Formulations des équations de Navier-Stokes sur des variétés riemanniennes

Aziz Hamdouni

En collaboration avec E. Liberge et T. Millet

LaSIE UMR7356 CNRS et La Rochelle Université

aziz.hamdouni@univ-lr.fr

CFM, 25-29 août 2025, Metz

Hommage à Paul Rougée

Cet exposé est dédié à Paul Rougée qui nous a quitté le 22 juillet 2025.

Figure: CITV - La Rochelle, 1997

Intérêt des équations Stokes sur une variétés

- Écoulement géophysique sur une surface
- Animation : par exemple les écoulements sur le visage
- Biologie cellulaire
- Relativité générale
- Calcul différentielle extérieur discret (c'est notre motivation originale avec Dina Razafindralandy)

Quel est le problème ?

Si on part des équations de Navier-Stokes dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ pour un écoulement incompressible, d'un fluide de masse volumique ρ, de viscosité dynamique μ, soumis à une force volumique b, où l'on note u le champ de vitesse et p le champ de pression :

$$\begin{cases} div\ u = 0 \\ \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u\right) = b - grad\ p + \mu \Delta u \end{cases} \tag{1}$$

Le passage de ces équations d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à une variété riemannienne quelconque ne pose aucun problème pour l'ensemble des termes sauf

$$\Delta u$$

car l'expression du laplacien vectoriel sur une variété riemannienne n'est pas unique

Quel Laplacien pour Navier-Stokes sur une variété riemannienne orientée (S, g) ?

Plusieurs expressions du terme diffusif existent dans la littérature — souvent introduites sans justification claire

- Historiquement il semble que dans les 60 c'est le Laplacien de Hodge qui était utilisé (Duric, M. D., Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1969) :

$$\Delta v = -(d\delta + \delta d)v$$

  $v = \overline{u}$ est la 1-forme associée au champ de vecteur u via la métrique g, d la différentielle extérieure et δ son adjoint formel, pour M une variété, compacte, orientée sans bord de dimension m :

$$(d\alpha, \beta)_{\Omega^p} = (\alpha, \delta\beta)_{\Omega^{p-1}} \text{ avec } (\gamma, \psi)_{\Omega^q} = \int_S \gamma \wedge \star\psi$$

  $\alpha \in \Omega^{p-1}(S)$, $\beta \in \Omega^p(S)$, $\psi \in \Omega^q(S)$, $\gamma \in \Omega^q(S)$ et $\star$ l'opérateur étoile de Hodge.
- On peut aussi prendre le laplacien de Bochner qui est une généralisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami ($\Delta = -div\nabla$),
- Ces laplaciens sont liés entre eux grâce aux formules de Weitzenbök

La formulation courante

C'est dans leur article de 1970 dans Annals of Math, portant sur le groupe des difféomorphismes et le mouvement des fluides incompressibles, D. G. Ebin and J. Marsden, proposent dans l'annexe B de l'article une formulation qu'ils appellent les équations "correctes" de NS sur les variétés riemannienne (pp. fin 161 et 162) où le laplacien est remplacé par :

$$\mathcal{D}^\star \mathcal{D} = \Delta + 2Ric \tag{2}$$

où $\mathcal{D}(u) = L_u g$, la dérivée de Lie de g par rapport au champ de vecteur u, Δ le laplacien de Hodge et Ric est la courbure de Ricci vu comme un élément de $\mathcal{L}(TS)$. Notons que l'article n'utilise pas cet opérateur.

- Mais depuis, une large littérature discute de la bonne formulation avec des arguments très discutables (par exemple le choix de la formulation qui donne les bonnes estimations énergétiques).
- **Nous proposons ici d'autres pistes pour traiter le sujet. Nous commençons par le cas d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'un travail non achevé !**

Quelques rappels sur la géométrie des surfaces

- On considère une surface S orientée, connexe, plongée dans $\mathbb{R}^3$, notons ∇^{can} la connexion canonique de $\mathbb{R}^3$ et g_0 sa métrique. En chaque point $x \in S$, on peut écrire :

$$\mathbb{R}^3 = T_x S \oplus \mathbb{R}N$$

  où N est la normale extérieure à S en x. On notera Π la projection orthogonale sur $T_x S$

- On note g la métrique induite par le plongement ϕ :

$$g = \phi^\star g_0$$

- On définit une connexion de Levi-Civitta ∇ sur S par :

$$\nabla_X Y = \Pi(\nabla^{can}_X Y)$$

  où X et Y sont deux champs de vecteurs de S.

Dérivée d'un champ de vecteurs à support sur S

- Notation à la Souriau, si on note $dx = X$ un vecteur tangent en x, on a :

$$\hat{d}Y = \Pi dY = \frac{\hat{\partial} Y}{\partial x} dp$$

- Opérateur de courbure C "intrinsèque", est un champ d'endomorphismes de $T_x S$, défini en chaque point $x \in S$, par :

$$dN = -C dx \quad \text{ou} \quad \nabla_X^{can} N = -CX$$

  X un champ de vecteurs de S.
- Soit Z un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ le long de S, notons $\Pi Z = Z_t$ et $\overline{N} Z = Z_n$, alors :

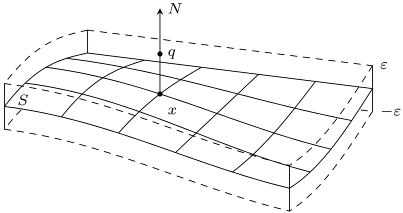
$$dZ = (\hat{d}Z_t - Z_n C dx) + \left(\overline{dx}\, C Z_t + \frac{\partial Z_n}{\partial x} dx \right) N$$

  ou

$$\nabla_X^{can} Z = (\nabla_X Z_t - Z_n C X) + \left(\overline{X} C Z_t + \frac{\partial Z_n}{\partial x} X \right) N$$

Eq. de Navier Stokes dans un voisinage tubulaire de S

On considère un voisinage tubulaire $\Omega = \{q \in \mathbb{R}^3,$ tq. $q = x + zN,\ x \in S$ et $z \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$, où ε est "suffisamment petit" $(det(I_{T_xS} - zC) \neq 0)$.



Le champ de vitesse $u : q \mapsto u_t(x,z) + u_n(x,z)\ N \in T_xS \oplus \mathbb{R}N$ vérifie les équations connues de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \mathrm{Div}\ u = 0 \\ \\ \rho(\partial_t u + \nabla_u u) = \overline{\mathrm{Div}(\Sigma)} + b, \quad \Sigma = -pI_3 + 2\mu D, \text{ et } D = \dfrac{1}{2}\left(\nabla^{can} u + \overline{\nabla^{can} u}\right) \end{cases}$$

Décomposition du tenseur des contraintes Σ

On note $\kappa = I_{T_xS} - z\,C$, alors D se décompose dans $T_xS \oplus \mathbb{R}N$:

$$D = \begin{bmatrix} D_t & D_s \\ \overline{D_s} & D_n \end{bmatrix}$$

$$D_t = \frac{1}{2}\left(\nabla u_t\,\kappa^{-1} + \kappa^{-1}\overline{\nabla u_t}\right) - u_n C \kappa^{-1},$$
$$D_s = \frac{1}{2}\left(\partial_z u_t + \kappa^{-1}(C u_t + \mathrm{grad}\; u_n)\right), \quad D_n = \partial_z u_n$$

et le tenseur des contraintes écrit alors :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_t & \Sigma_s \\ \overline{\Sigma_s} & \Sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_t = -p\,I_{T_xS} + 2\mu D_t, \quad \Sigma_s = 2\mu D_s, \quad \Sigma_n = -p + 2\mu D_n$$

Équations pour un champ de vitesse à support sur S tangent à S

En partant de l'expression de la divergence de Σ on en déduit alors : La divergence tridimensionnelle de Σ peut se décomposer sur $T_pS \oplus \mathbb{R}N$ comme :

$$\mathrm{Div}(\Sigma) = \Big(\mathrm{div}(\kappa^{-1}\Sigma_t) - \mathrm{div}(\kappa^{-1})\Sigma_t - \bar{\Sigma}_s\kappa^{-1}C - \mathrm{Tr}(\kappa^{-1}C)\bar{\Sigma}_s + \frac{\partial\bar{\Sigma}_s}{\partial z},$$
$$\mathrm{div}(\kappa^{-1}\Sigma_s) - \mathrm{div}(\kappa^{-1})\Sigma_s + \mathrm{Tr}(\Sigma_t\kappa^{-1}C) - \mathrm{Tr}(\kappa^{-1}C)\Sigma_n + \frac{\partial\Sigma_n}{\partial z}\Big) \quad (3)$$

où div est la divergence surfacique (obtenue à partir de ∇, la dérivée covariante sur S).
En se restreignant aux champs de vitesses tangents à S ne dépendant pas de z, on obtient :

$$\rho\left(\frac{\partial u_t}{\partial t} + \nabla_{u_t}u_t\right) = -\mathrm{grad}\, p + b_t + E$$

avec :

$$E = \overline{\mathrm{div}(2\mu\hat{D})} - \mu\left(C^2 + \mathrm{tr}C\ I_{T_xS}\right)u_t$$

et

$$\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla u_t + \overline{\nabla u_t}\right)$$

Limites d'une telle approche et améliorations

- Les équations obtenues sont différentes de celles de Ebin and Marsden (même après simplification).
- Le passage brutale cache une difficulté : une équation supplémentaire est vérifiée par u_t.
- On peut remédier à ce problème en introduisant dans la densité des forces volumiques b une composante normale qui exprime les forces capillaires, ou d'une certain manière un multiplicateur de Lagrange qui permet d'imposer que l'écoulement reste tangent à S.
- La disparition des termes en ∂_z doit être mieux préciser
- Il faut effectuer des développements asymptotiques par rapport à ε. Mais il faut être prudent avec cette approche car elle peut conduire à un modèle de "lubrification", qui ne répond pas à la question initiale !
- D'autres approches ?

Autres approches possibles

- On peut partir des équations de Boltzmann sur une variété où le problème du laplacien ne se pose pas. En absence de forces volumiques on a, la densité de probabilité (la "proportion de particules" à chaque instant t, en un point x ayant une vitesse v) vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\mathrm{grad} f = \frac{1}{\eta} Q(f) \tag{4}$$

où Q est l'opérateur de collision et η est un petit paramètre (qui peut être relié au nombre de Knudsen).
Les développements asymptotiques de f :

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots$$

avec les conditions :

$$\rho = \int f dv, \;\; \rho u = \int f v \, dv \;\text{ et }\; \rho \mathcal{E} = \int |v|^2 f \, dv$$

Il est connu que "formellement" une telle approche conduit aux équations de l'hydrodynamique. Quelles équations obtient-on sur une variété ?

Autres approches - suite et conclusion

- On peut aussi utiliser une approche stochastique (voir travaux d'Arnaudon).
- On peut partir de la relativité générale (voir travaux B. Kolev et al. en relativité variationnelle du second gradient). Le problème pour l'instant est que les équations obtenues par cette approche intègrent des termes du second gradient.

Ma conjecture, est que contrairement à ce qui se passe pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour une variété riemannienne avec courbure non nulle, on n'obtiendra pas les mêmes résultats ! Enjeu comprendre l'obstruction à l'obtention de la même limite.