_N})^{-1}(\lambda_N - r([\![u]\!]_N - g)),$$

où $J_r = (I + rN_{\Lambda_N})^{-1}$ est appelée résolvante de Moreau-Yosida. C'est une application univoque contractante pour tout $r > 0$. On montre que la résolvante est ici la projection sur \mathbb{R}_- et donc que l'on obtient finalement

$$\lambda_N = (\lambda_N - r([\![u]\!]_N - g))_-,$$

C'est à dire ce que l'on obtient par Lagrangien augmenté.

Ce n'est pas un hasard, en calculant la conjugué convexe du lagrangien augmenté, on tombe exactement sur le calcul précédent. Ce qui est intéressant est que ces processus peuvent être appliqués à beaucoup d'autres cas, et notamment aux conditions de frottement.

Algorithme d'Uzawa sur le lagrangien augmenté

- ① On part de λ_N^0 donné
- ② Pour λ_N^n donné, on résout

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) - \int_{\Gamma^1_C} (\lambda_N - r(\llbracket u \rrbracket_N - g))_- \llbracket v \rrbracket_N \\ = \ell^1(u^1 - v^1) + \ell^2(u^2 - v^2) \quad \forall (v^1, v^2), \end{aligned}$$

qui est ici un problème non-linéaire.

- ③ On met à jour le multiplicateur par

$$\lambda_N^{n+1} = \lambda_N^n + \frac{\rho}{r} ((\lambda_N^n - r(\llbracket u \rrbracket_N - g))_- - \lambda_N^n)$$

- ④ On boucle à l'étape 2 jusqu'à convergence.

On peut montrer [Stadler 2004] que pour $\rho = r$, cet algorithme converge pour tout $r > 0$ et d'autant plus vite que r est grand. Par contre, plus r est grand, plus le premier problème (non-linéaire) est difficile à résoudre.

C'est un algorithme qui a été rendu populaire par Tod Laursen et est très largement utilisé dans les logiciels de calcul de structure.

3. Les autres fonctions de complémentarité

La technique du lagrangien augmenté proximal nous amène à la transformation de la relation de complémentarité

$$[\![u]\!]_N - g \leq 0; \quad \sigma_N \leq 0; \quad [\![u]\!]_N \sigma_N = 0,$$

en

$$\sigma_N - (\sigma_N - r([\![u]\!]_N - g))_- = 0.$$

D'une manière générale, on appelle fonction de complémentarité (ou fonction NCP) toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(a, b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq 0, ab = 0, b \leq 0.$$

Peut-on produire des fonctions de complémentarité plus régulières ?
Voir [Galántai 2011] pour un article de review. Des exemples :

$$\varphi_1(a, b) = (a - b)^2 - b|b| - a|a|,$$

$$\varphi_2(a, b) = |a - b| - b - a,$$

$$\varphi_3(a, b) = (ab)_+^p + (a_- + b_-)^p,$$

$$\varphi_3(a, b) = (ab)_+^p + (a_-^2 + b_-^2)^{p/2},$$

$$\varphi_4(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b,$$

$$\varphi_5(a, b) = \sqrt{(a - b)^2 + \lambda ab} - a - b, \lambda \in (0, 4),$$

...

En particulier φ_1 est dérivable.

Pour l'algorithme de Newton (dit semi-régulier) : Il vaut mieux une fonction **linéaire par morceaux**.

[Christensen 2002] [Stadler 2004] montrent pour la fonction de complémentarité provenant du Lagrangien augmenté que l'algorithme de Newton :

- Converge quadratiquement (localement) si la solution est sur un point de régularité
- Converge super-linéairement sinon.

Ce n'est pas le cas pour une fonction de complémentarité quadratique.

4. Méthode de Nitsche pour le contact en petites déformations

Quels désavantages pour la méthode du lagrangien augmenté:

- Le multiplicateur représente des **inconnues supplémentaires**.
- Le système à résoudre est de type **point selle**.
- Éléments finis : Il faut respecter une **condition inf-sup** (des méthodes de stabilisation existent)

La méthode de Nitsche contourne ces trois désavantages.

Méthode de Nitsche pour condition de Dirichlet

On souhaite résoudre

$$-\Delta u = f, \quad \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D.$$

Formulation faible classique : Trouver $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega).$$

$H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}$ contient la condition de Dirichlet.
Formulation Nitsche : Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_D} \partial_n u v dx + \int_{\Gamma_D} \frac{u}{\gamma} v dx - \theta \int_{\Gamma_D} u \partial_n v dx = \int_{\Omega} fv dx$$

La formulation admet un potentiel pour $\theta = 1$. Pour $\theta = -1$ elle est coercive pour tout $\gamma > 0$. $V = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$.

Méthode de Nitsche pour la condition de contact

De la formule de Green pour le problème élastique on tire

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) - \int_{\Gamma_c} \sigma_N(u) [[v]]_N d\Gamma \\ = \ell^1(v^1) + \ell^2(v^2) \quad \forall (v^1, v^2). \end{aligned}$$

Pour obtenir les versions symétriques et “anti-symétriques”, on opère la décomposition suivante [Chouly, Hild, Renard 2015]:

$$[[v]]_N = ([v]_N - \theta \gamma \sigma_N(v)) + \theta \gamma \sigma_N,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) \\ - \int_{\Gamma_c} \theta \gamma \sigma_N(u) \sigma_N(v) d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \sigma_N(u) ([v]_N - \theta \gamma \sigma_N(v)) d\Gamma \\ = \ell^1(v^1) + \ell^2(v^2) \quad \forall (v^1, v^2). \end{aligned}$$

On remplace alors le $\sigma_N(u)$ en utilisant la relation provenant du lagrangien augmenté, réécrite pour l'occasion

$$\sigma_N = -\frac{1}{\gamma}(\llbracket u \rrbracket_N - g - \gamma \sigma_N)_+,$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} a(u^1, v^1) + a(u^2, v^2) - \int_{\Gamma_C} \theta \gamma \sigma_N(u) \sigma_N(v) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} (\llbracket u \rrbracket_N - g - \gamma \sigma_N(u))_+ (\llbracket v \rrbracket_N - \theta \gamma \sigma_N(v)) d\Gamma \\ = \ell^1(v^1) + \ell^2(v^2) \quad \forall (v^1, v^2). \end{aligned}$$

La méthode se généralise de la même manière au frottement de Tresca ou de Coulomb. La formulation admet toujours un potentiel pour $\theta = 1$.

Les résultats théoriques obtenus

La formulation approchée dans un espace élément fini

$V^h \subset H^1(\Omega^1)^d \times H^1(\Omega^2)^d$ satisfaisant des conditions standards :

- **Consistance** : La solution du problème continue, si elle est régulière, est solution de la formulation de Nitsche.
- **Unicité** : pour $\gamma = \gamma_0 h$ et γ_0 suffisamment petit si $\theta \neq -1$, quelque soit γ_0 si $\theta = -1$.
- **Estimation a priori optimale** :

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^{1,h}\|_{1,\Omega^1} + \|u^2 - u^{2,h}\|_{1,\Omega^2} \\ & + \|\gamma^{1/2}(\sigma_N(u) + \frac{1}{\gamma}(\llbracket u^h \rrbracket_N - g - \gamma\sigma_N(u^h))_+)\|_{0,\Gamma_C} \\ & \leq C \inf_{(v^{1,h}, v^{2,h}) \in V^h} (\|u^1 - v^{1,h}\|_{1,\Omega^1} + \|u^2 - v^{2,h}\|_{1,\Omega^2} \\ & + \|\gamma^{-1/2}(\llbracket u \rrbracket_N - \llbracket v^h \rrbracket_N)\|_{0,\Gamma_C} + \|\gamma^{1/2}\sigma_N(u - v^h)\|_{0,\Gamma_C}). \end{aligned}$$

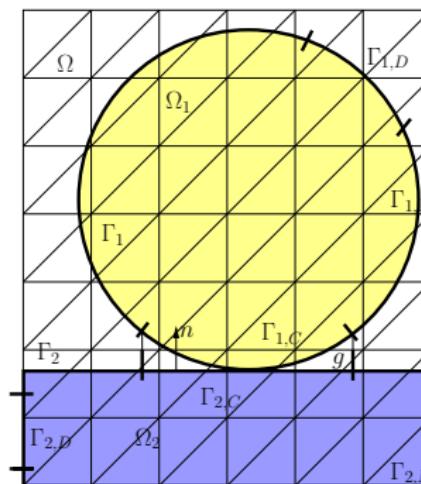
Ces résultats ont été établis dans [Chouly, Hild, Renard 2015] dans le cas déformable/rigide et dans [Fabre, Pousin, Renard 2015] pour le cas déformable/déformable en domaine fictif (avec une stabilisation supplémentaire).

Des résultats numériques en domaines fictifs

Pour W^h un espace élément fini sur le maillage du domaine fictif, on pose

$$V^h = W^h|_{\Omega_1} \times W^h|_{\Omega_2},$$

Pour les éléments ayant une trop petite intersection avec les domaines Ω_1 ou Ω_2 une stabilisation est nécessaire.



Thèse de Mathieu Fabre.

Lagrangien augmenté, penalité et Nitsche pour le contact

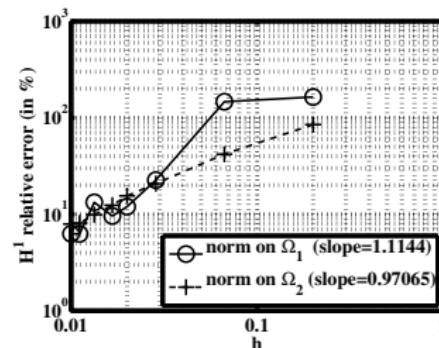
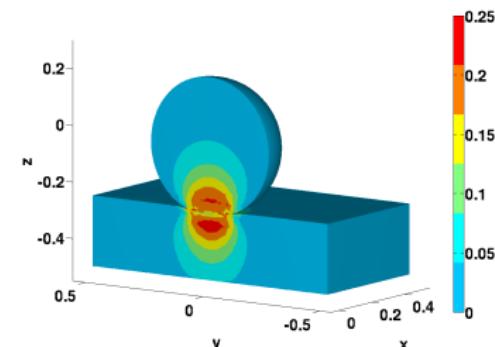
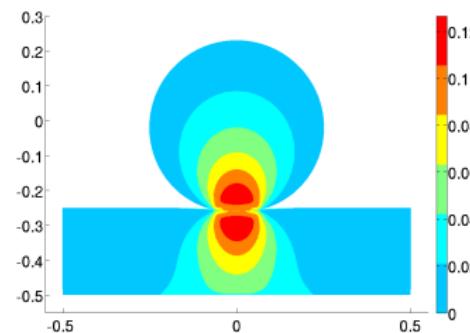
Yves Renard

Méthode de Nitsche pour condition de Dirichlet

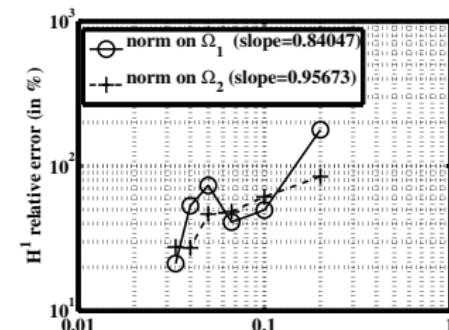
Méthode de Nitsche pour la condition de contact

Les résultats théoriques obtenus

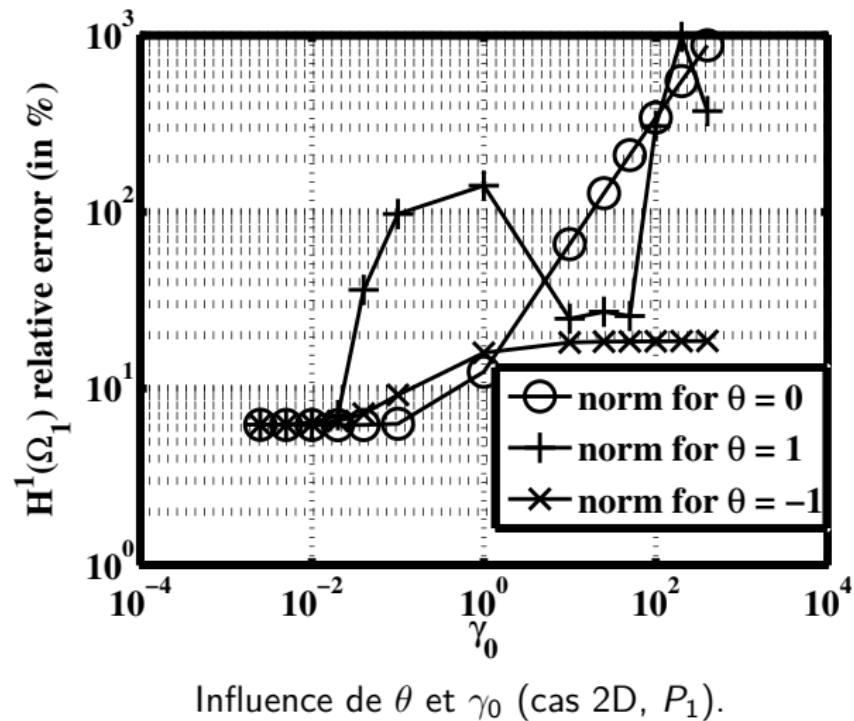
Des résultats numériques en domaines fictifs



cas 2D, $\theta = 1, P_1$



cas 3D, $\theta = 1, P_1$



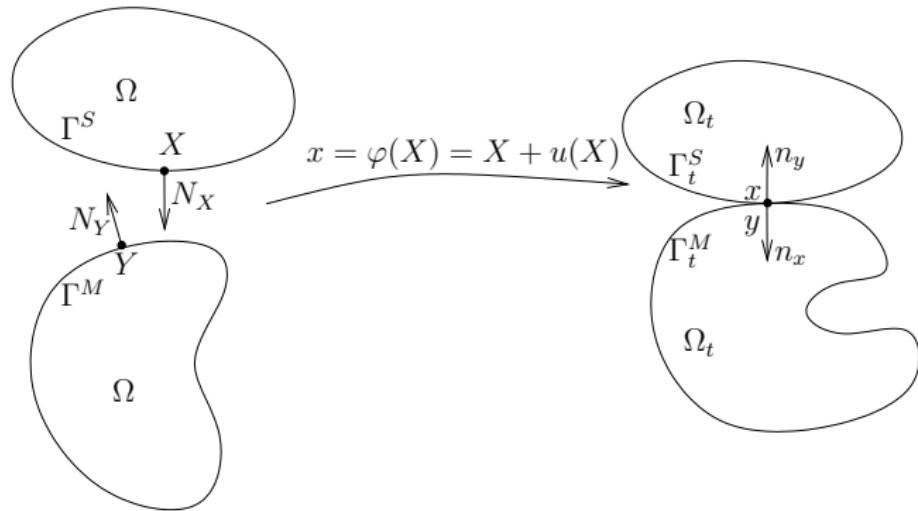
Conclusion. Les avantages :

- Pas de multiplicateur additionnel ni de condition inf-sup à satisfaire.
- Généricité du caractère intégral de la formulation (s'applique à tout type d'éléments finis : Lagrange, Hermite, isogéométrique ...)
- Analyse a priori plus simple que pour les autres formulations et également générique.

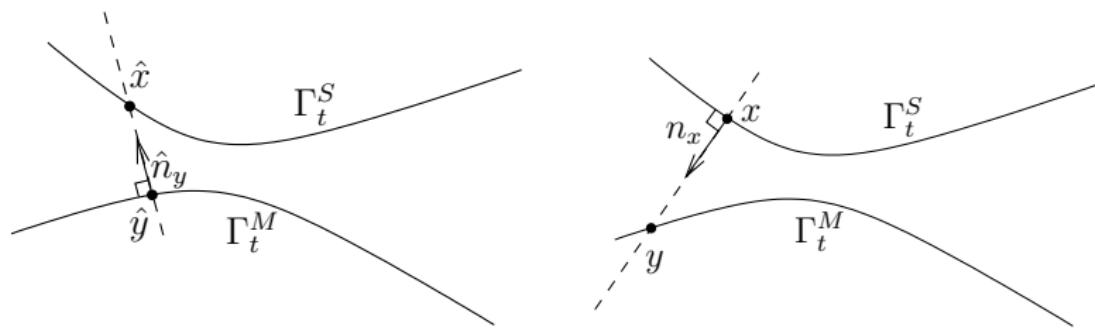
Analyse a posteriori dans [Chouly, Fabre, Hild, Pousin, Renard 2018], Overview [Chouly, Fabre, Hild, Mlika, Pousin, Renard 2018], analyse du cas avec frottement de Coulomb dans [Chouly, Hild, Lleras, Y. Renard 2022].

5. Méthode de Nitsche pour le contact en grandes déformations

Configuration de Référence et configuration déformée



Définition du gap



(a) Projection

(b) "Ray-tracing"

Comparaison des stratégies de projection et de "ray-tracing".

Fonction gap correspondant au "ray-tracing" (ou continuation de la normale):

$$g = n_x \cdot (y - x).$$

Lagrangien simple et lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda_N) = J(\varphi) + \int_{\Gamma_c^S} \lambda_N(X) g(X) \, d\Gamma,$$

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} W(\varphi(X)) \, dX - \int_{\Omega} \rho f \varphi(X) \, dX,$$

Système d'optimalité (avec la contrainte $\lambda_N \leq 0$) :

$$\begin{cases} \mathcal{D}J(\varphi)[\delta u] + \int_{\Gamma_c^S} \lambda_N \mathcal{D}g[\delta u] \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u, \\ \int_{\Gamma_c^S} (\lambda_N - \delta \lambda_N) g \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall \delta \lambda_N \leq 0, \end{cases}$$

Lagrangien augmenté:

$$\mathcal{L}_r(\varphi, \lambda_N) = J(\varphi) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_c^S} [\lambda_N + r g]_-^2 - \lambda_N^2 \, d\Gamma,$$

Système d'optimalité du lagrangien augmenté (sans contrainte):

$$\begin{cases} \mathcal{D}J(\varphi)[\delta u] - \int_{\Gamma_c^S} [\lambda_N + r g]_- \mathcal{D}g[\delta u] \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u, \\ -\frac{1}{r} \int_{\Gamma_c^S} (\lambda_N + [\lambda_N + r g]_-) \delta \lambda_N \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \lambda_N. \end{cases}$$

Simplification du système d'optimalité

Dérivée du gap:

$$\mathcal{D}g[\delta u] = -\frac{n_y}{n_x \cdot n_y} \cdot (\delta u(X) - \delta u(Y) + g \mathcal{D}n_x[\delta u]) ,$$

Difficulté du problème tangent : n_y n'est pas dérivable partout et la dérivée de n_y dans les parties régulières est extrêmement compliquée. En remarquant qu'un point de la surface esclave est ou en contact et $n_y = -n_x$ ou bien hors contact et $[\lambda_N + r g]_- = 0$ on peut simplifier le système d'optimalité en ($n_x \cdot \mathcal{D}n_x[\delta u] = 0$) [Poulios, Renard 2015] :

$$\begin{cases} \mathcal{D}J(\varphi)[\delta u] - \int_{\Gamma_c^S} [\lambda_N + r g]_- n_x \cdot (\delta u(X) - \delta u(Y)) d\Gamma = 0 & \forall \delta u, \\ -\frac{1}{r} \int_{\Gamma_c^S} (\lambda_N + [\lambda_N + r g]_-) \delta \lambda_N d\Gamma = 0 & \forall \delta \lambda_N . \end{cases}$$

On perd toutefois la symétrie du problème tangent.

Lagrangien augmenté, penalité et Nitsche pour le contact

Yves Renard

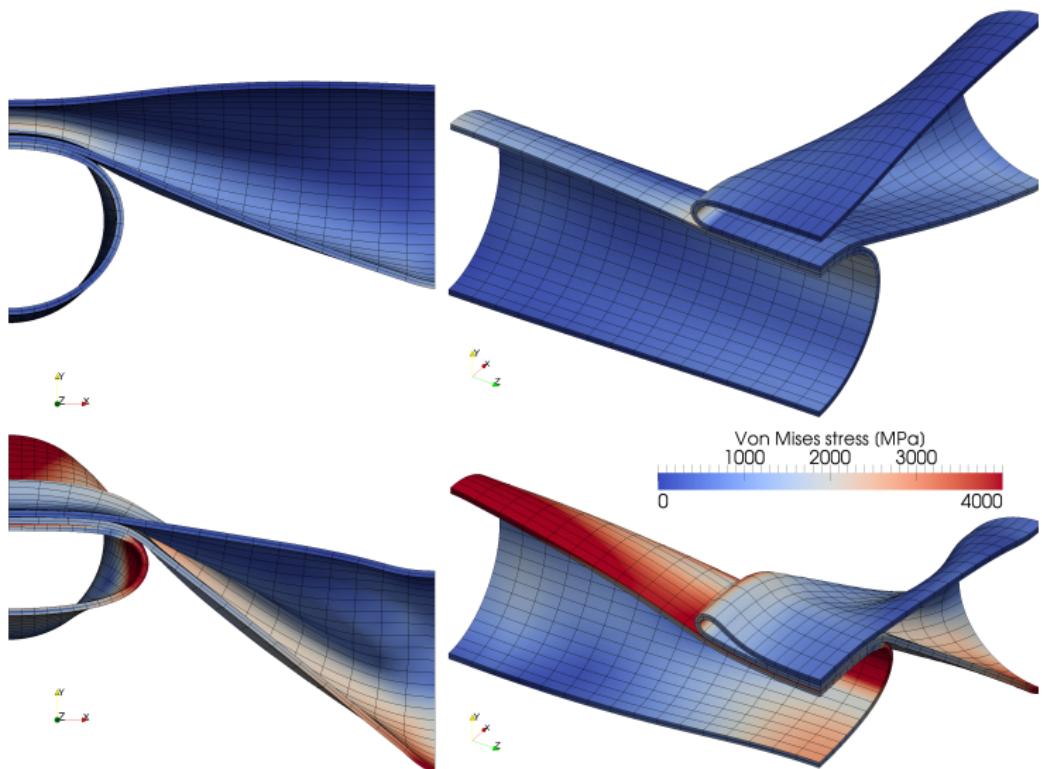
Configuration de Référence et configuration déformée

Définition du gap

Lagrangien simple et lagrangien augmenté

Simplification du système d'optimalité

Méthode de Nitsche



Configuration déformée de tubes se croisant.

Méthode de Nitsche

On obtient très simplement une méthode de Nitsche à partir de la formulation lagrangien augmenté. Ce qui donne:

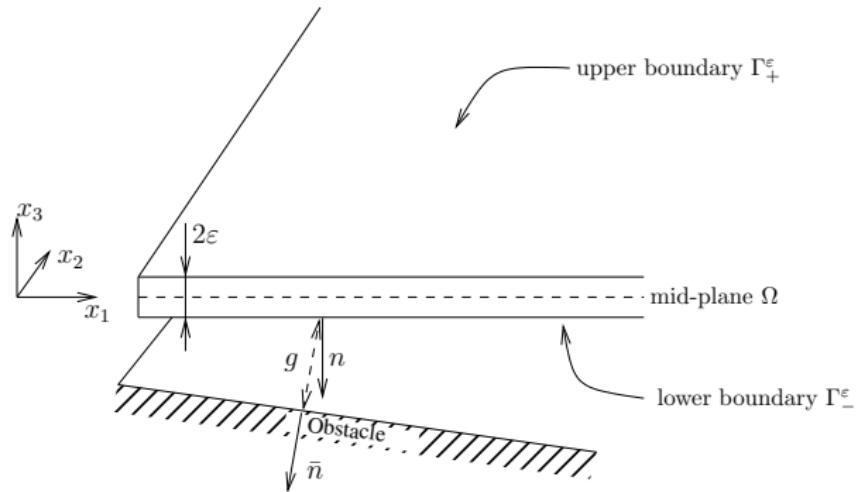
$$\mathcal{D}J(\varphi)[\delta u] - \int_{\Gamma_c^S} [\sigma_N(u) + r g]_- n_x \cdot (\delta u(X) - \delta u(Y)) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u$$

Ceci correspond à la variante $\theta = 0$.

Malheureusement, les autres variantes font intervenir la dérivée de $\sigma_N(u)$ ce qui les rend plus difficile à exploiter.

Une version non biaisée dans [Chouly, Mlika, Renard 2018].

6. Nitsche's method for plates



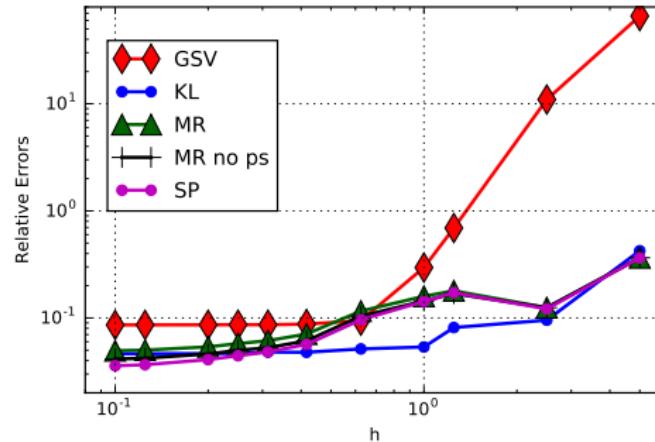
Mindlin model with additional pinch and no plane stress assumption

$$\mathbb{V}_{\text{SP}} := \{ (\underline{v}, \psi) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \underline{v} = 0 \text{ on } \Gamma_D, \psi = 0 \text{ on } \Gamma_D \},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\underline{u}, \theta) \in \mathbb{V}_{\text{SP}} \text{ such that for all } (\underline{v}, \psi) \in \mathbb{V}_{\text{SP}} \\ \\ \int_{\Omega} N_{\alpha\beta\gamma\alpha\beta}(\underline{v}) + M_{\alpha\beta\gamma\alpha\beta}(\psi) + T_{\beta}(\partial_{\beta}\underline{v}_3 + \psi_{\beta}) + Q_{\beta}\partial_{\beta}\psi_3 + P\psi_3 \, d\Omega \\ \\ - \frac{1}{r} \int_{\Omega} [\sigma_{33}(u) + r(g + \underline{u}_3 - \varepsilon\theta_3)]_{-} (\mathcal{O}\sigma_{33}(v) + r\underline{v}_3 - \varepsilon\psi_3) \, d\Omega \\ \\ + \frac{1}{r} \int_{\Omega} \mathbf{P}_{B(0, \mathcal{F}[\sigma_{33}(u) + r(g + \underline{u}_3 - \varepsilon\theta_3)]_{-})}(\sigma_{\alpha 3}(u)e_{\alpha} + ru_t) \cdot (rv_t + \mathcal{O}\sigma_{\alpha 3}(v)e_{\alpha}) \, d\Omega \\ \\ - \frac{\mathcal{O}}{r} \int_{\Omega} \sigma_{33}(u)\sigma_{33}(v) + \sigma_{\alpha 3}(u)\sigma_{\alpha 3}(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} F_i v_i - G_i \psi_i \, d\Omega. \end{array} \right.$$

This plate model, due to its enriched transverse displacement, shows both pinch stress and pinch deformation in contact Nitsche terms.

Numerical results for a thin plate



GSV : Gustafsson Stenberg and Videman Nitsche approach with KL model, strict contact.

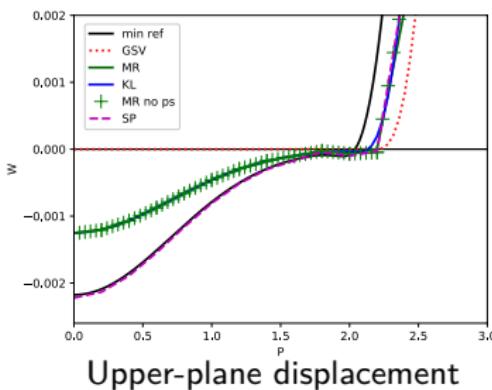
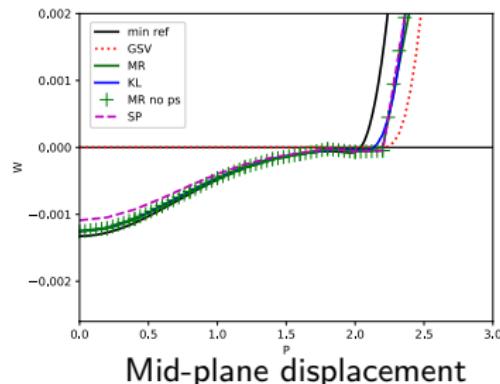
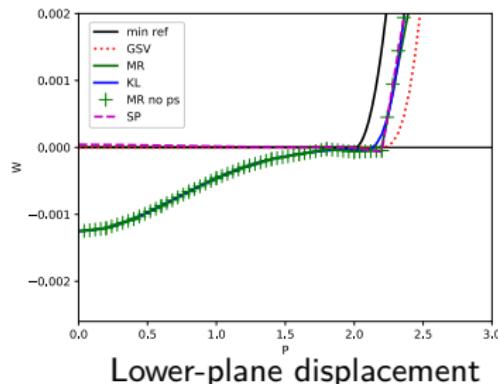
KL : Kirchhoff-Love model with a penalty term

MR : Mindlin-Reissner model with a penalty term

MR no ps : Mindlin-Reissner model with a penalty term and no plane stress assumption

SP : Mindlin-Reissner model with a additional pinch, Nitsche terms and no plane stress assumption

Numerical results for a plate of size 10x10 and thickness 0.1



Comparison to the 3D plate model from [Fabre, Pozzolini, Renard 2021] (min ref in black) on the lower-plane, mid-plane and upper plane of the plate. SP is the more accurate model.

Lagrangien
augmenté,
penalité et
Nitsche pour le
contact

Yves Renard

Illustration du
caractère
mal-posé

Des tests
numériques avec
le schéma de
Crank-Nicolson

Méthode de
redistribution de
masse

Schéma en temps
avec
approximation de
Nitsche de la
condition de
contact

A simple 1D test
with a periodic
solution

1D test:
convergence tests
affine elements

7. Le problème élastodynamique avec contact

On regarde maintenant le comportement dynamique d'un solide élastique qui impacte un solide rigide.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : [0, T] \rightarrow U_{adm}, \ u(0, \cdot) = u_0, \text{ such that :} \\ \int_{\Omega} \rho \ddot{u}(u - v) dx + a(u, u - v) \leq \ell(u - v) \quad \forall v \in U_{adm}, \end{array} \right.$$

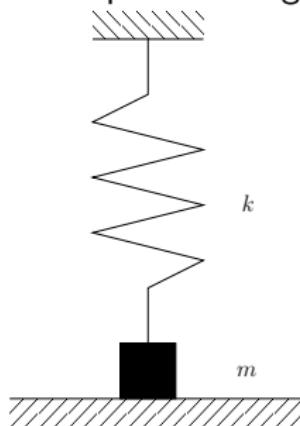
où

$$U_{adm} = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_D, u \cdot n \geq g \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Difficulté : le problème semi-discrétisé par éléments finis directement ou en utilisant une formulation avec multiplicateur de Lagrange est mal-posée. Même si le problème continu est bien posé (comme en 1D).

Illustration du caractère mal-posé

Le problème semi-discretisé en espace peut s'interpréter comme un système masses-ressorts (d'autant plus si la matrice de masse a été rendue diagonale). Voici un système masses-ressorts avec contact très simple à un degré de liberté.



Équation du déplacement vertical :

$$\begin{cases} m\ddot{u} + ku = F_N \\ F_N \geq 0, \quad u \geq 0, \quad F_N u = 0, \\ u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \end{cases}$$

Avec les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ les solutions s'écrivent :

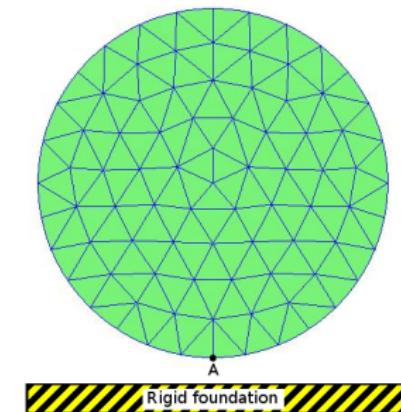
$$u(t) = \cos(\sqrt{k/m} t), \quad \text{for } t < \frac{\pi}{2} \sqrt{m/k},$$

$$u(t) = a \cos(-\sqrt{k/m} t), \quad \text{for } \frac{\pi}{2} \sqrt{m/k} < t < \frac{3\pi}{2} \sqrt{m/k},$$

pour tout $a \geq 0$. Cette équation est mal posée.

Des tests numériques avec le schéma de Cranck-Nicolson

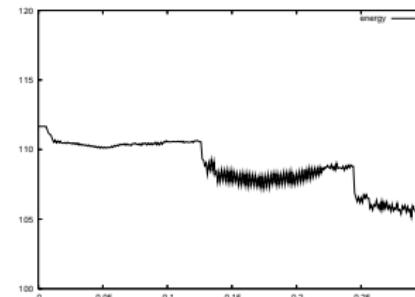
Paramètre	valeurs
ρ , diamètre	$6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, 0.2 m
pas de temps	10^{-3} s et 10^{-4} s
coefficients de Lamé	$\lambda = 10^6 \text{ P}$, $\mu = 5 \cdot 10^5 \text{ P}$
temps de simulation	0.3 s
u^0 , v^0	0.01 m , -0.1 m/s
taille de maille	$\simeq 0.02 \text{ cm}$



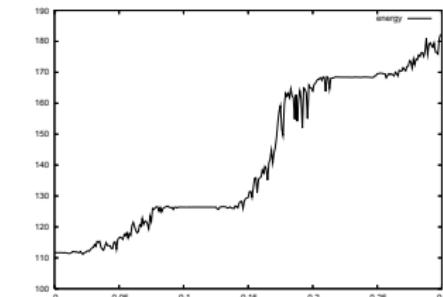
A chaque pas de temps, l'énergie totale du système s'écrit

$$E^n = \frac{1}{2}(V^n)^T M V^n + \frac{1}{2}(U^n)^T K U^n.$$

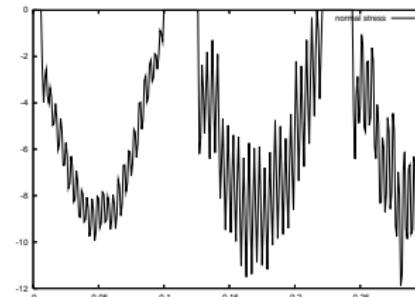
Schéma de Cranck-Nicolson ($\theta = 1/2$).



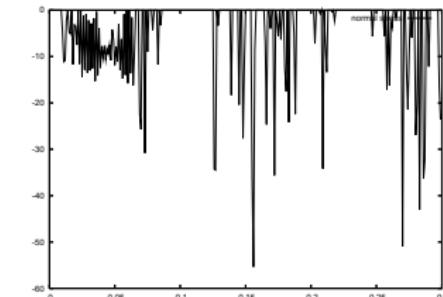
énergie, $\Delta t = 0.001$



énergie, $\Delta t = 0.0001$



contrainte de contact en A,
 $\Delta t = 0.001$



contrainte de contact en A
 $\Delta t = 0.0001$

Méthode de redistribution de masse

Idée : supprimer l'inertie des nœuds en contact (en redistribuant la masse sur les nœuds voisins).

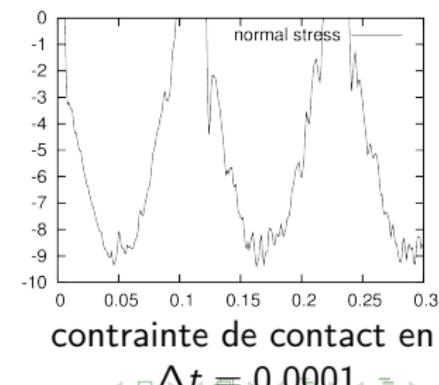
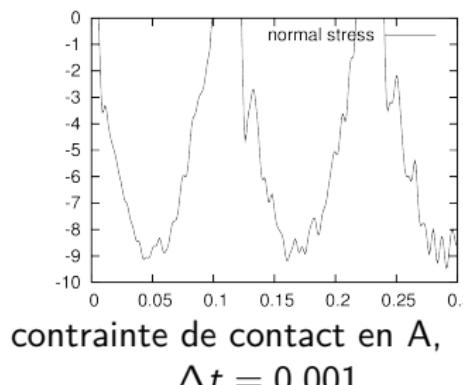
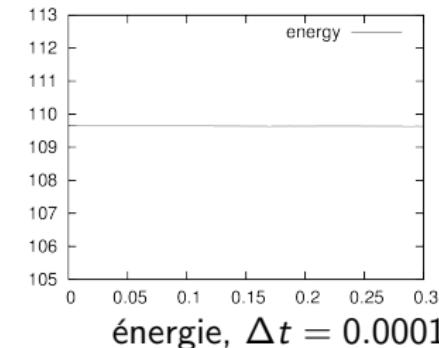
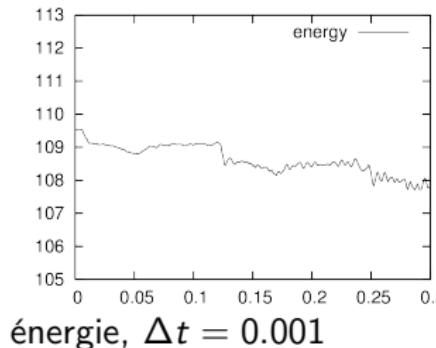


Schéma Hybride (ordre 2, mixte de point milieu et de Crank-Nicolson, [Chouly, hild, Renard 2015]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{h,n+1}, \dot{u}^{h,n+1}, \ddot{u}^{h,n+1} \in V^h \text{ tels que:} \\ u^{h,n+1} = u^{h,n} + \tau \dot{u}^{h,n+\frac{1}{2}}, \\ \dot{u}^{h,n+1} = \dot{u}^{h,n} + \tau \ddot{u}^{h,n+\frac{1}{2}}, \\ \langle \rho \ddot{u}^{h,n+\frac{1}{2}}, v^h \rangle + a(u^{h,n+\frac{1}{2}}, v^h) - \theta \int_{\Gamma_C} \sigma_N(u^{h,n+\frac{1}{2}}) \sigma_N(v) \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} \Phi(u^{h,n}, u^{h,n+1})(v_N - \theta \gamma \sigma_N(v)) d\Gamma \\ \quad = \ell^{n+1}(v^h) \quad \forall v^h \in V^h, \end{array} \right. \quad (1)$$

où

$$\Phi(u^{h,n}, u^{h,n+1}) = H(u_N^{h,n} - \theta \gamma \sigma_N(u^{h,n}))(u_N^{h,n+\frac{1}{2}} - \theta \gamma \sigma_N(u^{h,n+\frac{1}{2}}))_+ \\ + H(-(u_N^{h,n} - \theta \gamma \sigma_N(u^{h,n}))) (u_N^h - \theta \gamma \sigma_N(u^h))_+^{n+\frac{1}{2}}$$

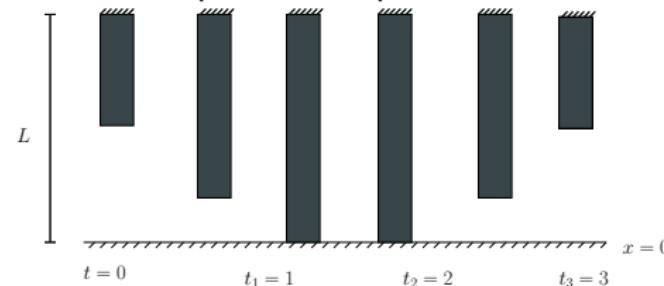
Ce schéma est inconditionnellement stable.

A simple 1D test with a periodic solution

Bar in tension-compression with a single impact point at the bottom and clamped at the top.

$$\rho \ddot{u} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \text{in }]0, T[\times]0, L[,$$

For the parameters: $f = 0$, $E = 1$, $\rho = 1$, $L = 1$, $u_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ and $\dot{u}_0(x) = 0$ the solution is periodic of period 3.



It is a severe test: occurrence of traveling shock wave without attenuation.

Illustration du caractère mal-posé

Des tests numériques avec le schéma de Cranck-Nicolson

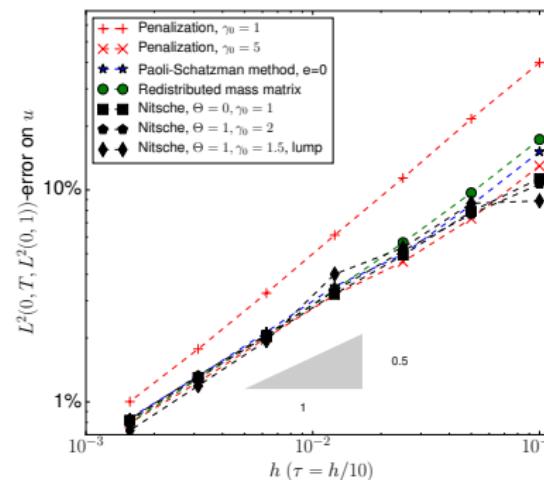
Méthode de redistribution de masse

Schéma en temps avec approximation de Nitsche de la condition de contact

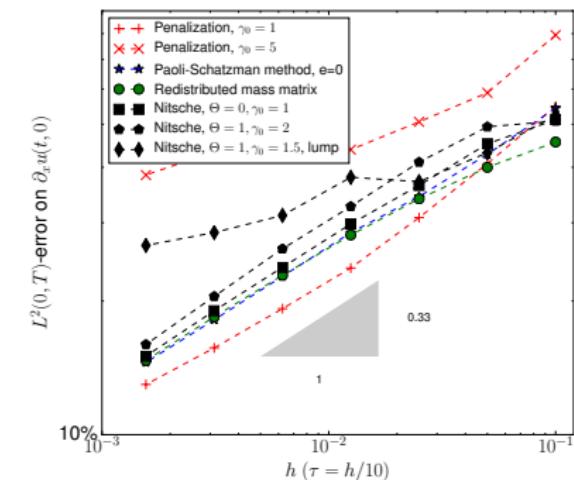
A simple 1D test with a periodic solution

1D test: convergence tests affine elements

1D test: convergence tests affine elements



$L^2([0, T] \times [0, L])$ -error on displacement



$L^2(\Gamma_C)$ -error on contact stress

From [Chouly, Renard 2018] and a Verlet Scheme.